



DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.1.8>

УДК 536.25

ББК 22.253

ИНТЕНСИВНОСТЬ КОНВЕКЦИИ ЖИДКОСТЕЙ С РАЗНЫМ ЧИСЛОМ ПРАНДТЛЯ В ВЕРТИКАЛЬНОМ ЦИЛИНДРЕ БОЛЬШОГО УДЛИНЕНИЯ

Александр Сергеевич Хорошев

Заведующий лабораторией исследования пластовых флюидов,
Институт по проектированию и исследовательским работам
в нефтяной промышленности «Гипровостокнефть»
khoroshev-aleksandr@yandex.ru
ул. Дыбенко, 4, 443080 г. Самара, Российская Федерация

Валентин Гаврилович Шахов

Кандидат технических наук,
профессор кафедры конструкции и проектирования летательных аппаратов,
Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева
shakhov@ssau.ru
ул. Московское шоссе, 34, 443086 г. Самара, Российская Федерация

Аннотация. Исследована свободная конвекция в длинном вертикальном цилиндре с постоянным градиентом температуры на боковой поверхности. Движение смоделировано средствами CFD (вычислительная гидродинамика) в пакете Ansys CFX. Изучена развитая естественная конвекция для трех жидкостей (вода, газонасыщенная нефть, дегазированная нефть). Классифицированы типы конвективного движения в зависимости от числа Рэлея (в диапазоне от $3 \cdot 10^3$ до $7 \cdot 10^4$). Интенсивность конвекции характеризуется вертикальной скоростью. Определены характерные критерии, на основании которых проведена классификация. Отмечено влияние числа Прандтля на интенсивность конвекции. Получена эмпирическая зависимость безразмерной средней по объему вертикальной скорости движения от числа Рэлея. Установлено, что при $h \geq 60$ и более цилиндр можно считать бесконечно длинным.

Ключевые слова: конвективное течение, конвекция в вертикальном цилиндре, бесконечно длинный цилиндр, моделирование в Ansys CFX, антисимметричное движение.

Введение

На практике наиболее часто встречаются конвективные течения в цилиндрах небольшого удлинения (отношение высоты цилиндра к диаметру основания – l/d до 10) с различными граничными условиями [2; 3; 8; 12]. В предыдущих публикациях авторов [4; 5] содержатся результаты численного решения задачи о свободно-конвективном движении жидкости в цилиндре, в которых выполнено сопоставление полученных результатов с результатами опубликованных теоретических и экспериментальных исследований, проанализировано влияние удлинения (от 2 до 60) и градиента температуры на стенке цилиндра на интенсивность конвективного течения. Это модели-

рование показало заметное конвективное движение в вертикальном цилиндре [4], которое не обладает осевой симметрией и качественно сходно с данными экспериментов [2; 3].

1. Постановка задачи

Исследуется свободно-конвективное движение жидкости в длинном вертикальном цилиндре (удлинения 60, 80, 100, 200). Движение смоделировано средствами CFD (вычислительная гидродинамика) в пакете Ansys CFX [6]. Предполагается:

- течение ламинарное;
- жидкость ньютоновская;
- изменение плотности от температуры использовано в приближении Буссинеска;
- задача стационарная.

Для рассматриваемой задачи уравнения неразрывности, количества движения и энергии имеют вид [1]:

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0, \tag{1}$$

$$(\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} + \frac{\mu}{\rho_0} \Delta \vec{v} + \vec{g}\beta T', \tag{2}$$

$$\vec{v}\nabla T' = \chi \Delta T', \tag{3}$$

где T – температура; T_0 – максимальное значение температуры; $T' = T_0 - T$ – отклонение температуры от T_0 ; $p_0 = -\rho_0 g z + p_{ref}$ – гидростатическое давление (соответствующее механическому равновесию при постоянных температуре T_0 и плотности ρ_0); p_{ref} – минимальное давление в верхней точке цилиндра; $p' = p - p_0$ – отклонение от гидростатического давления; ρ_0 – плотность при T_0 ; $\rho = \rho_0(1 - \beta T')$, $\beta = \frac{\partial(\ln \rho)}{\partial T}$ – коэффициент термического расширения; χ – коэффициент температуропроводности; \vec{v} – скорость; ∇ – оператор набла; \vec{g} – ускорение свободного падения; μ – коэффициент динамической вязкости.

Приняты следующие граничные условия (рис. 1):

- скорость на стенке равна нулю (условие прилипания на стенках);
- основания цилиндра теплоизолированы;
- на стенках поддерживается температура $T_w(z) = T_0 - \gamma z/l$, $\gamma = \text{const}$; $T_0 = T_w(0) = T_h$ – температура стенки у нижнего основания цилиндра, а $T_u = T_w(l)$ – температура стенки у верхнего основания;
- температура стенки не меняет своего значения в окружном направлении.

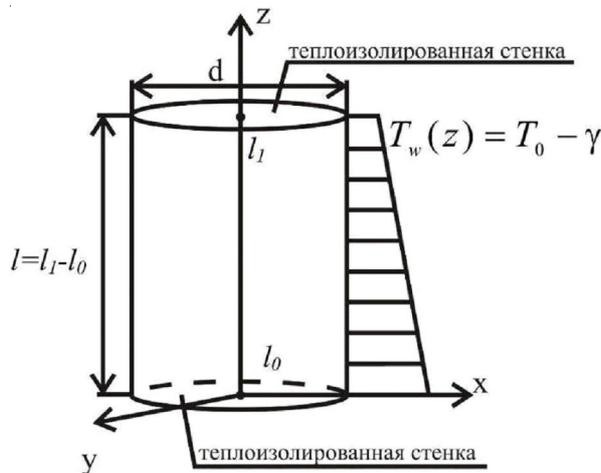


Рис. 1. Координаты и граничные условия

Цели и задачи заключаются в исследовании свойств свободно-конвективных течений в длинных вертикальных цилиндрах, выявлении характерных типов конвективного движения в зависимости от числа Рэлея.

2. Верификация модели

Для проверки математической модели и подтверждения правильности получаемых результатов смоделирована конвекция воды в вертикальном цилиндре единичного удлинения ($h = 1$). Граничные условия и геометрия заданы в соответствии с [1]. Ось симметрии цилиндра расположена вертикально. Температуры основания цилиндра T_h и вершины цилиндра T_u постоянны. Боковая поверхность теплоизолированная. $T_u = 295,15 \text{ K}$; $\chi = 1,415 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{с}$; $\rho = 997,3 \text{ кг}/\text{м}^3$; $\mu = 0,9604 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$, удельная теплоемкость при постоянном давлении $c_p = 4300,2 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$; $d = l$.

Результаты расчетов, представленные в [1], имеют графический вид, поэтому приводится качественное сравнение. На рисунках 2–4 показаны сравнения распределения величин в различных сечениях, безразмерная температура вычисляется как $\bar{T} = (T_h - T)/(T_h - T_u)$. Слева результаты, полученные Мюллером [1], справа – авторами статьи. Как видно, результаты очень схожи между собой. На рисунке 4 приводятся графики зависимости $\bar{w} = w/(\chi/l)$ от безразмерного радиуса в сечениях А и В. Видно хорошее согласование величин экстремумов скорости.

Проведенное сравнение дает основание полагать, что выбранный метод моделирования корректно отражает реальную картину процесса. Тем более что выбранные для сравнения результаты подтверждены экспериментально.

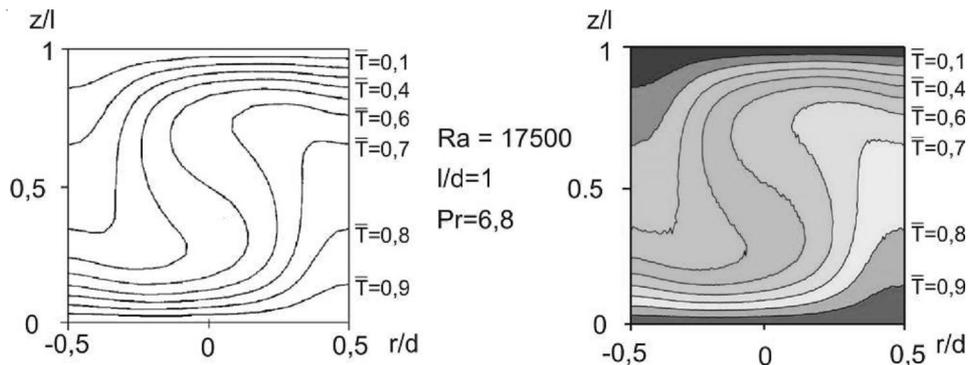


Рис. 2. Изотермы в вертикальной плоскости, проходящей через ось симметрии (температура относительная)

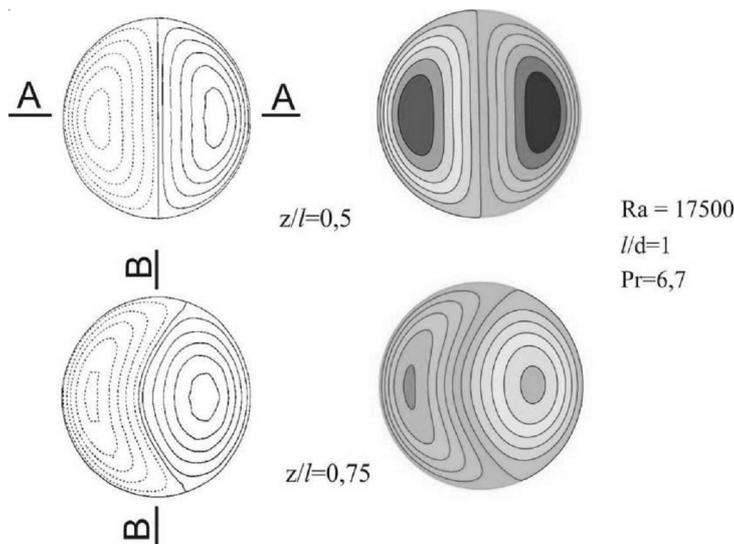


Рис. 3. Безразмерная вертикальная составляющая вектора скорости $\bar{w} = w/(\chi/l)$ в двух горизонтальных сечениях (на высоте $z/l = 0,5$ и $z/l = 0,75$)

$$Ra = 17500 \quad l/d=1 \quad Pr=6,7$$

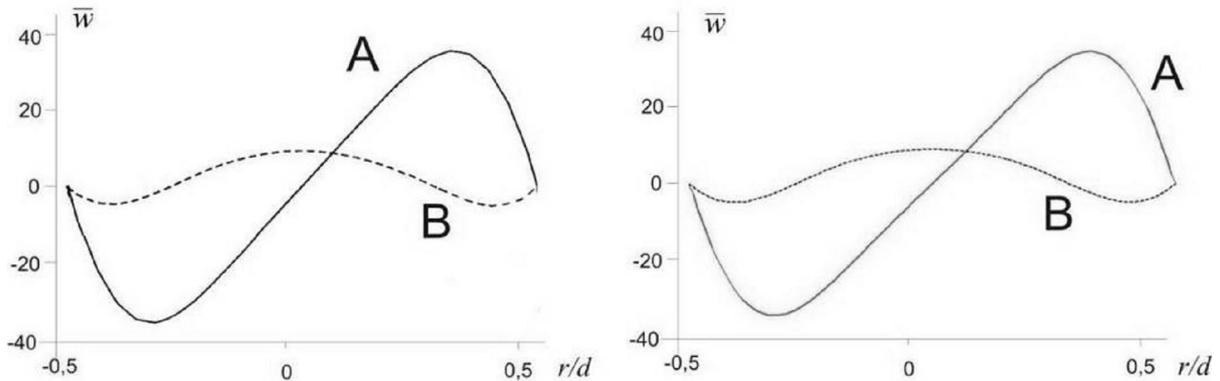


Рис. 4. Зависимость безразмерной вертикальной скорости $\bar{w} = w/(\chi/l)$ от безразмерного радиуса в сечениях А и В (рис. 3) при $z/l = 0,5$ и $z/l = 0,75$ соответственно

3. Численное моделирование конвективного течения в цилиндре

Основным безразмерным параметром конвективного движения является число Рэлея $Ra = \beta g d^4 \gamma / \nu \chi$, здесь $\nu = \mu/\rho$ – коэффициент кинематической вязкости; $\chi = \lambda/\rho c_p$ – коэффициент температуропроводности; λ – коэффициент теплопроводности. Число Прандтля вычисляется по формуле $Pr = \mu c_p / \lambda$.

В работе [5] расчеты были выполнены для воды. В данной статье приводится сравнение результатов моделирования конвекции воды, пластовой нефти и дегазированной нефти. Свойства пластовых нефтей и условия моделирования представлены в таблице 1, свойства дегазированной нефти характеризуются усредненными параметрами: $Pr = 4,5$; $c_p = 1700$ Дж/(кг·К); $\lambda = 0,12$ Вт/(м·К); $\mu = 0,32$ мПа·с; $\rho = 780$ кг/м³; $\chi = 9,05 \cdot 10^{-8}$ м²/с; $\beta = 8 \cdot 10^{-4}$ К⁻¹, числа Рэлея изменяется от $3 \cdot 10^3$ до $7 \cdot 10^4$.

На рисунке 5 представлены изовеллы вертикальной составляющей вектора скорости для разных жидкостей и градиентов температур. Видно, что для близких чисел Рэлея картины течения для различных жидкостей схожи.

Таблица 1

Основные параметры, определяющие свойства пластовых нефтей и конвективное движение

γ , К/м	0,013	0,011	0,012	0,01	0,021
ρ , кг/м ³	640,1	679,8	680,3	700,8	773,3
c_p , Дж/(кг·К)	1881	1855	1842	1851	1630
λ , Вт/(м·К)	0,096	0,101	0,102	0,102	0,133
μ , мПа·с	0,10	0,15	0,15	0,17	1,60
β , 1/К	0,00086	0,00101	0,00092	0,00111	0,00043
χ , м ² /с	$7,99 \cdot 10^{-8}$	$8,03 \cdot 10^{-8}$	$8,16 \cdot 10^{-8}$	$7,84 \cdot 10^{-8}$	$1,05 \cdot 10^{-7}$
Ra	65707	56352	55487	51282	2940
Pr	1,955	2,749	2,703	3,094	19,626

$h=100$

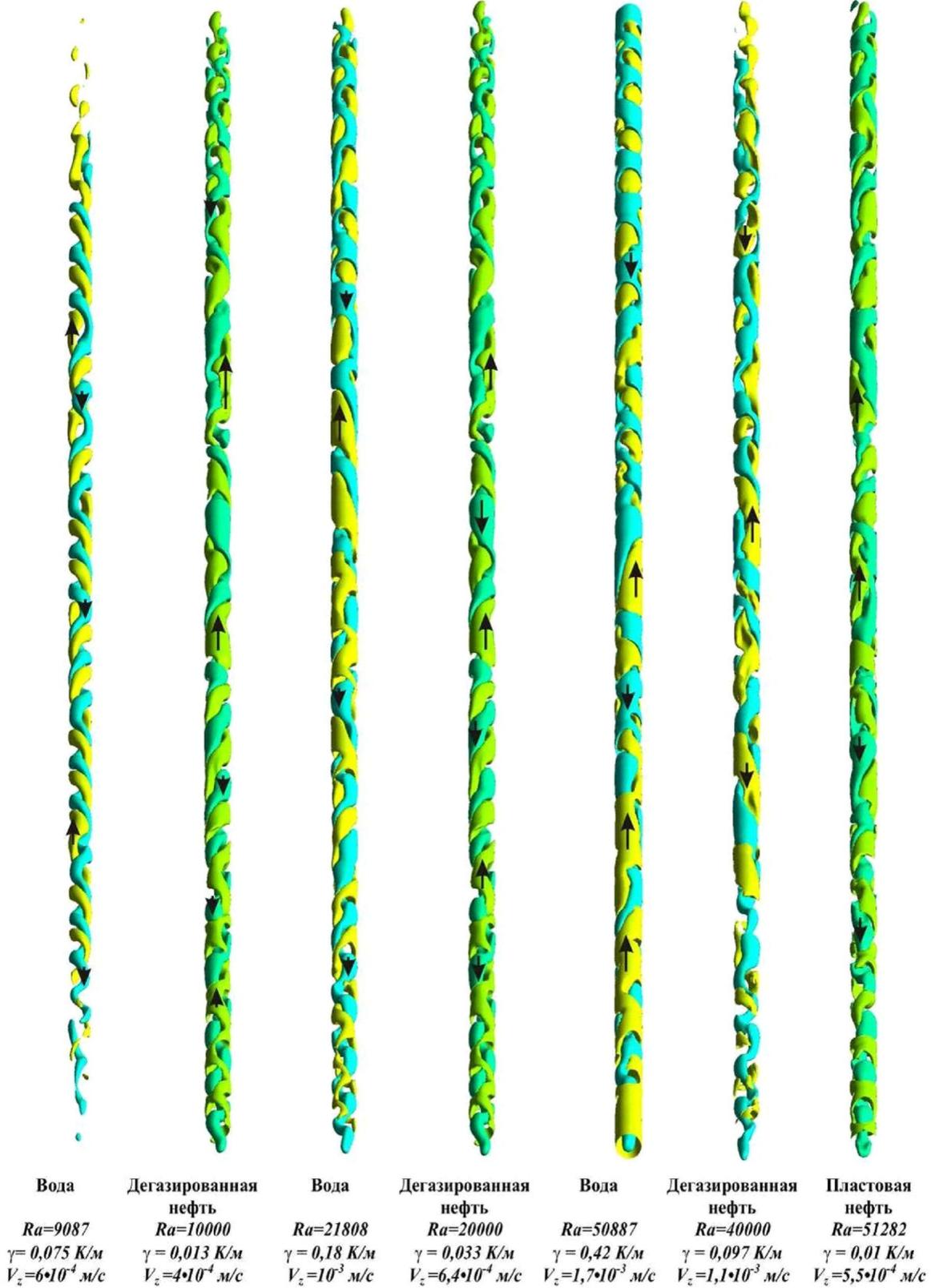


Рис. 5. Поверхности равной вертикальной составляющей вектора скорости \vec{V}_z цилиндра удлинением 100 (масштабы по вертикальной и горизонтальной оси не совпадают)

4. Типы конвективного движения в цилиндре большого удлинения

На рисунках 6 и 7 представлены графики зависимости среднего по сечению значения модуля вертикальной составляющей вектора скорости $|V_z|_{сеч}^{сред} = \frac{4}{\pi \cdot d^2} \int_{S_{xy}} |V_z| dx dy$ от безразмерной координаты z/l для воды и дегазированной нефти при разных значениях чисел Рэлея. Отметим, во-первых, что отсутствуют принципиальные различия в зависимостях для воды и дегазированной нефти. Во-вторых, видно, что для чисел Рэлея от 4 039 до 12 116 при z/l от 0,2 до 0,8 скорость изменяется слабо. Средняя скорость $|V_z|_{сеч}^{сред}$ не совсем постоянна, но амплитуда колебания $A_1/2$ невелика по сравнению с максимальным значением. Для чисел Рэлея от 13 000 до 40 000 амплитуда $A_2/2$ колебания значений $|V_z|_{сеч}^{сред}$ намного выше. Это говорит о периодической смене интенсивности потока в вертикальном направлении.

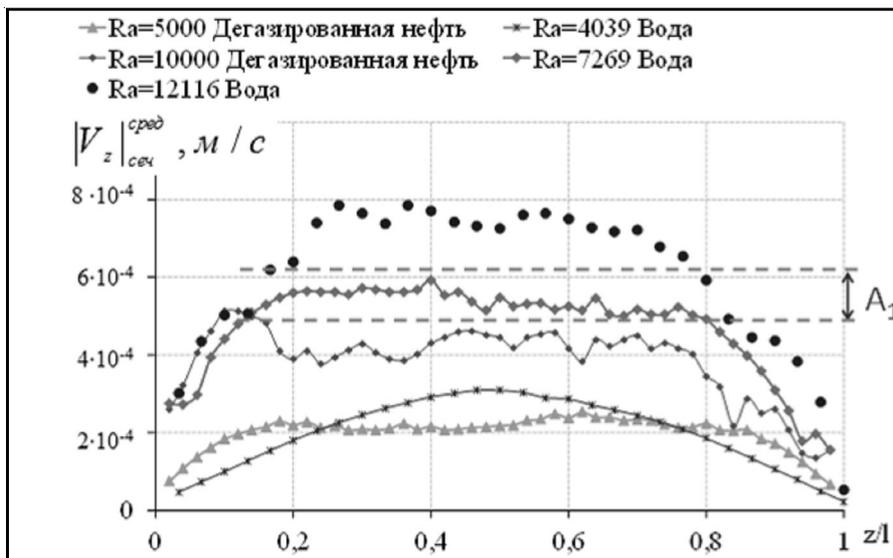


Рис. 6. Зависимость среднего по сечению значения модуля вертикальной составляющей вектора скорости

$|V_z|_{сеч}^{сред}$ от относительной координаты цилиндра z/l «винтового» движения



Рис. 7. Зависимость среднего по сечению значения модуля вертикальной составляющей вектора скорости

$|V_z|_{сеч}^{сред}$ от относительной координаты цилиндра z/l «ячеистого» движения

Таким образом, для рассмотренных чисел Рэлея существует два типа конвективного движения – «винтовое» и «ячеистое», различие между которыми видно по амплитуде колебания средней по сечению вертикальной скорости (рис. 6–7) и по взаимному расположению восходящих и нисходящих потоков (рис. 8). Стрелками на рисунке 8 показано перемещение потока при увеличении высоты z/l .

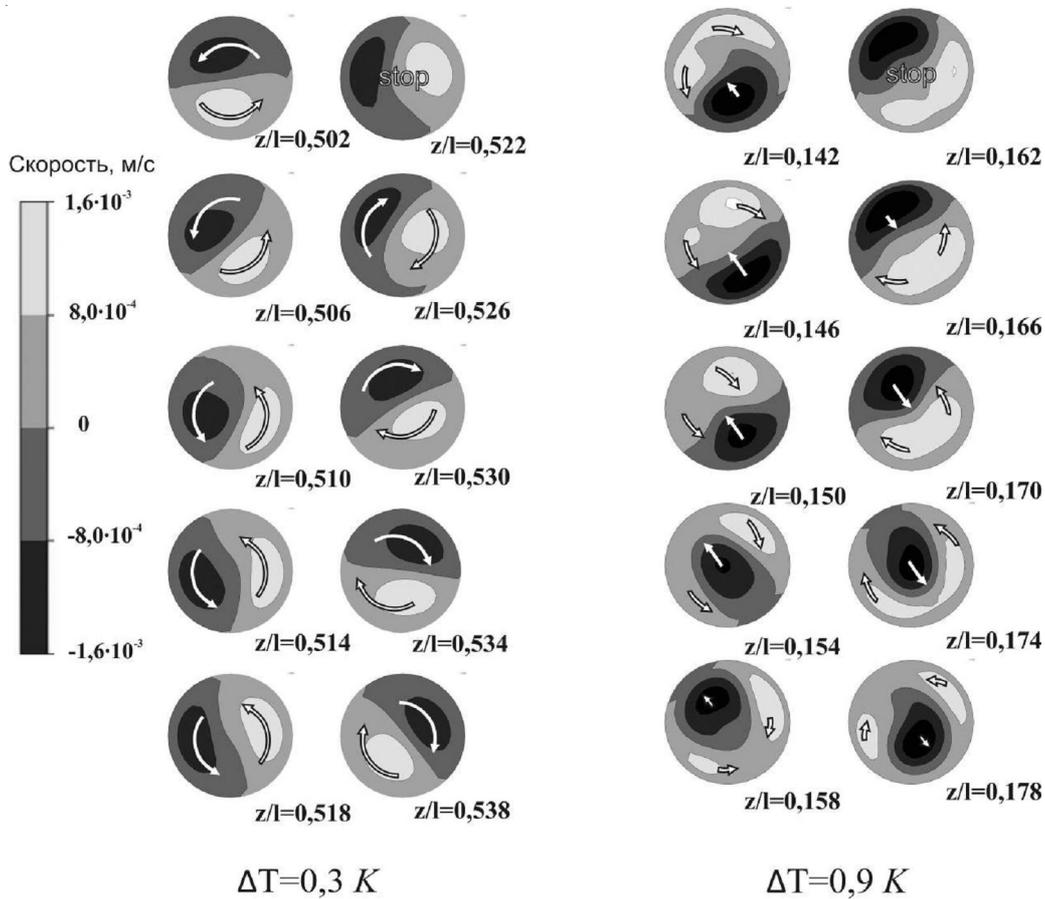


Рис. 8. Взаимное расположение восходящего и нисходящего потока в поперечном сечении цилиндра удлинением 100. Слева – «винтовое» движение, справа – «ячеистое»

Средняя вертикальная составляющая вектора скорости в срединной части цилиндра (от $z/l = 0,2$ до $z/l = 0,8$) вычисляется по формуле: $|V_z|_{об}^{сред} = \frac{5}{3} \int_{0,2}^{0,8} |V_z|_{сеч}^{сред} d\left(\frac{z}{l}\right)$. Эта величина характеризует интенсивность конвекции. При переходе к безразмерной скорости для получения универсальной зависимости принят масштаб скорости [7]: $u_r = \left(\frac{Q_0}{\rho c_p} \cdot \frac{g}{\gamma}\right)^{1/3}$, где Q_0 – среднее значение модуля теплового потока через боковую стенку, которое вычислялось средствами постпроцессора Ansys CFX. В этом случае $\overline{|V_z|_{об}^{сред}} = \frac{|V_z|_{об}^{сред}}{u_r}$.

Как видно из рисунка 9, полученные в результате моделирования значения $\overline{|V_z|_{об}^{сред}}$ хорошо «ложатся» на одну кривую.

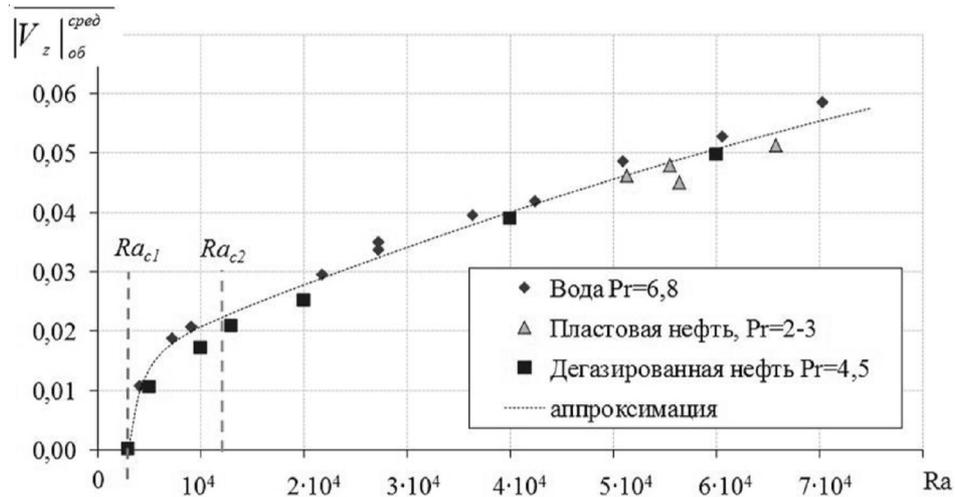


Рис. 9. Зависимость безразмерного среднего по объему значения модуля вертикальной составляющей вектора скорости $\overline{|V_z|_{об}^{сред}}$ от числа Рэлея

Зависимость, представленная на рисунке 8, аппроксимирована формулой:

$$\overline{|V_z|_{об}^{сред}} = 0,012 + 7,73 \cdot 10^{-7} Ra - 2,29 \cdot 10^{-12} Ra^2 + \frac{34,11}{Ra} - \frac{2,31 \cdot 10^5}{Ra^2}.$$

В расчетах при $Ra_{c1} = 3\ 100$ фиксировалось начало «ячеистого» движения (что хорошо согласуется с результатами, полученными другими исследователями [1; 9; 11]). Переход от «винтового» движения к «ячеистому» проявляется при $Ra_{c2} = 12\ 000$.

5. Критерий бесконечности цилиндра

Для распространения полученных результатов расчетов на цилиндры бесконечного удлинения, необходимо определить такое удлинение, при котором дальнейшее его увеличение (при фиксированном Ra) не ведет к изменению интенсивности конвекции и вида течения. Из таблицы 2 видно, что средняя по объему вертикальная скорость принимает одинаковое значение для удлинений, начиная с 60.

Таблица 2

Основные параметры конвективного течения воды в цилиндрах разного удлинения для двух чисел Рэлея

Ra		Удлинение				
		30	60	80	100	200
9 087	$\overline{ V_z _{об}^{сред}}$, м/с	$3,9 \cdot 10^{-4}$	$5,9 \cdot 10^{-4}$	$5,9 \cdot 10^{-4}$	$5,9 \cdot 10^{-4}$	$5,9 \cdot 10^{-4}$
27 261	$\overline{ V_z _{об}^{сред}}$, м/с	$0,7 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$

Заключение

Изучено конвективное течение в цилиндре большого удлинения при постоянном градиенте температуры на боковой поверхности для чисел Рэлея от $3 \cdot 10^3$ до $7 \cdot 10^4$. Установлена зависимость интенсивности вертикального движения от числа Рэлея. Определено критическое число Рэлея начала конвективного движения. Найдена граница по числу Рэлея, при котором среднее значение по сечению модуля вертикальной составляющей скорости начинает испытывать значительные колебания с изменением высоты цилиндра, а также меняется форма течения. Предложена клас-

сификация видов движений, а также масштаб скорости, позволяющий ввести единую для различных жидкостей зависимость безразмерной средней по объему вертикальной скорости движения от числа Рэлея. Установлен критерий «бесконечности» цилиндра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни, Г. З. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуковичский. – М. : Наука, 1972. – 392 с.
2. Остроумов, Г. А. Математическая теория установившейся теплопередачи в круглой вертикальной скважине при суперпозиции вынужденной и свободной ламинарной конвекций / Г. А. Остроумов // ЖТФ. – 1950. – Т. 20, вып. 6. – С. 750–757.
3. Остроумов, Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи / Г. А. Остроумов. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1952. – 286 с.
4. Хорошев, А. С. Интенсивность свободно-конвективного течения в вертикальном цилиндре при постоянном вертикальном градиенте температуры на боковой поверхности / А. С. Хорошев // Научное обозрение. – 2014. – № 5. – С. 74–80.
5. Хорошев, А. С. Моделирование ламинарного свободно-конвективного течения в длинном вертикальном цилиндре / А. С. Хорошев, В. Г. Шахов // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2011. – Т. 13, № 4. – С. 72–76.
6. ANSYS CFX-Solver Theory Guide. – Canonsburg : ANSYS, Inc., 2009. – 257 p.
7. Arya, S. P. S. Free convection similarity and measurements in flows with and without shear / S. P. S. Arya // Journal of the Atmospheric Sciences. – 1972. – Vol. 29. – P. 877–885.
8. Ganguli, A. A. Numerical predictions of flow patterns due to natural convection in a vertical slot / A. A. Ganguli, A. B. Pandit, J. B. Joshi // Chemical Engineering Science. – 2007. – Vol. 62. – P. 4479–4495.
9. Heslot, F. Transitions to turbulence in helium gas / F. Heslot, B. Castaing, A. Libchaber // Physical Review A. – 1987. – Vol. 36. – P. 5870–5873.
10. Muller, G. Natural convection in vertical Bridgman configurations / G. Muller, G. Neumann, W. Weber // Journal of Crystal Growth. – 1974. – Vol. 70. – P. 78–93.
11. Schneider, S. Laminar natural convection in a cylindrical enclosure with different end temperatures / S. Schneider, J. Straub // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1992. – Vol. 35. – P. 545–557.
12. Unsteady numerical simulation of the cooling process of vertical storage tanks under laminar natural convection / I. Rodriguez, J. Castro, C. D. Perez-Segarra, A. Oliva // International Journal of Thermal Sciences. – 2009. – Vol. 48. – P. 708–721.

REFERENCES

1. Gershuni G.Z., Zhukovitskiy E.M. *Konvektivnaya ustoychivost neshhimaemoy zhidkosti* [Convective Stability of Incompressible Fluid]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 392 p.
2. Ostroumov G.A. *Matematicheskaya teoriya ustanovivsheysya teploperedachi v krugloy vertikalnoy skvazhine pri superpozitsii vynuzhdennoy i svobodnoy laminarnoy konveksiy* [Mathematical Theory of Steady Heat Transfer in Round Vertical Borehole due to the Superposition of Forced and Free Laminar Convection]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, 1950, vol. 20, no. 6, pp. 750-757.
3. Ostroumov G.A. *Svobodnaya konveksiya v usloviyakh vnutrenney zadachi* [Free Convection in Internal Tasks]. Moscow; Leningrad, Gosudarstvennoe izd-vo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1952. 286 p.
4. Khoroshev A.S. *Intensivnost svobodno-konvektivnogo techeniya v vertikalnom tsilindre pri postoyannom vertikalnom gradiente temperatury na bokovoy poverkhnosti* [The Intensity of Free Convection Flow in a Vertical Cylinder with a Constant Vertical Temperature Gradient on the Side Surface]. *Nauchnoe obozrenie*, 2014, no. 5, pp. 74-80.
5. Khoroshev A.S., Shakhov V.G. *Modelirovanie laminarnogo svobodno-konvektivnogo techeniya v dlennom vertikalnom tsilindre* [Simulation of laminar Freely Induced Flow in Long Vertical Cylinder]. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiyskoy akademii nauk*, 2011, vol. 13, no. 4, pp. 72-76.
6. *ANSYS CFX-Solver Theory Guide*. Canonsburg, ANSYS, Inc., 2009. 257 p.
7. Arya S.P.S. Free convection similarity and measurements in flows with and without shear. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1972, vol. 29, pp. 877-885.

8. Ganguli A.A., Pandit A.B., Joshi J.B. Numerical predictions of flow patterns due to natural convection in a vertical slot. *Chemical Engineering Science*, 2007, vol. 62, pp. 4479-4495.
9. Heslot F., Castaing B., Libchaber A. Transitions to turbulence in helium gas. *Physical Review A.*, 1987, vol. 36, pp. 5870-5873.
10. Muller G., Neumann G., Weber W. Natural convection in vertical Bridgman configurations. *Journal of Crystal Growth*, 1974, vol. 70, pp. 78-93.
11. Schneider S., Straub J. Laminar natural convection in a cylindrical enclosure with different end temperatures. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1992, vol. 35, pp. 545-557.
12. Rodriguez I., Castro J., Perez-Segarra C.D., Oliva A. Unsteady numerical simulation of the cooling process of vertical storage tanks under laminar natural convection. *International Journal of Thermal Sciences*, 2009, vol. 48, pp. 708-721.

**THE INTENSITY OF CONVECTION OF FLUIDS
WITH DIFFERENT PRANDTL NUMBER IN A VERTICAL CYLINDER
OF LARGE ASPECT RATIO**

Aleksandr Sergeevich Khoroshev

Head of Laboratory for Studies of Reservoir Fluids,
Institute for Design and Research in Oil Industry "Giprovostokneft"
khoroshev-aleksandr@yandex.ru
Dybenko St., 4, 443080 Samara, Russian Federation

Valentin Gavrilovich Shakhov

Candidate of Technical Sciences, Professor, Department of Aircraft Design and Construction,
Samara National Research University
shakhov@ssau.ru
Moskovskoe shosse St., 34, 443086 Samara, Russian Federation

Abstract. We study the free convection in a long vertical cylinder with constant temperature gradient on the side surface. The wall temperature does not change its value in the circumferential direction, the flow is laminar; the fluid is Newtonian; the change in the density from the temperature used in the Boussinesq approximation, the problem is stationary. The movement is simulated by means of CFD in Ansys CFX. Verification of the used model is made. The natural convection of three fluids (water, gas-saturated oil, degassed oil) is studied for aspect ratio (the ratio of height to diameter) of 60, 80, 100, 200. Types of convective motion depending on the Rayleigh number is classified as "immovable" $Ra < 3 \cdot 10^3$, "spiral" $3 \cdot 10^3 < Ra < 1,2 \cdot 10^4$, "cellular" $1,2 \cdot 10^4 < Ra$. We define qualitative and quantitative criteria, on which the classification is based. A spiral movement is characterized by a constant average cross-section of vertical velocity. With cellular motion, the average vertical velocity of cross section, experiences a significant change in the height of the cylinder. The intensity of convection is characterized by the vertical speed. The influence of Prandtl number on the intensity of convection is marked. Empirical dependence of the average volume of the vertical speed of the Rayleigh number is received. A single dependence for different fluids is obtained by the use of scale speed $u_r = (Q_0 g / \rho c_p \gamma)^{1/3} Q_0$ – the average value of the modulus of the heat flow through the side wall, calculated by means of Ansys CFX post-processor; g – acceleration of gravity; ρ – density; c_p – the heat capacity at constant pressure, γ – the vertical temperature gradient on the wall. We determine the value of aspect ratio ($h = 60$) at which the cylinder can be considered infinitely long for the considered problem.

Key words: convection flow, convection in the vertical cylinder, infinitely long cylinder, modeling in Ansys CFX, antisymmetric flow.