УДК 517.518.1
ББК 22.161.6

ОЦЕНКИ ПОСТОЯННОЙ В НЕРАВЕНСТВЕ СОБОЛЕВА [1]

Е.Г. Григорьева

В работе приводятся некоторые оценки финслеровой метрики. Полученные оценки используются для исследования постоянной в неравенстве Соболева.

Ключевые слова: *финслерова метрика, постоянная Соболева, теория потенциалов, якобиан отображения, асимптотические оценки метрики.*

1. Оценки метрики

Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^n$ задана непрерывная, неотрицательная функция $\Phi(x,\xi)$, удовлетворяющая условиям:

1) $\forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ \ \lambda > 0$ выполнено $\Phi(x,\lambda\xi) = \lambda\Phi(x,\xi)$;
2) $\Phi(x,\xi)$ выпукла по переменной ξ;
3) $\forall x \in D$ множества $\Xi(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^n :\ \Phi(x,\xi) \le 1\}$ локально равномерно ограничены.

Определим функцию $H(x,\eta)$ как двойственную к $\Phi(x,\xi)$ по формуле

$$H(x,\eta) = \sup_{\xi\in\Xi(x)} \langle \xi,\eta\rangle = \sup_{\xi\neq 0} \frac{\langle \xi,\eta\rangle}{\Phi(x,\xi)}.$$

Ясно, что функция $H(x,\eta)$ является однородной степени 1 по переменной η. Введем расстояние $d(x,y)$, полагая

$$d(x,y) = \inf_{\gamma} \int\limits_{\gamma} H(x,dx), \qquad \forall x,y \in D,$$

где точная нижняя грань берется по всем локально спрямляемым кривым $\gamma \in D$, соединяющим точки x, y.

В общем случае получение асимптотических оценок метрики $d(x,y)$ является непростой задачей, и в настоящей заметке мы ограничимся рассмотрением случая, когда функция $\Phi(x,\xi)$ имеет вид

$$\Phi(x,\xi) = \varphi(x)g(\xi), \tag{1}$$

при этом будем считать, что функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to (0,+\infty)$, а $g(\xi)$ — выпуклая, положительно-однородная степени 1 функция, и пусть

$$\varphi^{+}(r) = \max_{|z|\le r} \varphi(z), \tag{2}$$

$$\varphi^{-}(r) = \min_{|z|\le r} \varphi(z). \tag{3}$$

Согласно данному ограничению, получаем, что

$$H(x,\eta)=\frac{1}{\varphi(x)}\sup_{\xi\neq 0}\frac{\langle\xi,\eta\rangle}{g(\xi)}=\frac{h(\eta)}{\varphi(x)}.$$

Тогда финслерово расстояние (см. [3]) между точками x,y равно

$$d(x,y)=\inf_{\gamma}\int\limits_{\gamma}H(x,dx)=\inf_{\gamma}\int\limits_{0}^{1}\frac{h(\dot{x}(t))}{\varphi(x(t))}dt,$$

где γ задана параметрически вектор-функцией $x(t)$ такой, что $t\in[0,1]$, $x(0)=x$, $x(1)=y$. Получим сначала оценку расстояния сверху. Учитывая, что $h(\eta)\leq\sup\limits_{\xi\neq 0}\frac{|\xi|}{g(\xi)}|\eta|$, будем иметь

$$d(x,y)\leq\sup_{\xi\neq 0}\frac{|\xi|}{g(\xi)}\inf_{\gamma}\int\limits_{0}^{1}\frac{|\dot{x}(t)|}{\varphi(x(t))}dt.$$

Тогда, обозначая

$$g_0=\sup_{\xi\neq 0}\frac{|\xi|}{g(\xi)},$$

получаем

$$d(x,y)\leq g_0\inf_{\gamma}\int\limits_{0}^{1}\frac{|\dot{x}(t)|}{\varphi^{-}(|x(t)|)}dt.$$

Выбирая в качестве γ отрезок, соединяющий точки x,y, после преобразований будем иметь

$$d(x,y)\leq g_0\frac{|x-y|}{|y|-|x|}\int\limits_{|x|}^{|y|}\frac{d\tau}{\varphi^{-}(\tau)}.$$

Рассмотрим оценку метрики снизу. Учитывая, что

$$h(\eta)\geq\frac{|\eta|^2}{g(\eta)},$$

получаем

$$d(x,y)\geq\inf_{\gamma}\int\limits_{\gamma}\frac{1}{\varphi(x(t))}\frac{|\dot{x}(t)|^2}{g(\dot{x}(t))}dt\geq g_1\inf_{\gamma}\int\limits_{0}^{1}\frac{|\dot{x}(t)|}{\varphi^{+}(|x(t)|)}dt,$$

где

$$g_1=\inf_{\xi\neq 0}\frac{|\xi|}{g(\xi)}.$$

Теперь оценим интеграл

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{|\dot{x}(t)|}{\varphi^{+}(|x(t)|)}dt$$

снизу. Положим для $s>0$

$$\psi(s)=\frac{1}{s}\int\limits_{0}^{s}\frac{d\tau}{\varphi^{+}(\tau)}. \tag{4}$$

Тогда, как несложно проверить,

$$\left|\int_0^1 \frac{d}{dt}x(t)\psi(x(t))\right| \leq \int_0^1 \frac{|\dot{x}(t)|}{\varphi^+(|x(t)|)}dt.$$

Следовательно,

$$d(x,y) \geq g_1\left|x\psi(|x|) - y\psi(|y|)\right|.$$

Таким образом, окончательно получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Для финслеровой метрики $d(x,y)$, построенной по функции $\Phi(x,\xi)$ вида* (1)*, имеют место неравенства*

$$g_1\left|x\psi(|x|) - y\psi(|y|)\right| \leq d(x,y) \leq g_0\frac{|x-y|}{|y|-|x|}\int_{|x|}^{|y|}\frac{d\tau}{\varphi^-(\tau)},$$

где

$$g_0 = \sup_{\xi\neq 0}\frac{|\xi|}{g(\xi)}, \qquad g_1 = \inf_{\xi\neq 0}\frac{|\xi|}{g(\xi)},$$

и функции $\psi, \varphi^{\pm}$ определены в (4), (2), (3).

2. Применение к неравенству Соболева

Воспользуемся оценкой метрики для вычисления постоянной в неравенстве Соболева. Напомним, что неравенство Соболева доказано в предположении конечности следующей постоянной (см. [2]):

1) Пусть $x_0 \in D$ — произвольная точка и $B_R = B(x_0,R) = \{x \in D : d(x,x_0) < R\}$ — шар в метрике $d(x,y)$ с центром x_0 радиуса R. Предположим, что постоянная

$$C_1 = \sup_{x\in B_R}\sup_{\xi\in B(x,\epsilon)}\sup_{\epsilon>0}\frac{1}{\epsilon}\int_{B(x,\epsilon)}\frac{d\mu}{d^{n-1}(y,\xi)} < +\infty. \tag{1}$$

2) Для любой функции $u \in W^{1,1}(B_R)$ найдется измеримая локально ограниченная в D функция $C_2(x)$ такая, что

$$|u(x) - u_{B_R}| \leq \frac{C_2(x)}{|B_R|_\mu}\int_{B_R}\frac{\Phi(y,\nabla u(y))}{d^{n-1}(x,y)}d\mu. \tag{2}$$

Теорема 2. *Если справедливы предположения* (1) *и* (2)*, то для всех точек $x_0 \in D$, всех шаров $B_R = B(x_0,R) \subset D$ и для всех функций $u = u(x) \in W^{1,1}(B_R)$ справедливо неравенство*

$$\left[\int_{B_R}|u(x)-u_{B_R}|^{\frac{n}{n-1}}d\mu\right]^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{C_3}{|B_R|_\mu^{1-\frac{1}{n}}}\int_{B_R}\Phi(x,\nabla u(x))d\mu,$$

где

$$C_3 = \left[C_1\cdot 2^{1+n/(n-1)}\omega_{n-1}\sup_{x\in B_R}C_2(x)\right]^{\frac{n-1}{n}}.$$

Сложность оценки постоянной C_1 в наличии под интегралом финслерова расстояния и необходимости интегрировать по шару в финслеровой метрике.

Для оценки данной постоянной будем использовать полученную оценку для метрики. Имеем

$$\frac{1}{d^{n-1}(y,\xi)} \leq \left(\max_{\xi\neq 0}\frac{g(\xi)}{|\xi|}\right)^{n-1} \cdot \left|\frac{y}{|y|}\int\limits_0^{|y|}\frac{d\tau}{\varphi^+(\tau)} - \frac{\xi}{|\xi|}\int\limits_0^{|\xi|}\frac{d\tau}{\varphi^+(\tau)}\right|^{1-n}.$$

Заметим, что

$$B(x,\varepsilon) = \{y : d(x,y) < \varepsilon\} \subset B^*(x,\varepsilon/c^*) = \left\{y : \left|\frac{y}{|y|}\int\limits_0^{|y|}\frac{d\tau}{\varphi^+(\tau)} - \frac{x}{|x|}\int\limits_0^{|x|}\frac{d\tau}{\varphi^+(\tau)}\right| \leq \frac{\varepsilon}{c^*}\right\},$$

где $c^* = \left[\max_{\xi\neq 0}\frac{g(\xi)}{|\xi|}\right]$. Тогда

$$C_1 \leq c^* \sup_{x\in B_R}\sup_{\varepsilon>0}\sup_{\xi\in B(x,\varepsilon)}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{B^*(x,\varepsilon/c^*)}\frac{\sigma(y)dy}{\left|\frac{y}{|y|}\int\limits_0^{|y|}\frac{d\tau}{\varphi^+(\tau)} - \frac{\xi}{|\xi|}\int\limits_0^{|\xi|}\frac{d\tau}{\varphi^+(\tau)}\right|^{n-1}}.$$

Сделаем замену переменной в интеграле

$$z = \frac{y}{|y|}\int\limits_0^{|y|}\frac{d\tau}{\varphi^+(\tau)}.$$

Пусть $\Psi(\cdot)$ — функция, обратная к интегралу $\int\limits_0^{|y|}\frac{d\tau}{\varphi^+(\tau)}$. Тогда

$$\Psi(|z|) = |y|, y = \frac{z}{|z|}\Psi(|z|).$$

Найдем якобиан отображения

$$\det\left(\frac{\partial z_i}{\partial y_j}\right) = \frac{1}{|y|^n}\left(\int\limits_0^{|y|}\frac{d\tau}{\varphi^+(\tau)}\right)^n \det\left(\delta_{ij} - \frac{y_i y_j}{|y|^2} - \frac{y_i y_j}{|y|\varphi^+(|y|)}\left(\int\limits_0^{|y|}\frac{d\tau}{\varphi^+(\tau)}\right)^{-1}\right).$$

Поскольку

$$\det\left[\delta_{ij} - a_i b_j\right] = 1 - \sum_i a_i b_i,$$

то для якобиана отображения выполнено

$$J = \left(\frac{\partial z_i}{\partial y_j}\right) = \frac{1}{|y|^{n-1}}\left(\int\limits_0^{|y|}\frac{d\tau}{\varphi^+(\tau)}\right)^{n-1}\frac{1}{\varphi^+(|y|)}.$$

Обозначим

$$f(z) = \frac{\sigma\left(\frac{z\Psi(|z|)}{|z|}\right)}{|z|^{n-1}} \varphi^{+}(\Psi(|z|)) \cdot \Psi^{n-1}(|z|).$$

Оценка постоянной C_1 будет иметь следующий вид

$$C_1 \leq (c^{*})^{n-1} \sup_{x \in B_R} \sup_{\varepsilon>0} \sup_{\xi \in B(x,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{B^{*}(x,\varepsilon/c^{*})} \frac{f(z)dz}{|z-\xi^{*}|^{n-1}}.$$

Воспользуемся результатами из теории потенциалов (см.: [1, с. 156, лемма 7.12]) Для оператора

$$(V_{\mu}f)(x) = \int\limits_{D} |x-y|^{n(\mu-1)} f(y)dy, \mu \in (0,1],$$

если $0 \leq \delta = 1/p - 1/q < \mu$, тогда

$$||V_{\mu}f||_q \leq \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \omega_n^{1-\mu} |D|^{\mu-\delta} ||f||_p.$$

В нашем случае $\mu = 1/n, q = p = 1, \delta = 0$. Окончательно

$$||V_{1/n}f||_{\infty} = \int\limits_{B^{*}(x,\varepsilon/c^{*})} |z-\xi^{*}|^{1-n} f(z)dz \leq n\omega_n \frac{\varepsilon}{c^{*}} \int\limits_{B^{*}(x,\varepsilon)} |f(z)|dz.$$

Для постоянной C мы можем записать

$$C_1 \leq n\omega_n \left[\max_{\xi\neq 0} \frac{g(\xi)}{|\xi|}\right]^{n-1-\frac{1}{n}} \sup_{x\in B_R} \sup_{\varepsilon} \int\limits_{B^{*}(x,\varepsilon/c^{*})} \frac{\sigma(\frac{z}{|z|}\Psi(|z|))\Psi(|z|)^{n-1}\varphi^{+}(\Psi(|z|))}{|z|^{n-1}} dz.$$

В частном случае, для $\varphi^{+}(|x|) = |x|^{\alpha}$,

$$d(x,y) \geq \frac{1}{\max_{\xi\neq 0} \frac{g(\xi)}{|\xi|} \cdot [1+|1-\alpha|]} \left| y|y|^{-\alpha} - x|x|^{-\alpha} \right|,$$

для постоянной C_1

$$C_1 \leq \left[\max_{\xi\neq 0} \frac{g(\xi)}{|\xi|} \cdot [1+|1-\alpha|]\right]^{n-1-1/n} n\omega_n \sup_{x\in B_R} \sup_{\varepsilon} \int\limits_{|z-x^{*}|<\varepsilon/c^{*}} \frac{\sigma(z|z|^{\frac{\alpha}{1-\alpha}})dz}{|z|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}.$$

Если $\varphi^{-}(|x|) = |x|^{\beta}$, то

$$d(x,y) \leq \sup_{\xi\neq 0} \frac{|\xi|}{g(\xi)} \cdot \frac{|x-y|}{|x|-|y|} \left(|x|^{-\beta+1} - |y|^{-\beta+1}\right).$$

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 11-01-97021-р_поволжье_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными / Д. Гилбарг, Н. Трудингер. — М. : Наука, 1989. — 464 с.

2. Григорьева, Е. Г. Неравенство Соболева в финслеровой метрике. / Е. Г. Григорьева // Записки семинара «Сверхмедленные процессы». — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2008. — Вып. 3. — С. 60–63.

3. Рунд, Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств / Х. Рунд. — М. : Наука, 1981. — 504 с.

ESTIMATES OF SOBOLEV CONSTANT

E.G. Grigoryeva

We give some estimates constant of Sobolev inequality in Finsler metrics.

Key words: *Finsler metrics, Sobolev inequality, potential theory, Jacobian of mapping, asymptotic estimates of metric.*