DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.2.2

УДК 517.927
ББК 22.161.6

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ СЕМЕЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТНОГО ПОРЯДКА С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Сергей Иванович Митрохин

Кандидат физико-математических наук, доцент, профессор РАЕ,
старший научный сотрудник, Научно-исследовательский вычислительный центр
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова
mitrokhin-sergey@yandex.ru
ул. Ленинские горы, 1, стр. 4, 119992 г. Москва, Российская Федерация

Аннотация. Развивается метод изучения спектральных свойств дифференциальных операторов высокого четного порядка с суммируемым потенциалом. При больших значениях спектрального параметра найдена асимптотика решений соответствующего дифференциального уравнения.

Изучены граничные условия, выписано уравнение на собственные значения исследуемого оператора. Изучена индикаторная диаграмма этого уравнения.

Найдена асимптотика собственных значений изучаемого оператора.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, спектральный параметр, граничные условия, индикаторная диаграмма, асимптотика собственных значений.

1. Постановка задачи. Исторический обзор

Изучим спектральные свойства дифференциального оператора, задаваемого дифференциальным уравнением десятого порядка

$$y^{(10)}(x)+q(x)\cdot y(x)=\lambda\cdot a^{10}\cdot y(x), 0\le x\le\pi, a>0, \tag{1}$$

с разделенными граничными условиями вида

$$\begin{gathered} y^{(m_1)}(0)=y^{(m_2)}(0)=\ldots=y^{(m_5)}(0)=y^{(n_1)}(\pi)=y^{(n_2)}(\pi)=\ldots=y^{(n_5)}(\pi)=0, \\ m_1<m_2<\ldots<m_5; n_1<n_2<\ldots<n_5; m_k, n_k\in\{0,1,2,\ldots,9\}, k=1,2,\ldots,5. \end{gathered} \tag{2}$$

Мы предполагаем, что функция $q(x)$ является суммируемой на отрезке $[0;\pi]$:

$$q(x)\in L_1[0;\pi]\Leftrightarrow\left(\int_0^x q(t)dt\right)_x^{/}=q(x) \tag{3}$$

почти для всех x из отрезка $[0;\pi]$.

В уравнении (1) число $\lambda\in C$ – спектральный параметр, функция $q(x)$ – потенциал, функция $\rho(x)=a^{10}=\text{const}$ при $x\in[0;\pi]$ – весовая функция.

В работе [16] был изучен дифференциальный оператор четного порядка $2m$ вида

$$(-1)^m y^{(2m)}(x)+p(x)\cdot y(x)=\lambda\cdot p(x), 0\le x\le\pi, \tag{0.1}$$

$$y(0)=y^{(2)}(0)=\ldots=y^{(2m-2)}(0)=y(\pi)=y^{(2)}(\pi)=\ldots=y^{(2m-2)}(\pi)=0, \qquad (0.2)$$

был вычислен регуляризованный след этого оператора, при этом потенциал $p(x)$ предполагался гладкой (бесконечно дифференцируемой) функцией на отрезке $[0;\pi]$. Граничные условия (0.2) – специального вида: половина граничных условий берется в левой точке отрезка, половина – в правой точке отрезка. В изучаемом нами операторе (1)–(2) с условием (3) суммируемости потенциала $q(x)$ граничные условия (2) такого же рода, только мы изучаем сразу целое семейство дифференциальных операторов: граничные условия зависят от параметров $m_1,m_2,\ldots,m_5;n_1,n_2,\ldots,n_5;m_k,n_k\in\{0,1,2,\ldots,9\},k=1,2,\ldots,5$.

В работе [16] также упомянут следующий факт: если функция $p(x)$ суммируема на отрезке, то асимптотическая формула для собственных значений оператора (0.1)–(0.2) имеет следующий вид: $\lambda_n = n^{2m} + O(1)$, этой точности не хватает для вычисления регуляризованных следов. Цель нашей статьи – выписать более точные асимптотические формулы для собственных значений в случае суммируемого потенциала, то есть разложить величину $O(1)$ по степеням числа n.

В дальнейшем делались попытки уменьшить гладкость коэффициентов уравнений, задающих дифференциальный оператор (в основном для операторов второго порядка): в работе [3] изучалась сходимость разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора, в работе [5] исследовалась точная зависимость между асимптотическими разложениями собственных значений краевых задач Штурма – Лиувилля и гладкостью потенциала. В работе [18] изучена обратная задача на собственные значения для оператора Штурма – Лиувилля с разрывными коэффициентами. В работе [17] приведены примеры изоспектральных операторов второго и четвертого порядков с разрывными коэффициентами (обратная задача для таких порядков не имеет единственного решения).

В работе [12] автором вычислены формулы регуляризованных следов для операторов второго порядка с разрывными коэффициентами. В работе [13] тот же вопрос решен для функционально-дифференциального оператора с разрывным потенциалом. В работе [8] были изучены некоторые спектральные свойства дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией, как и в работе [17] были приведены некоторые примеры изоспектральных операторов.

Дальнейшее уменьшение гладкости коэффициентов привело к изучению операторов с суммируемыми коэффициентами. В работе [2] найдена асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма – Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом. В работах [7] и [11] автором продемонстрирован метод, отличный от метода работы [2], для изучения операторов с суммируемыми коэффициентами, порядок которых выше второго (четвертый в работе [7], шестой в работе [11]). В работе [10] изучены спектральные свойства дифференциальных операторов произвольного нечетного порядка с суммируемым потенциалом, граничные условия которого имеют конкретный вид типа (0.2).

2. Асимптотика решений дифференциального уравнения (1) при больших значениях спектрального параметра λ

Пусть $\lambda = s^{10}$, $s=\sqrt[10]{\lambda}$, при этом выберем ту ветвь арифметического корня, для которой $\sqrt[10]{1}=+1$. Обозначим через $w_k(k=1,2,\ldots,10)$ различные корни десятой степени из единицы:

$$w_k^{10}=1,w_k=e^{\frac{2\pi i}{10}(k-1)},k=1,2,\ldots,10;w_1=1;w_2=e^{\frac{2\pi i}{10}}=\cos\left(\frac{2\pi}{10}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{10}\right)=z^2;w_4=z^3;\ldots;w_p=z^{p-1};$$
$$w_{p+10}=w_p;p=1,2,\ldots,10. \qquad (4)$$

Числа $w_k\ (k=1,2,\ldots,10\,)$ из (4) делят (1) единичную окружность на десять равных частей:

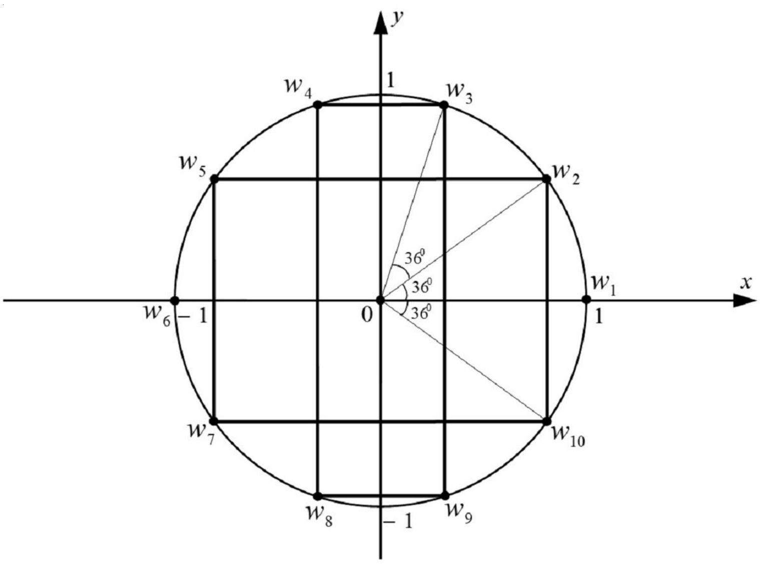

Рис. 1

При этом имеем: $w_1=\overline{w_1}=1$; $w_{10}=\overline{w_2}$; $w_9=\overline{w_3}$; $w_8=\overline{w_4}$; $w_7=\overline{w_5}$; $w_6=\overline{w_6}=-1$; $\mathrm{Im}(w_6)=\mathrm{Im}(w_1)=0$; $\mathrm{Im}(w_5)=\mathrm{Im}(w_2)$; $\mathrm{Im}(w_4)=\mathrm{Im}(w_3)$; $\mathrm{Im}(w_7)=\mathrm{Im}(w_{10})=-\mathrm{Im}(w_2)$; $\mathrm{Im}(w_8)=\mathrm{Im}(w_9)=-\mathrm{Im}(w_3)$.

Для чисел $w_k\,(k=1,2,...,10)$ из (4) и рисунка 1 справедливы следующие соотношения:

$$\sum_{k=1}^{10} w_k^p=0,\ p=1,2,...,9;\ \sum_{k=1}^{10} w_k^p=10,\ p=0,\ p=10. \quad (5)$$

Методами работ [6, гл. 2; 7; 10; 14, гл. 2] устанавливается теорема.

Теорема 1. Общее решение дифференциального уравнения (1) имеет вид:

$$y(x,s)=\sum_{k=1}^{10} C_k\cdot y_k(x,s); y^{(m)}(x,s)=\sum_{k=1}^{10} C_k\cdot y_k^{(m)}(x,s); m=1,2,...,9, \quad (6)$$

где $C_k\,(k=1,2,..,10)$ – произвольные постоянные, при этом фундаментальная система решений $\{y_k(x,s)\}_{k=1}^{10}$ подчиняется следующим асимптотическим оценкам:

$$y_k(x,s)=e^{aw_k sx}-\frac{A_{9,k}(x,s)}{10a^9s^9}+\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\,s|ax}}{s^{18}}\right), k=1,2,...,10; \quad (7)$$

$$\frac{y_k^{(m)}(x,s)}{(as)^m}=w_k^m e^{aw_k sx}-\frac{A_{9,k}^m(x,s)}{10a^9s^9}+\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\,s|ax}}{s^{18}}\right), k=1,2,...,10; m=1,2,...,9; \quad (8)$$

$$A_{9,k}(x,s)=w_1e^{aw_1sx}\int_0^x q(t)e^{a(w_k-w_1)st}dt+w_2e^{aw_2sx}\int_0^x q(t)e^{a(w_k-w_2)st}dt+...+w_{10}e^{aw_{10}sx}\int_0^x q(t)e^{a(w_k-w_{10})st}dt; \quad (9)$$

$$A_{9,k}^m(x,s)=\sum_{p=1}^{10} w_p w_p^m e^{aw_p sx}\int_0^x q(t)e^{a(w_k-w_p)st}dt, k=1,2,...,10; p=1,2,...,9. \quad (10)$$

При выводе формул (6)–(10) мы использовали соотношения (5) и требовали выполнения следующих начальных условий:

$$A_{9,k}(0,s)=0; A_{9,k}^m(0,s)=0; y_k(0,s)=1, y_k^{(m)}(0,s)=(as)^m w_k^m; k=1,2,...,10; m=1,2,...,9. \quad (11)$$

3. Изучение граничных условий (2)

Подставляя формулы (6)–(11) в граничные условия (2), имеем:

$$\begin{cases} y^{(m_p)}(0,s)=0 \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{10} C_k \cdot y_k^{(m_p)}(0,s)=0 \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{10} C_k \cdot (as)^{m_p} \cdot w_k^{m_p} =0; \\ y^{(n_p)}(\pi,s)\overset{(2)}{=}0 \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{10} C_k \cdot y_k^{(n_p)}(\pi,s)=0;\, p=1,2,...,5. \end{cases} \tag{12}$$

Система (12) – система из десяти линейных однородных уравнений с десятью неизвестными $C_1, C_2, ..., C_{10}$. По теореме Кронеккера – Капелли, такая система имеет ненулевые решения только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1)–(3) имеет следующий вид:

$$f(s)=\begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & ... & w_9^{m_1} & w_{10}^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & ... & w_9^{m_2} & w_{10}^{m_2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ w_1^{m_5} & w_2^{m_5} & ... & w_9^{m_5} & w_{10}^{m_5} \\ y_1^{(n_1)}(\pi,s) & y_2^{(n_1)}(\pi,s) & ... & y_9^{(n_1)}(\pi,s) & y_{10}^{(n_1)}(\pi,s) \\ y_1^{(n_2)}(\pi,s) & y_2^{(n_2)}(\pi,s) & ... & y_9^{(n_2)}(\pi,s) & y_{10}^{(n_2)}(\pi,s) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n_5)}(\pi,s) & y_2^{(n_5)}(\pi,s) & ... & y_9^{(n_5)}(\pi,s) & y_{10}^{(n_5)}(\pi,s) \end{vmatrix}=0. \tag{13}$$

Используя теорему Лапласа, разложим определитель $f(s)$ из (13) по последним пяти строчкам:

$$\begin{aligned} f(s) &= R_{1,2,3,4,5}(\pi,s)\cdot D_{6,7,...,10} - R_{2,3,4,5,6}(\pi,s)\cdot D_{1,7,8,9,10} + R_{3,4,5,6,7}(\pi,s)\cdot D_{1,2,8,9,10} - \\ &- ... + R_{6,7,8,9,10}(\pi,s)\cdot D_{1,2,...,5} + R_{1,3,4,5,6}(\pi,s)\cdot D_{2,7,8,9,10} - ... = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

где введены обозначения:

$$R_{j_1,j_2,...,j_5}(\pi,s)=\begin{vmatrix} y_{j_1}^{(n_1)}(\pi,s) & y_{j_2}^{(n_1)}(\pi,s) & ... & y_{j_5}^{(n_1)}(\pi,s) \\ y_{j_1}^{(n_2)}(\pi,s) & y_{j_2}^{(n_2)}(\pi,s) & ... & y_{j_5}^{(n_2)}(\pi,s) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_{j_1}^{(n_5)}(\pi,s) & y_{j_2}^{(n_5)}(\pi,s) & ... & y_{j_5}^{(n_5)}(\pi,s) \end{vmatrix}, \tag{15}$$

$$D_{j_1,j_2,...,j_5}=\begin{vmatrix} w_{j_1}^{m_1} & w_{j_2}^{m_1} & ... & w_{j_5}^{m_1} \\ w_{j_1}^{m_2} & w_{j_2}^{m_2} & ... & w_{j_5}^{m_2} \\ ... & ... & ... & ... \\ w_{j_1}^{m_5} & w_{j_2}^{m_5} & ... & w_{j_5}^{m_5} \end{vmatrix}, j_1, j_2, ..., j_5 \in \{1,2,...,10\}. \tag{16}$$

В силу удобной нумерации чисел w_k из (4) для алгебраических миноров $D_{j_1,j_2,...,j_5}$ из (16) можно вывести рекуррентные формулы.

Для определителя $D_{1,2,3,4,5}$ имеем:

$$D_{1,2,3,4,5} = \begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & \dots & w_5^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & \dots & w_5^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{m_5} & w_2^{m_5} & \dots & w_5^{m_5} \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} \begin{vmatrix} 1^{m_1} & z^{m_1} & \dots & z^{4m_1} \\ 1^{m_2} & z^{m_2} & \dots & z^{4m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^{m_5} & z^{m_5} & \dots & z^{4m_5} \end{vmatrix} = \prod_{\substack{k>p \\ k,p=1,2,3,4,5}} \left(z^{m_k} - z^{m_p} \right) = D_5 \neq 0, \tag{17}$$

так как $D_{1,2,3,4,5}$ представляет собой определитель Вандермонда чисел $z^{m_1}, z^{m_2}, \dots, z^{m_5}$.

Далее находим:

$$D_{2,3,4,5,6} = \begin{vmatrix} w_2^{m_1} & w_3^{m_1} & \dots & w_6^{m_1} \\ w_2^{m_2} & w_3^{m_2} & \dots & w_6^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_2^{m_5} & w_3^{m_5} & \dots & w_6^{m_5} \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} \begin{vmatrix} z^{m_1} & z^{2m_1} & \dots & z^{5m_1} \\ z^{m_2} & z^{2m_2} & \dots & z^{5m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{m_5} & z^{2m_5} & \dots & z^{5m_5} \end{vmatrix} \overset{(19)}{=} z^{m_1} \cdot z^{m_2} \cdot (\dots) \cdot z^{m_5} \cdot D_{1,2,3,4,5} \overset{(19)}{=} z^{M_5} \cdot D_5, \tag{18}$$

$$M_5 = \sum_{k=1}^{5} m_k.$$

Аналогичным образом получаем:

$$D_{3,4,5,6,7} = z^{2M_5} \cdot D_5; D_{k,k+1,\dots,k+4} = z^{(k-1)M_5} \cdot D_5, k = 1,2,\dots,6; D_{7,8,9,10,11} = (-1) \cdot D_{1,7,8,9,10} = $$
$$(-1) \cdot z^{6M_5} \cdot D_5, D_{j_{k+10}, j_m, \dots, j_p} = D_{j_k, j_m, \dots, j_p}; D_{k,k+1,\dots,k+4} = (-1)^{k-1} \cdot z^{(k-1)M_5} \cdot D_5, k = 7,8,9,10. \tag{19}$$

Подставляя формулы (15) в формулы (7), (8), разложим определитель $R_{j_1, j_2, \dots, j_5}(\pi, s)$ по столбцам на сумму определителей, получим:

$$R_{j_1, j_2, \dots, j_5}(\pi, s) = R_{j_1, j_2, \dots, j_5, 0}(\pi, s) - \frac{\sum_{k=1}^{5} R_{j_1, j_2, \dots, j_5, k-1}(\pi, s)}{10 a^9 s^9} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\, s| a\pi}}{s^{18}} \right); j_1, j_2, \dots, j_5 \in \{1, 2, \dots, 10\}, \tag{20}$$

$$R_{j_1, j_2, \dots, j_5, 0}(\pi, s) = \begin{vmatrix} w_{j_1}^{m_1} e^{a w_{j_1} \pi s} & w_{j_2}^{m_1} e^{a w_{j_2} \pi s} & \dots & w_{j_5}^{m_1} e^{a w_{j_5} \pi s} \\ w_{j_1}^{m_2} e^{a w_{j_1} \pi s} & w_{j_2}^{m_2} e^{a w_{j_2} \pi s} & \dots & w_{j_5}^{m_2} e^{a w_{j_5} \pi s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{j_1}^{m_5} e^{a w_{j_1} \pi s} & w_{j_2}^{m_5} e^{a w_{j_2} \pi s} & \dots & w_{j_5}^{m_5} e^{a w_{j_5} \pi s} \end{vmatrix}, \tag{21}$$

определители $R_{j_1, j_2, \dots, j_5, k}(\pi, s)$ получаются из определителя $R_{j_1, j_2, \dots, j_5, 0}(\pi, s)$ заменой k-го столбца $(k = 1,2,3,4,5)$ на столбец $\left(A_{9, j_k}^{n_1}(\pi, s); A_{9, j_k}^{n_2}(\pi, s); \dots; A_{9, j_k}^{n_5}(\pi, s) \right)^*$.

Основное приближение уравнения (14)–(16) получается из уравнения

$$f_0(s) = R_{1,2,\dots,5,0}(\pi, s) \cdot D_{6,7,8,9,10} - R_{2,3,\dots,6,0}(\pi, s) \cdot D_{1,7,8,9,10} + \dots = 0, \tag{22}$$

где определители $R_{j_1, j_2, \dots, j_5, 0}(\pi, s)$ определены по формуле (21), при этом имеем:

$$R_{j_1, j_2, \dots, j_5, 0}(\pi, s) = e^{a \sum_{k=1}^{5} w_{j_k} \pi s} \begin{vmatrix} w_{j_1}^{m_1} & w_{j_2}^{m_1} & \dots & w_{j_5}^{m_1} \\ w_{j_1}^{m_2} & w_{j_2}^{m_2} & \dots & w_{j_5}^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{j_1}^{m_5} & w_{j_2}^{m_5} & \dots & w_{j_5}^{m_5} \end{vmatrix}. \tag{23}$$

Для нахождения асимптотики корней уравнения (14)–(16) сначала необходимо найти асимптотику корней уравнения (22), а для этого необходимо изучить так называемую индикаторную диаграмму уравнения $f_0(s)=0$, (см.: [1, гл. 12]), то есть необходимо исследовать выпуклую оболочку показателей экспонент, входящих в уравнение (22), с учетом формулы (23). Таким образом, нам необходимо построить выпуклую оболочку множества точек $\left\{\sum_{k=1}^{5} w_{j_k}; j_1, j_2, ..., j_5 \in \{1,2,...,10\}\right\}$.

4. Изучение индикаторной диаграммы уравнения (22)

Начнем изучение выпуклой оболочки множества точек $\left\{w_{j_1} + w_{j_2}; j_1, j_2, ..., j_5 \in \{1,2,...,10\}\right\}$. Точки $w_k\,(k=1,2,...,10)$ из (4) делят единичную окружность на десять равных частей, они изображены на рисунке 1 и при этом расположены симметричным образом: есть симметрия относительно точки $O(0,0)$ и относительно координатных осей. Из правила параллелограмма сложения векторов и геометрических соображений следует, что индикаторная диаграмма уравнения (22) имеет следующий вид (N = 5, на рисунке должно быть пять окружностей):

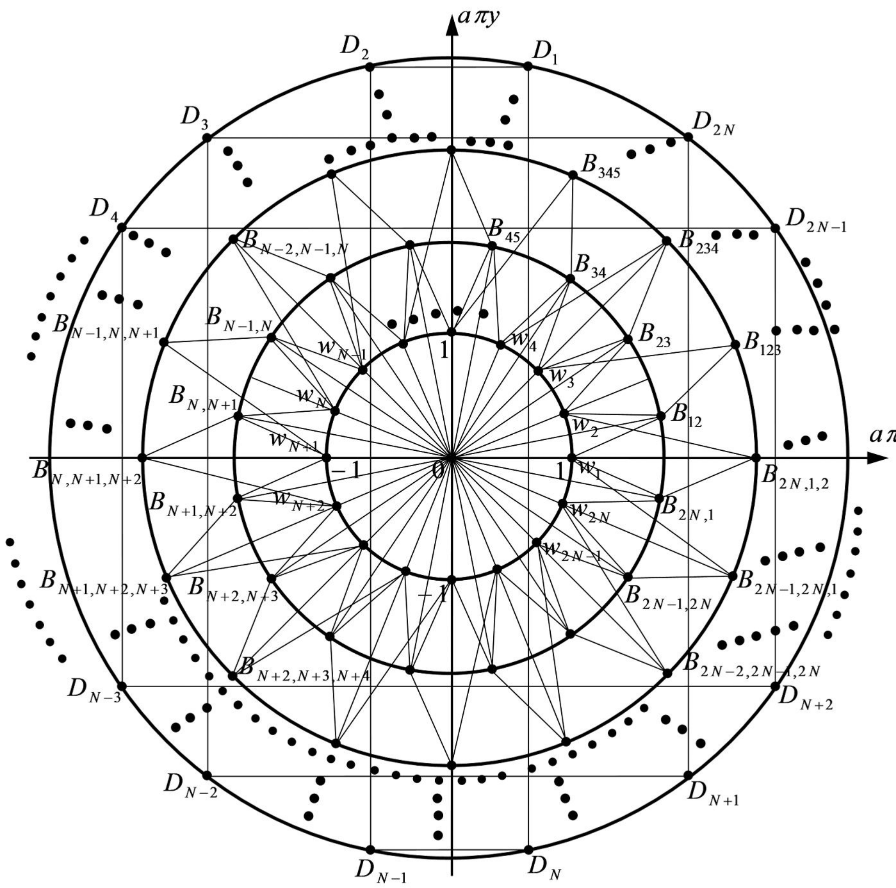

Рис. 2

На рисунке 2 точка B_{12} соответствует числу $w_1 + w_2$ (а также сумме векторов $\overrightarrow{Ow_1} + \overrightarrow{Ow_2}$), точка B_{23} соответствует числу $w_2 + w_3$ (и сумме векторов $\overrightarrow{Ow_2} + \overrightarrow{Ow_3}$), точка B_{mk} соответствует числу $w_m + w_k$ (и сумме векторов $\overrightarrow{Ow_m} + \overrightarrow{Ow_k}$), точка B_{kn} соответствует числу $w_m + w_k + w_n$ (и сумме векторов $\overrightarrow{Ow_m} + \overrightarrow{Ow_k} + \overrightarrow{Ow_n}$), $m,k,n = 1,2,...,2N$. Несложно доказать следующее неравенство: $|w_1 + w_4| < |w_1 + w_3| < |w_1 + w_3|$, $|w_2 + w_5| < |w_2 + w_4| < |w_2 + w_3|$,.... Действительно, складывая векторы, видим, что $\left|\overrightarrow{OB_{14}}\right| < \left|\overrightarrow{OB_{13}}\right| < \left|\overrightarrow{OB_{12}}\right|$, $\left|\overrightarrow{OB_{25}}\right| < \left|\overrightarrow{OB_{24}}\right| < \left|\overrightarrow{OB_{23}}\right|$, при этом

$\left|\overrightarrow{OB_{12}}\right| = \left|\overrightarrow{OB_{23}}\right| = \left|\overrightarrow{OB_{34}}\right| = \ldots = \left|\overrightarrow{OB_{2n-1,2n}}\right| = \left|\overrightarrow{OB_{2n,1}}\right|$. Значит, точки $B_{12}, B_{23}, B_{34}, \ldots, B_{2n-1,2n}, B_{2n,1}$ лежат на окружности радиуса $R = \left|\overrightarrow{OB_{12}}\right| > 1$ и делят эту окружность на десять равных частей, точки $B_{13}, B_{14}, B_{24}, B_{25}, \ldots, B_{k+m,k}\,(m = 2,3,\ldots,8; k = 1,2,\ldots,10)$ попадают внутрь этой окружности, так как $\left|w_{m+k} + w_k\right| < \left|w_{k+1} + w_k\right|$ при $m = 2,3,\ldots,8$. Этот факт доказывается и аналитически:

$$\left|w_{k+1} + w_k\right| \overset{(4)}{=} \left|e^{\frac{2\pi i}{10}\cdot k} + e^{\frac{2\pi i}{10}\cdot(k-1)}\right| = \left|e^{\frac{2\pi i}{10}\cdot\left(k-\frac{1}{2}\right)}\right| \cdot \left|e^{\frac{2\pi i}{10}\cdot\frac{1}{2}} + e^{\frac{2\pi i}{10}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}\right| = 1\cdot 2\cdot\left|\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\right| = 2\cos\left(\frac{\pi}{10}\right),$$

$$\left|w_{k+m} + w_k\right| = \left|e^{\frac{2\pi i}{10}\cdot(k+m-1)} + e^{\frac{2\pi i}{10}\cdot k}\right| = \left|e^{\frac{2\pi i}{10}\cdot\left(k+\frac{m}{2}-1\right)}\right| \cdot \left|e^{\frac{2\pi i}{10}\cdot\frac{m}{2}} + e^{\frac{2\pi i}{10}\cdot\left(-\frac{m}{2}\right)}\right| = 1\cdot 2\cdot\cos\left(\frac{\pi m}{10}\right), \cos\left(\frac{\pi m}{10}\right) < \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

при $m = 2,3,\ldots,8$, это означает, что $\left|w_{m+k} + w_k\right| < \left|w_{k+1} + w_k\right|$ при $m = 2,3,\ldots,8$. Значит, мы доказали, что выпуклой оболочкой множества точек $\left\{w_{j_1} + w_{j_2}, j_1, j_2 = 1,2,\ldots,10\right\}$ является правильный десятиугольник $B_{12}B_{23}B_{34}\ldots B_{9,10}B_{10,1}$.

Аналогичным образом доказываем, что выпуклой оболочкой множества точек $\left\{w_{j_1} + w_{j_2} + w_{j_3}, j_1, j_2, j_3 = 1,2,\ldots,10\right\}$ является изображенный на рисунке 2 правильный десятиугольник $B_{123}B_{234}B_{345}\ldots B_{8,9,10}B_{9,10,1}B_{10,1,2}$, где точка B_{kmn} соответствует сумме $w_k + w_m + w_n$ (а также сумме векторов $\overrightarrow{Ow_k} + \overrightarrow{Ow_m} + \overrightarrow{Ow_n}$), все точки лежат на окружности радиуса $R_1 = \left|\overrightarrow{OB_{123}}\right| > \left|\overrightarrow{OB_{12}}\right| > 1$. На границах этого многоугольника лежат точки $w_1 + w_2 + w_3$, $w_2 + w_3 + w_4$, $w_3 + w_4 + w_5, \ldots,$ $w_8 + w_9 + w_{10}$, $w_9 + w_{10} + w_1$, $w_{10} + w_1 + w_2$, точки $w_1 + w_2 + w_4$, $w_1 + w_2 + w_5$, $w_1 + w_3 + w_4, \ldots$ (у которых сумма индексов суммирования больше единицы) попадают внутрь этого десятиугольника и на индикаторную диаграмму не влияют.

Аналогичным образом устанавливается, что выпуклой оболочкой множества $\left\{w_{j_1} + w_{j_2} + w_{j_3} + w_{j_4}, j_1, j_2, j_3, j_4 = 1,2,\ldots,10\right\}$ является десятиугольник $B_{1234}B_{2345}B_{3456}\ldots B_{9,10,1,2}B_{10,1,2,3}$, где B_{mknp} соответствует сумме $w_m + w_k + w_n + w_p$;...; выпуклой оболочкой множества $\left\{w_{j_1} + w_{j_2} + \ldots + w_{j_5}, j_1, j_2, \ldots, j_5 = 1,2,\ldots,10\right\}$ является десятиугольник $D_1D_2\ldots D_{10}$, где точка $D_m\,(m = 1,2,\ldots,10)$ соответствует сумме $\sum_{k=1}^{5} w_{m+k-1}$, если ввести обозначение $w_{n+10} = w_n, n = 1,2,\ldots,10$. Остальные точки множества $\left\{w_{j_1} + w_{j_2} + \ldots + w_{j_5}, j_1, j_2, \ldots, j_5 = 1,2,\ldots,10\right\}$ попадают внутрь многоугольника $D_1D_2\ldots D_{10}$ и на асимптотику корней уравнений (22)–(23) и (14)–(16) не влияют.

Из общей теории нахождения корней квазиполиномов вида $f(s)$ из (14)–(16) следует (см.: [1, гл. 12]), что собственные значения дифференциального оператора (1)–(2)–(3) находятся в секторах $T_1, T_2, \ldots, T_{10}$ бесконечно малого раствора, биссектрисы которых являются серединными перпендикулярами к отрезкам $[D_1; D_2], [D_2; D_3], \ldots, [D_9; D_{10}], [D_{10}; D_1]$ соответственно.

5. Асимптотика собственных значений в секторе T_1

Исследуем подробно асимптотику корней уравнения (14)–(16) в секторе T_1, биссектриса которого перпендикулярна отрезку $[D_4; D_5]$. В формулы (14)–(16) необходимо подставить формулы (17)–(19) с учетом формул (20)–(21), в которых надо учесть формулы (7)–(11) и оставить в получившемся уравнении только те экспоненты, показатели которых задаются точками, комплексно-сопряженными к точкам D_4 и D_5, то есть точками D_1 и D_2. Поэтому верно следующее утверждение.

Теорема 3. В секторе T_1 индикаторной диаграммы (рис. 2) уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1)–(2)–(3) имеет следующий вид:

$$g_1(s) = R_{1,2,3,4,5}(\pi)\cdot D_{6,7,8,9,10} - R_{2,3,4,5,6}(\pi)\cdot D_{1,7,8,9,10} = 0. \quad (24)$$

Из формул (17)–(18) следует, что

$$D_{6,7,8,9,10}=z^{5M_5}\cdot D_5, D_{1,7,8,9,10}=z^{6M_5}\cdot D_5, D_5\neq 0. \tag{25}$$

Применяя формулы (25) и формулы (20), (21) для сектора T_1, уравнение (24) можно переписать в следующем виде:

$$g_1(s)=\left[R_{1,2,\ldots,5,0}(\pi,s)-\frac{\sum\limits_{k=1}^{5}R_{1,2,\ldots,5,k,9}(\pi,s)}{10a^9s^9}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{18}}\right)\right]\cdot z^{5M_5}\cdot D_5-$$
$$-\left[R_{2,3,\ldots,6,0}(\pi,s)-\frac{\sum\limits_{k=1}^{5}R_{2,3,\ldots,6,k,9}(\pi,s)}{10a^9s^9}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{18}}\right)\right]\cdot z^{5M_5}\cdot D_5=0. \tag{26}$$

В уравнении (26) поделим на $z^{5M_5}\cdot D_5\neq 0$, а для величин $R_{1,2,\ldots,5,0}(\pi,s)$ и $R_{2,3,\ldots,6,0}(\pi,s)$ применим формулы (21) и (23):

$$R_{1,2,\ldots,5,0}(\pi,s)=e^{a\sum\limits_{k=1}^{5}w_k\cdot\pi s}\cdot R_5, R_{2,3,\ldots,6,0}(\pi,s)=e^{a\sum\limits_{k=2}^{6}w_k\cdot\pi s}\cdot R_5\cdot z^{P_5}, P_5=\sum_{k=1}^{5}n_k, \tag{27}$$

$$R_5=\begin{vmatrix} w_1^{n_1} & w_2^{n_1} & \ldots & w_5^{n_1}\\ w_1^{n_2} & w_2^{n_2} & \ldots & w_5^{n_2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ w_1^{n_5} & w_2^{n_5} & \ldots & w_5^{n_5}\end{vmatrix}\overset{(4)}{=}\begin{vmatrix} 1^{n_1} & z^{n_1} & \ldots & z^{4n_1}\\ 1^{n_2} & z^{n_2} & \ldots & z^{4n_2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1^{n_5} & z^{n_5} & \ldots & z^{4n_5}\end{vmatrix}\overset{(19)}{=}\prod_{\substack{k>p\\ k,p=1,2,\ldots,5}}\left(z^{n_k}-z^{n_p}\right)=R_5\neq 0. \tag{28}$$

С помощью формул (27), (28) уравнение (26) можно переписать в следующем виде:

$$g_1(s)=\left[e^{a\sum\limits_{k=1}^{5}w_k\pi s}-z^{M_5}\cdot z^{P_5}\cdot e^{a\sum\limits_{k=2}^{6}w_k\pi s}\right]-\frac{1}{10a^9s^9\cdot R_5}\cdot\left[\sum_{k=1}^{5}R_{1,2,\ldots,5,9,k}(\pi,s)-\right.$$
$$\left.-\sum_{k=1}^{5}R_{2,3,\ldots,6,10,k}(\pi,s)\cdot z^{M_5}\right]+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{18}}\right)=0, \tag{29}$$

где величины $R_{1,2,\ldots,5,9,k}(\pi,s)$ получаются из определителя $R_{1,2,\ldots,5,0}(\pi,s)$ из (21) заменой k-го столбца на столбец $\left(A_{9,k}^{n_1}(\pi,s); A_{9,k}^{n_2}(\pi,s);\ldots; A_{9,k}^{n_5}(\pi,s)\right)^*$. Выпишем некоторые из этих величин:

$$A_{1,2,\ldots,5,9,1}(\pi,s)=\begin{vmatrix} A_{9,1}^{n_1}(\pi,s) & w_2^{n_1}e^{aw_2s\pi} & \ldots & w_5^{n_1}e^{aw_5s\pi}\\ A_{9,1}^{n_2}(\pi,s) & w_2^{n_2}e^{aw_2s\pi} & \ldots & w_5^{n_2}e^{aw_5s\pi}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ A_{9,1}^{n_5}(\pi,s) & w_2^{n_5}e^{aw_2s\pi} & \ldots & w_5^{n_5}e^{aw_5s\pi}\end{vmatrix},$$

$$A_{1,2,\ldots,5,9,2}(\pi,s)=\begin{vmatrix} w_1^{n_1}e^{aw_1s\pi} & A_{9,2}^{n_1}(\pi,s) & w_3^{n_1}e^{aw_3s\pi} & \ldots & w_5^{n_1}e^{aw_5s\pi}\\ w_1^{n_2}e^{aw_1s\pi} & A_{9,2}^{n_2}(\pi,s) & w_3^{n_2}e^{aw_3s\pi} & \ldots & w_5^{n_2}e^{aw_5s\pi}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ w_1^{n_5}e^{aw_1s\pi} & A_{9,2}^{n_5}(\pi,s) & w_3^{n_N}e^{aw_3s\pi} & \ldots & w_5^{n_5}e^{aw_5s\pi}\end{vmatrix},\ldots,$$

$$A_{2,3,\ldots,6,9,1}(\pi,s)=\begin{vmatrix} A_{9,2}^{n_1}(\pi,s) & w_3^{n_1}e^{aw_3s\pi} & \ldots & w_6^{n_1}e^{aw_6s\pi} \\ A_{9,2}^{n_2}(\pi,s) & w_3^{n_2}e^{aw_3s\pi} & \ldots & w_6^{n_2}e^{aw_6s\pi} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{9,2}^{n_5}(\pi,s) & w_3^{n_5}e^{aw_3s\pi} & \ldots & w_6^{n_5}e^{aw_6s\pi} \end{vmatrix},\ldots \tag{30}$$

Используя формулы (9), (10), из (30) находим, применяя свойства определителей:

$$R_{1,2,\ldots,5,9,1}(\pi,s)=w_1R_5e^{a\sum\limits_{k=1}^{5}w_k\pi s}\cdot\left(\int\limits_0^{\pi}\ldots\right)_{a11}-w_6R_5z^{P_5}e^{a\sum\limits_{k=2}^{5}w_k\pi s}\cdot\left(\int\limits_0^{\pi}\ldots\right)_{a1,6};\left(\int\limits_0^{\pi}\ldots\right)_{apr}=\left(\int\limits_0^{\pi}q(t)e^{a(w_p-w_r)st}dt\right)_{apr}; \tag{31}$$

$$R_{1,2,\ldots,5,9,k}(\pi,s)=w_k\cdot R_5\cdot e^{a\sum\limits_{k=1}^{5}w_k\pi s}\cdot\left(\int\limits_0^{\pi}\ldots\right)_{akk},k=2,3,4,5; \tag{32}$$

$$R_{2,3,\ldots,6,9,k}(\pi,s)=w_{k+1}\cdot R_5\cdot z^{P_5}\cdot e^{a\sum\limits_{k=2}^{6}w_k\pi s}\cdot\left(\int\limits_0^{\pi}\ldots\right)_{a,k+1,k+1},k=1,2,3,4; \tag{33}$$

$$R_{2,3,\ldots,6,9,5}(\pi,s)=-w_1\cdot R_5\cdot e^{a\sum\limits_{k=1}^{5}w_k\pi s}\cdot\left(\int\limits_0^{\pi}\ldots\right)_{a,6,1}+w_6\cdot R_5\cdot z^{P_5}\cdot e^{a\sum\limits_{k=2}^{6}w_k\pi s}\cdot\left(\int\limits_0^{\pi}\ldots\right)_{a,6,6}. \tag{34}$$

Заметим, что в формулах (31)–(34) имеем:

$$\left(\int\limits_0^{\pi}\ldots\right)_{a11}=\left(\int\limits_0^{\pi}\ldots\right)_{a22}=\left(\int\limits_0^{\pi}\ldots\right)_{akk}=\int\limits_0^{\pi}q(t)dt_{a11},k=1,2,\ldots,10. \tag{35}$$

Подставляя формулы (31)–(35) в уравнение (29), поделим на $e^{a\sum\limits_{k=2}^{6}w_k\pi s}$, преобразуем его к следующему более удобному для изучения виду:

$$g_1(s)=\left[e^{a(w_1-w_6)s\pi}-z^{M_5}\cdot z^{P_5}\right]-\frac{1}{10a^9s^9}\cdot\left\{\left[\left(\int\limits_0^{\pi}\ldots\right)_{a11}\cdot e^{a(w_1-w_6)s\pi}\cdot\sum_{k=1}^{5}w_k-z^{M_5}\cdot z^{P_5}\cdot\left(\int\limits_0^{\pi}\ldots\right)_{a22}\cdot\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdot\sum_{k=2}^{6}w_k\right]+\left[w_1\cdot z^{M_5}\cdot\left(\int\limits_0^{\pi}\ldots\right)_{a,6,1}\cdot e^{a(w_1-w_6)s\pi}-w_6\cdot z^{P_5}\cdot\left(\int\limits_0^{\pi}\ldots\right)_{a,1,6}\right]\right\}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{18}}\right)=0. \tag{36}$$

Основное приближение уравнения (36) имеет вид:

$$e^{a(w_1-w_6)s\pi}=z^{M_5}\cdot z^{P_5}=e^{2\pi ik}\cdot e^{\frac{2\pi i}{10}M_5}\cdot e^{\frac{2\pi i}{10}P_5}\Leftrightarrow s_{k,1,осн}=\frac{2i\widetilde{k}}{a(w_1-w_6)},\widetilde{k}=k+\frac{M_5}{10}+\frac{P_5}{10},k\in N, \tag{37}$$

«осн» означает основное приближение, индекс 1 у величин $s_{k,1,осн}$ означает, что мы изучаем сектор T_1 индикаторной диаграммы (рис. 2).

Из общей теории (см.: [4; 15]) следует методика нахождения асимптотики корней квазиполиномов вида (36).

Теорема 4. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)–(2)–(3) в секторе T_1 индикаторной диаграммы (рис. 2) имеет следующий вид:

$$s_{k,1}=\frac{2i}{a(w_1-w_6)}\cdot\left[\widetilde{k}+\frac{d_{9,k,1}}{\widetilde{k}^9}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^{18}}\right)\right],\widetilde{k}=k+\frac{M_5}{10}+\frac{P_5}{10},k\in N;M_5=\sum_{k=1}^{5}m_k;P_5=\sum_{k=1}^{5}n_k. \tag{38}$$

Вид асимптотики (38) показывает, что у оператора (1)–(2)–(3) невозможен эффект «расщепления» собственных значений, изученный автором в работе [9].

Для доказательства теоремы 4 необходимо доказать, что в формуле (38) коэффициенты $d_{9,k,1}$ находятся единственным образом и привести явные формулы для их вычисления.

Применяя формулы Маклорена, имеем:

$$e^{a(w_1-w_6)\pi s}\Big|_{s_{k,1}} \overset{(41)}{=} \exp\left[a(w_1-w_6)\pi s\cdot\frac{2i}{a(w_1-w_6)}\cdot\left[\tilde{k}+\frac{d_{9,k,1}}{\tilde{k}^9}+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{18}}\right)\right]\right]=z^{M_5}\cdot z^{P_5}\cdot$$
$$\cdot\left[1+\frac{2\pi i\cdot d_{9,k,1}}{\tilde{k}^9}+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{18}}\right)\right]. \tag{39}$$

Подставляя формулы (39) и (38) в уравнение (36), получаем:

$$\left[z^{M_5}\cdot z^{P_5}+2\pi i\cdot z^{M_5}\cdot z^{P_5}\cdot\frac{2\pi i\cdot d_{9,k,1}}{\tilde{k}^9}+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{18}}\right)-z^{M_5}\cdot z^{P_5}\right]-\frac{1}{10a^9}\cdot\frac{a^9(w_1-w_6)^9 i}{2^9 i^9 i}\cdot$$
$$\cdot\frac{1}{\tilde{k}^9}\left(1+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{18}}\right)\right)\cdot\left\{\left[z^{M_5}\cdot z^{P_5}\left(1+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{18}}\right)\right)\left(\int_0^\pi\ldots\right)_{a11}\cdot\sum_{n=1}^{5}w_n-z^{M_5}\cdot z^{P_5}\left(\int_0^\pi\ldots\right)_{a22}\cdot\sum_{n=2}^{6}w_n\right]+\right.$$
$$\left.+\left[w_1\cdot z^{M_5}\cdot z^{M_5}\cdot z^{P_5}\left(\int_0^\pi\ldots\right)_{a,6,1}\Bigg|_{s_{k,1}}-w_6\cdot z^{M_5}\cdot z^{-M_5}\cdot z^{P_5}\left(\int_0^\pi\ldots\right)_{a,1,6}\right]\right\}+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{18}}\right).$$

Приравнивая в этой формуле коэффициенты при $\frac{1}{\tilde{k}^9}$, находим:

$$d_{9,k,1}=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{(w_1-w_6)^9}{10\cdot 2^9}\cdot\left\{\left[\sum_{n=1}^{5}w_n\cdot\left(\int_0^\pi\ldots\right)_{a11}-\sum_{n=2}^{6}w_n\cdot\left(\int_0^\pi\ldots\right)_{a22}\right]_1+\left[w_1\cdot z^{M_5}\cdot\left(\int_0^\pi\ldots\right)_{a,6,1}\Bigg|_{s_{k,1,осн}}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-w_6\cdot z^{-M_5}\cdot\left(\int_0^\pi\ldots\right)_{a,1,6}\Bigg|_{s_{k,1,осн}}\right]_2\right\}. \tag{40}$$

В силу формулы (35) имеем:

$$\left[\sum_{n=1}^{5}w_n\cdot\left(\int_0^\pi\ldots\right)_{a11}-\sum_{n=2}^{6}w_n\cdot\left(\int_0^\pi\ldots\right)_{a22}\right]_1=(w_1-w_6)\cdot\int_0^\pi q(t)dt. \tag{41}$$

Для скобки $[\ldots]_2$ из (40) в силу формул (31), (37) и (4) $\left(w_1\overset{(4)}{=}1, w_6\overset{(4)}{=}-1\right)$ получаем:

$$[\ldots]_2=\left[z^{M_5}\left(\int_0^\pi\ldots\right)_{a,6,1}\Bigg|_{s_{k,1,осн}}+z^{-M_5}\left(\int_0^\pi\ldots\right)_{a,1,6}\Bigg|_{s_{k,1,осн}}\right]_2=e^{\frac{2\pi i}{10}M_5}\int_0^\pi q(t)\exp\left[a(w_6-w_1)\cdot t\cdot\frac{2i\tilde{k}}{a(w_6-w_1)}\right]\cdot$$
$$\cdot dt_{a,6,1}\Big|_{s_{k,1,осн}}+e^{-\frac{2\pi i}{10}M_5}\int_0^\pi q(t)\exp(2i\tilde{k}t)dt_{a,1,6}\Bigg|_{s_{k,1,осн}}=2\int_0^\pi q(t)\cos\left[2\tilde{k}t-\frac{2\pi}{10}M_5\right]dt. \tag{42}$$

Подставляя формулы (41) и (42) в (40), сделаем необходимые преобразования, получим:

$$d_{9,k,1} = \frac{1}{10\pi}\cdot\left\{\int_0^{\pi} q(t)dt_{a11} + \int_0^{\pi} q(t)\cos\left[2\tilde{k}t - \frac{\pi M_5}{5}\right]dt\right\}, \tilde{k} = k + \frac{M_5 + P_5}{10}; k \in N; M_5 = \sum_{n=1}^{5} m_n; P_5 = \sum_{n=1}^{5} n_k \cdot \quad (43)$$

Формула (43) показывает, что коэффициенты $d_{9,k,1}$ формулы (38) найдены единственным образом, тем самым теорема 4 доказана.

Аналогичным образом изучаются секторы $T_2, T_3, ..., T_{10}$ индикаторной диаграммы (рис. 2). В результате получаем следующее утверждение.

Теорема 5. А) Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)–(2)–(3) в секторе T_2 индикаторной диаграммы (рис. 2) имеет следующий вид:

$$s_{k,2} = \frac{2i}{a(w_2 - w_7)}\cdot\left[\tilde{k} + \frac{d_{9,k,2}}{\tilde{k}^9} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{18}}\right)\right], \tilde{k} = k + \frac{M_5 + P_5}{10}; k \in N; \quad (44)$$

$$d_{9,k,2} = \frac{1}{10\pi}\cdot\left\{\int_0^{\pi} q(t)dt + \int_0^{\pi} q(t)\cos\left[2\tilde{k}t - \frac{\pi M_5}{5}\right]dt\right\}, k \in N, \quad (45)$$

тем самым справедлива формула $s_{k,2} \overset{(41)}{=} s_{k,1}\cdot e^{\frac{2\pi i}{10}}, k \in N \cdot$

Б) В секторах $T_3, T_4, ..., T_{10}$ для асимптотики собственных значений дифференциального оператора (1)–(2) с условием (3) суммируемости потенциала $q(x)$ справедливы следующие формулы:

$$s_{k,3} = s_{k,2}\cdot e^{\frac{2\pi i}{10}} = s_{k,1}\cdot e^{\frac{4\pi i}{10}}; s_{k,4} = s_{k,3}\cdot e^{\frac{2\pi i}{10}} = s_{k,1}\cdot e^{\frac{6\pi i}{10}}; ...; s_{k,m} = s_{k,1}\cdot e^{\frac{2(m-1)\pi i}{10}}; k \in N, m = 1,2,...,10. \quad (46)$$

В) При этом имеем: $\lambda_{k,m} = (s_{k,m})^{10}, k \in N, m = 1,2,3,...,10.$ (47)

Формулы (38), (43)–(47) позволяют вычислить асимптотику собственных функций дифференциального оператора (1)–(2)–(3).

Теорема 6. Асимптотика собственных функций дифференциального оператора (1)–(2)–(3) может быть получена по следующей формуле:

$$y_n(x; s_{k,m}) = \begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & \ldots & w_9^{m_1} & w_{10}^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & \ldots & w_9^{m_2} & w_{10}^{m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_1^{m_5} & w_2^{m_5} & \ldots & w_9^{m_5} & w_{10}^{m_5} \\ y_1^{(n_1)}(\pi,s) & y_2^{(n_1)}(\pi,s) & \ldots & y_9^{(n_1)}(\pi,s) & y_{10}^{(n_1)}(\pi,s) \\ y_1^{(n_2)}(\pi,s) & y_2^{(n_2)}(\pi,s) & \ldots & y_9^{(n_2)}(\pi,s) & y_{10}^{(n_2)}(\pi,s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n_4)}(\pi,s) & y_2^{(n_4)}(\pi,s) & \ldots & y_9^{(n_4)}(\pi,s) & y_{10}^{(n_4)}(\pi,s) \\ y_1^{(n_5)}(x,s) & y_2^{(n_5)}(x,s) & \ldots & y_9^{(n_5)}(x,s) & y_{10}^{(n_5)}(x,s) \end{vmatrix},$$

где вместо s подставляются $s_{k,m}$ из формул (38), (43), (46) для соответствующего сектора индикаторной диаграммы (рис. 2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман, Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Л. Кук. – М. : Мир, 1967. – 548 с.

2. Винокуров, В. А. Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма – Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом / В. А. Винокуров, В. А. Садовничий // Дифференциальные уравнения. – 1998. – Т. 34, № 10. – С. 1423–1426.

3. Ильин, В. А. О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора / В. А. Ильин // Математические заметки. – 1977. – Т. 22, № 5. – С. 698–723.

4. Лидский, В. Б. Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций / В. Б. Лидский, В. А. Садовничий // Математический сборник. – 1968. – Т. 75 (117), № 4. – С. 558–566.

5. Лундина, Д. Ш. Точная зависимость между асимптотическими разложениями собственных значений краевых задач Штурма – Лиувилля и гладкостью потенциала / Д. Ш. Лундина // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1982. – № 37. – С. 74–101.

6. Марченко, В. А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения / В. А. Марченко. – Киев : Наукова думка, 1977. – 329 с.

7. Митрохин, С. И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемыми коэффициентами / С. И. Митрохин // Вестник Московского университета. Серия: Математика, механика. – 2009. – № 3. – С. 14–17.

8. Митрохин, С. И. О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией / С. И. Митрохин // Доклады РАН. – 1997. – Т. 356, № 1. – С. 13–15.

9. Митрохин, С. И. О «расщеплении» кратных в главном собственных значений краевых задач / С. И. Митрохин // Известия ВУЗов. Серия: Математика. – 1997. – № 3 (418). – С. 38–43.

10. Митрохин, С. И. О спектральных свойствах дифференциальных операторов нечетного порядка с суммируемым потенциалом / С. И. Митрохин // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, № 2. – С. 1808–1811.

11. Митрохин, С. И. О спектральных свойствах одного дифференциального оператора с суммируемыми коэффициентами с запаздывающим аргументом / С. И. Митрохин // Уфимский математический журнал. – 2011. – Т. 3, № 4. – С. 95–115.

12. Митрохин, С. И. О формулах регуляризованных следов для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами / С. И. Митрохин // Вестник МГУ. Серия: Математика, механика. – 1986. – № 6. – С. 3–6.

13. Митрохин, С. И. О формулах следов для одной краевой задачи с функционально-дифференциальным уравнением с разрывным коэффициентом / С. И. Митрохин // Дифференциальные уравнения. – 1986. – Т. 22, № 6. – С. 927–931.

14. Наймарк, М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. – М. : Наука, 1969. – 528 с.

15. Садовничий, В. А. О регуляризованных суммах корней целой функции одного класса / В. А. Садовничий, В. А. Любишкин, Ю. Белабасси // Доклады АН СССР. – 1980. – Т. 254, № 6. – С. 1346–1348.

16. Садовничий, В. А. О следах обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков / В. А. Садовничий // Математический сборник. – 1967. – Т. 72 (114), № 2. – С. 293–317.

17. Gottlieb, H. P. W. Iso-spectral operators: some model examples with discontinuous coefficients / H. P. W. Gottlieb // Journal of Math. Anal. and Appl. – 1988. – Vol. 132. – P. 123–137.

18. Hald, O. H. Discontinuous inverse eigenvalue problems / O. H. Hald // Communs Pure and Appl. Math. – 1984. – Vol. 37. – P. 539–577.

REFERENCES

1. Bellman R., Cooke K.L. *Differentsialno-raznostnye uravneniya* [Differential-Difference Equations]. Moscow, Mir Publ., 1967. 548 p.

2. Vinokurov V.A., Sadovnichiy V.A. Asimptotika lyubogo poryadka sobstvennykh znacheniy i sobstvennykh funktsiy kraevoy zadachi Shturma – Liuvillya na otrezke s summiruemym potentsialom [Asymptotics of Any Order for Eigenvalues and Eigenfunctions of the Boundary Value of Sturm-Liouville Problem on a Segment with Summable Potential]. *Differentsialnye uravneniya* [Differential Equations], 1998, vol. 34, no. 10, pp. 1423-1426.

3. Ilyin V.A. O skhodimosti razlozheniy po sobstvennym funktsiyam v tochkakh razryva koeffitsientov differentsialnogo operatora [About the Convergence of Eigenfunction Expansions at Discontinuity Points of Differential Operator's Coefficients]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 1977, vol. 22, no. 5, pp. 698-723.

4. Lidskiy V.B., Sadovnichiy V.A. Asimptoticheskie formuly dlya korney odnogo klassa tselykh funktsiy [Asymptotic Formulas for the Roots of One Class of Entire Functions]. *Matematicheskiy sbornik* [Mathematical Collection], 1968, vol. 75 (117), no. 4, pp. 558-566.

5. Lundina D.Sh. Tochnaya zavisimost mezhdu asimptoticheskimi razlozheniyami sobstvennykh znacheniy kraevykh zadach Shturma – Liuvillya i gladkostyu potentsiala [Exact Relationship between the Asymptotic Expansions of the Eigenvalues of Boundary Value Problems of the Sturm-Liouville Problem and the Smoothness of Potential]. *Teoriya funktsiy, funktsionalnyy analiz i ikh prilozheniya* [The Theory of Functions, Functional Analysis and Their Applications], 1982, iss. 37, pp. 74-101.

6. Marchenko V.A. *Operatory Shturma – Liuvillya i ikh prilozheniya* [Sturm-Liouville Operators and Their Applications]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1977. 329 p.

7. Mitrokhin S.I. Asimptotika sobstvennykh znacheniy differentsialnogo operatora chetvertogo poryadka s summiruemymi koeffitsientami [Asymptotics of the Eigenvalues of the Differential Operator of the Fourth Order with Summable Coefficients]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya: Matematika, mehanika*, 2009, no. 3, pp. 14-17.

8. Mitrokhin S.I. O nekotorykh spektralnykh svoystvakh differentsialnykh operatorov vtorogo poryadka s razryvnoy vesovoy funktsiey [About Some Spectral Properties of Differential Operators of the Second Order with Discontinuous Weight Function]. *Doklady RAN* [Reports of the Russian Academy of Sciences], 1997, vol. 356, no. 1, pp. 13-15.

9. Mitrokhin S.I. O «rasshcheplenii» kratnykh v glavnom sobstvennykh znacheniy kraevykh zadach [About “Splitting” in the Main Multiple Eigenvalues of Boundary Value Problems]. *Izvestiya vuzov. Seriya: Matematika* [Proceedings of the Universities. Series: Mathematics], 1997, iss. 3 (418), pp. 38-43.

10. Mitrokhin S.I. O spektralnykh svoystvakh differentsialnykh operatorov nechyetnogo poryadka s summiruemym potentsialom [About Spectral Properties of Differential Operators of Odd Order with Summable Potential]. *Differentsialnye uravneniya* [Differential Equations], 2011, vol. 47, no. 2, pp. 1808-1811.

11. Mitrokhin S.I. O spektralnykh svoystvakh odnogo differentsialnogo operatora s summiruemymi koeffitsientami s zapazdyvayushchim argumentom [About Spectral Properties of One Differential Operator with Summable Coefficients with a Retarded Argument]. *Ufimskiy matematicheskiy zhurnal* [Ufa Mathematical Journal], 2011, vol. 3, no. 4, pp. 95-115.

12. Mitrokhin S.I. O formulakh regulyarizovannykh sledov dlya differentsialnykh operatorov vtorogo poryadka s razryvnymi koeffitsientami [About Formulas of Regularized Traces for Differential Operators of the Second Order with Discontinuous Coefficients]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya: Matematika, mekhanika*, 1986, no. 6, pp. 3-6.

13. Mitrokhin S.I. O formulakh sledov dlya odnoy kraevoy zadachi s funktsionalno-differentsialnym uravneniem s razryvnym koeffitsientom [About the Formulas of Traces for a Boundary Value Problem with Functional Differential Equation with a Discontinuous Coefficient]. *Differentsialnye uravneniya* [Differential Equations], 1986, vol. 22, no. 6, pp. 927-931.

14. Naimark M.A. *Lineynye differentsialnye operatory* [Linear Differential Operators]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 528 p.

15. Sadovnichiy V.A., Lyubishkin V.A., Belabassi Yu. O regulyarizovannykh summakh korney tseloy funktsii odnogo klassa [About Regularized Sums of the Roots of the Entire Function of One Class]. *Doklady AN SSSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR], 1980, vol. 254, no. 6, pp. 1346-1348.

16. Sadovnichiy V.A. O sledakh obyknovennykh differentsialnykh operatorov vysshikh poryadkov [On the Traces of Ordinary Differential Operators of Higher Orders]. *Matematicheskiy sbornik* [Mathematical Collection], 1967, vol. 72 (114), no. 2, pp. 293-317.

17. Gottlieb H.P.W. Iso-spectral operators: some model examples with discontinuous coefficients. *Journal of Math. Anal. and Appl.*, 1988, vol. 132, pp. 123-137.

18. Hald O.H. Discontinuous inverse eigenvalue problems. *Communs Pure and Appl. Math.*, 1984, vol. 37, pp. 539-577.

ABOUT THE SPECTRAL PROPERTIES OF THE FAMILY OF THE DIFFERENTIAL OPERATOR OF EVEN ORDER WITH SUMMABLE POTENTIAL

Sergey Ivanovich Mitrokhin
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Professor of Russian Academy of Natural Science,
Senior Researcher, Research Computing Center of Lomonosov
Moscow State University mitrokhin-sergey@yandex.ru
Leninskie gory St., 1, bld. 4, 119992 Moscow, Russian Federation

Abstract. The article is devoted to investigating the method for studying the spectral properties of differential operators of high even order with summable potential. The asymptotic behavior of the solutions of the corresponding differential equation has been found for large values of the spectral parameter. The boundary conditions have been studied, and the equation for eigenvalues of the operator under investigation has been formulated. The indicator diagram of this equation has been studied. The asymptotic behavior of eigenvalues of the studied operator has been found.

Key words: differential operator, spectral parameter, boundary conditions, indicator diagram, asymptotics of eigenvalues.