



DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.2.6>

УДК 532.516: 532.542.2

ББК 22.253.3

ПРОДОЛЬНОЕ СДВИГОВОЕ ТЕЧЕНИЕ В КОЛЬЦЕВОМ ОРЕБРЕННОМ КАНАЛЕ С УСЛОВИЕМ СКОЛЬЖЕНИЯ НА ВНЕШНЕЙ ГРАНИЦЕ

Дмитрий Валерьевич Кривохижин

Студент кафедры фундаментальной информатики и оптимального управления,
Волгоградский государственный университет
kd8433@mail.ru, fiou@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Игорь Викторович Чернышев

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры
фундаментальной информатики и оптимального управления,
Волгоградский государственный университет
igor_chernyshev@mail.ru, chernyshev_iv@volsu.ru, fiou@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В приближении Стокса решена задача о ламинарном сдвиговом течении вязкой жидкости в кольцевом канале с оребренной наружной цилиндрической поверхностью при поступательном движении внутреннего цилиндра. Решение краевой задачи для продольной скорости потока в кольцевом секторе получено путем декомпозиции расчетной области с последующим представлением полей скорости в виде разложений по собственным функциям уравнения Лапласа. Ряды ограничивались конечным числом слагаемых, и коэффициенты находятся численно. Расчеты полей скорости выполнены при варьировании ширины канала, количества ребер и их высоты. Приведены оценки для макроскопической скорости скольжения на эффективной границе оребрения.

Ключевые слова: оребренный канал, сдвиговое течение, приближение Стокса, собственные функции, скорость скольжения, гидрофобные поверхности.

Введение

Течение жидкости в каналах с оребренными стенками встречается в разнообразных технических приложениях. Структурирование канала путем добавления искусственных ребер позволяет качественно влиять на форму потока, так как при достаточно плотном расположении ребер за счет капиллярного эффекта на границе канала между ребрами удается создать тонкую прослойку другой жидкости или газа, на которой реализуется граничное условие скольжения [5]. В такой ситуации можно говорить о том, что поверхность канала обладает свойством частичной макроскопической гидрофобности. Таким образом можно значительно снизить сопротивление при движении жидкости [4]. В работе [8] рассмотрена задача о сдвиговом течении Куэтта, вызванном движением гладкой плоскости над оребренной границей. В [3] решена задача о продоль-

ном течении в цилиндрическом оребренном канале за счет градиента давления. В настоящей работе исследуется продольное сдвиговое течение жидкости в кольцевом канале с бесконечно тонкими ребрами, вызванное поступательным движением внутренней цилиндрической границы.

1. Постановка задачи

Рассматривается кольцевой канал, образованный двумя концентрическими цилиндрами с радиусами r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$). На поверхности внешнего цилиндра в радиальных плоскостях равномерно расположены продольные ребра высотой h . Сдвиговое течение жидкости в канале реализуется за счет продольного движения со скоростью W внутреннего цилиндра. Считается, что на стенке по периметру внешнего цилиндра имеет место проскальзывание, что достигается либо путем специальной химической обработки поверхности, либо за счет того, что на внешней границе в полостях между ребрами находится прослойка другой жидкости или газа.

В цилиндрической системе координат (r, φ, z) ненулевой будет только компонента скорости $w(r, \varphi)$, направленная вдоль оси канала. При продольном ламинарном течении вязкой несжимаемой жидкости в неограниченном цилиндрическом канале система уравнений Стокса сводится к уравнению Лапласа относительно функции скорости $w(r, \varphi)$:

$$\Delta w(r, \varphi) \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = 0, \quad r_1 < r < r_2. \quad (1)$$

Так как ребра в канале располагаются симметрично и периодически, то можно рассматривать только область, равную половине сектора между двумя соседними ребрами, которая ограничена координатными линиями $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_0 = \pi/K$, где K – количество ребер в канале (см. рис. 1). Эту область разобьем на две подобласти: (I) при $r_1 \leq r \leq r_0$ и (II) при $r_0 \leq r \leq r_2$, где $r_0 = r_2 - h$ – расстояние от оси канала до вершины ребер.

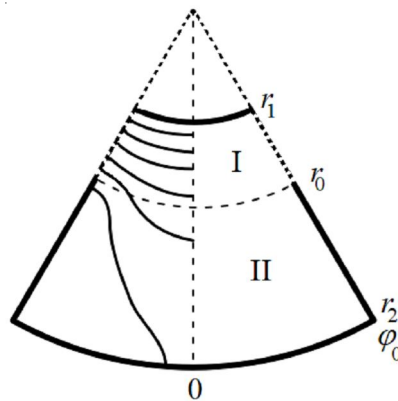


Рис. 1. Расчетная область и пример изолиний скорости

Для подобластей I и II имеем следующие граничные условия. На твердых ребрах и на поверхности движущегося внутреннего цилиндра ставятся условия прилипания:

$$\begin{aligned} w_1(r_1, \varphi) &= W, & 0 \leq \varphi \leq \varphi_0, \\ w_2(r, \varphi_0) &= 0, & r_0 \leq r \leq r_2. \end{aligned}$$

На внешнем периметре канала предполагается полное проскальзывание:

$$\frac{\partial w_2(r_2, \varphi)}{\partial r} = 0.$$

На границах сектора $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_0$ выполнены условия симметрии:

$$\frac{\partial w_1(r, 0)}{\partial \varphi} = 0, \quad r_1 \leq r \leq r_0, \quad \frac{\partial w_2(r, 0)}{\partial \varphi} = 0, \quad r_0 \leq r \leq r_2,$$

$$\frac{\partial w_1(r, \varphi_0)}{\partial \varphi} = 0, \quad r_1 \leq r \leq r_0.$$

На общей границе подобластей должны быть непрерывны скорость и касательное напряжение, что приводит к условиям согласования

$$w_1(r_0, \varphi) = w_2(r_0, \varphi), \quad \frac{\partial w_1(r_0, \varphi)}{\partial r} = \frac{\partial w_2(r_0, \varphi)}{\partial r}. \quad (2)$$

2. Поле продольной скорости

Применяя метод разделения переменных, общие решения краевых задач для уравнения (1) в рассматриваемых подобластях найдены в виде разложения по собственным функциям оператора Лапласа и имеют следующий вид:

$$w_1(r, \varphi) = (W - A_0) \frac{\ln r}{\ln r_1} + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(t_n \varphi) \left[-r_1^{-2t_n} r^{t_n} + r^{-t_n} \right], \quad (3)$$

$$w_2(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(p_n \varphi) \left[r^{p_n} + r_2^{2p_n} r^{-p_n} \right] \quad (4)$$

где собственные значения для соответствующих краевых задач равны

$$p_n = \frac{\pi(2n-1)}{2\varphi_0}, \quad t_n = \frac{\pi n}{\varphi_0}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Эти выражения удовлетворяют всем граничным условиям. Неизвестные коэффициенты A_n , B_n могут быть получены из условий согласования (2), однако сделать это полностью аналитически для бесконечных рядов невозможно. Для получения приближенного решения проведем ограничение количества слагаемых в рассматриваемых рядах числами N и M соответственно.

Интегрируя первое условие согласования по φ от 0 до φ_0 , получим следующее выражение:

$$A_0 \left(1 - \frac{\ln r_0}{\ln r_1} \right) + W \frac{\ln r_0}{\ln r_1} = \sum_{n=1}^M q_n B_n, \quad (5)$$

где

$$q_n = (r_0^{p_n} + r_0^{-p_n} r_2^{2p_n}) \frac{\sin(p_n \varphi_0)}{p_n \varphi_0}.$$

Умножив первое условие согласования на $\cos(p_n \varphi)$ и проинтегрировав от 0 до φ_0 , получим:

$$\frac{\varphi_0}{2} A_m k_m = \sum_{n=1}^M B_n s_n I_{mn}, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

где

$$s_n = (r_0^{p_n} + r_0^{-p_n} r_2^{2p_n}), \quad k_m = -r_1^{-2t_m} r_0^{t_m} + r_0^{-t_m}, \quad I_{mn} = \frac{\sin(p_n - t_m)}{2(p_n - t_m)} + \frac{\sin(p_n + t_m)}{2(p_n + t_m)}.$$

Аналогично, умножив второе условие согласования на $\cos(t_n \varphi)$ и проинтегрировав на том же отрезке, получим:

$$(W - A_0)T_m + \sum_{n=1}^N A_n R_n I_{nm} = \frac{\Phi_0}{2} B_m Q_m, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (7)$$

где

$$T_m = \frac{\sin(p_m \Phi_0)}{p_m r_0 \ln r_1}, \quad R_n = -t_n (r_1^{-2t_n} r_0^{t_n-1} + r_0^{-t_n-1}), \quad Q_m = p_m (r_0^{p_m-1} - r_0^{-p_m-1} r_2^{2p_m}).$$

Система (5)–(7) из $N + M + 1$ линейных уравнений дает приближенные значения для коэффициентов A_n ($n = 1, 2, \dots, N$) и B_n ($n = 1, 2, \dots, M$). Формулы (3), (4) с найденными коэффициентами определяют приближенно поле скорости потока в подобластях I и II, согласованные по общей границе.

3. Численные расчеты и результаты

В работе проведены расчеты поля скорости (3), (4) в широком диапазоне изменения параметров, варьировались значения радиуса внутреннего цилиндра, количество ребер в канале и их высота. Во всех расчетах обезразмеривание проводится на радиус внешнего цилиндра, то есть далее $r_2 = 1$. Численное решение системы (5)–(7) и визуализация результатов были реализованы на языке Python с использованием библиотек NumPy и Matplotlib. Для достижения хорошей точности расчетов в рядах (3), (4) достаточно брать более 10 членов ($N, M > 10$).

На рисунках 2 и 3 представлены примеры картин изолиний скорости в канале для случаев малого и большого количества ребер при двух значениях высоты ребер.

В силу условия полного скольжения на поверхности внешнего цилиндра, значительный расход жидкости имеет место не только в области внутреннего цилиндра, но и на периферии кольцевого канала, в зазорах между ребрами.

Как видно из рисунков, в случае большого количества ребер, картина напоминает течение в некотором более узком канале с некоторым эффективным внешним радиусом, меньшим чем r_2 . С точки зрения снижения сопротивления идеальной ситуацией является абсолютное проскальзывание на границе канала и полное отсутствие ребер, на которых имеет место условие прилипания. Однако технически данная конфигурация является недостижимой, так как в этом случае прослойка жидкости или газа будет вымываться с поверхности. Количество и высоту ребер необходимо выбирать из соображений устойчивости слоя смазки и его молекулярного сцепления со стенкой канала.

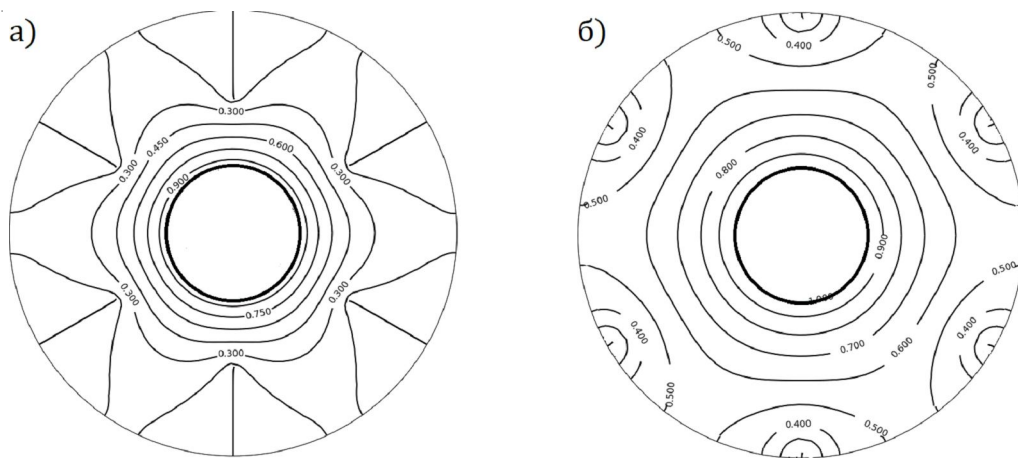


Рис. 2. Изолинии скорости в канале (6 ребер, $r_1 = 0,3$):

а) $r_0 = 0,6$; б) $r_0 = 0,97$

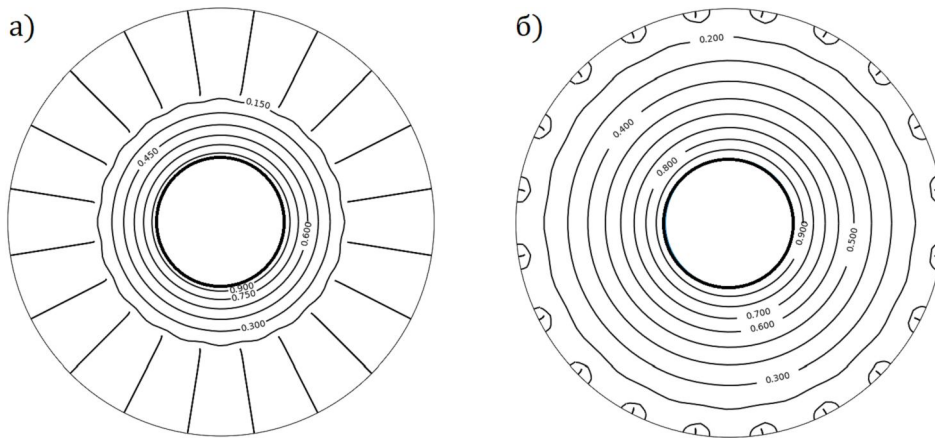


Рис. 3. Изолинии скорости в канале (20 ребер, $r_1 = 0,3$):

а) $r_0 = 0,6$; б) $r_0 = 0,97$

Распределение скорости жидкости для нескольких радиальных сечений канала показано на рисунке 4. При небольшом количестве ребер профили скорости при различных φ отличаются существенно (рис. 4а). Однако по мере увеличения количества ребер в канале это различие уменьшается, а при $K > 20$ зависимости становятся практически идентичными, различаясь только в окрестности кольцевой зоны $r = r_0$ (рис. 4б).

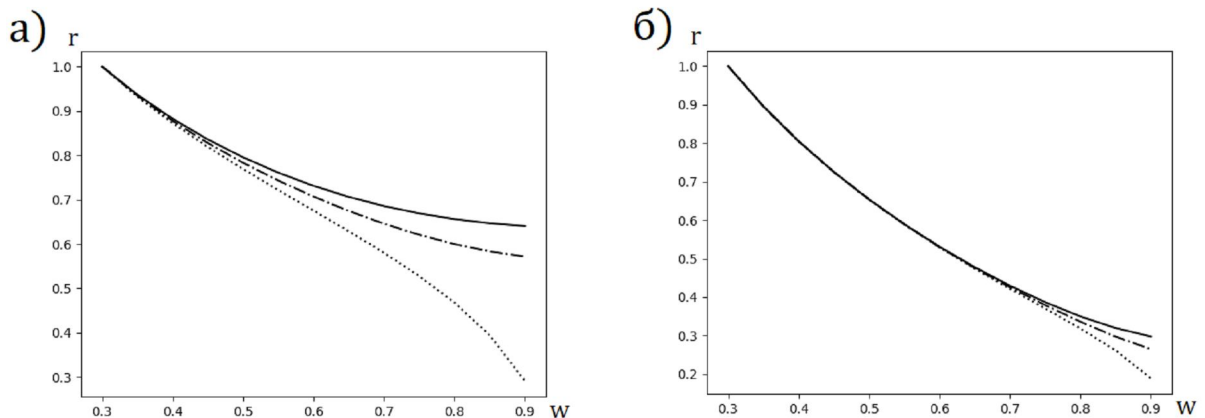


Рис. 4. Профиль скорости потока ($r_1 = 0,3$; $r_0 = 0,95$):

(—) — $\varphi = 0$; (---) — $\varphi = \varphi_0/2$; (.....) — $\varphi = \varphi_0$; а) $K = 4$; б) $K = 10$

Эффект частичной макроscopicкой гидрофобности границы достигается путем текстурирования обтекаемой поверхности. Такая ситуация может моделироваться большим количеством коротких ребер на внешней цилиндрической границе канала. Макроскопической скоростью скольжения w_s будет среднее значение продольной скорости на уровне вершин ребер, эту поверхность можно условно считать эффективной границей канала с текстурированной поверхностью

$$w_s = \langle w(r_0, \varphi) \rangle = \frac{1}{\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} w(r_0, \varphi) d\varphi.$$

Зависимость скорости скольжения w_s от количества ребер K при различной высоте ребер представлена на рисунке 5.

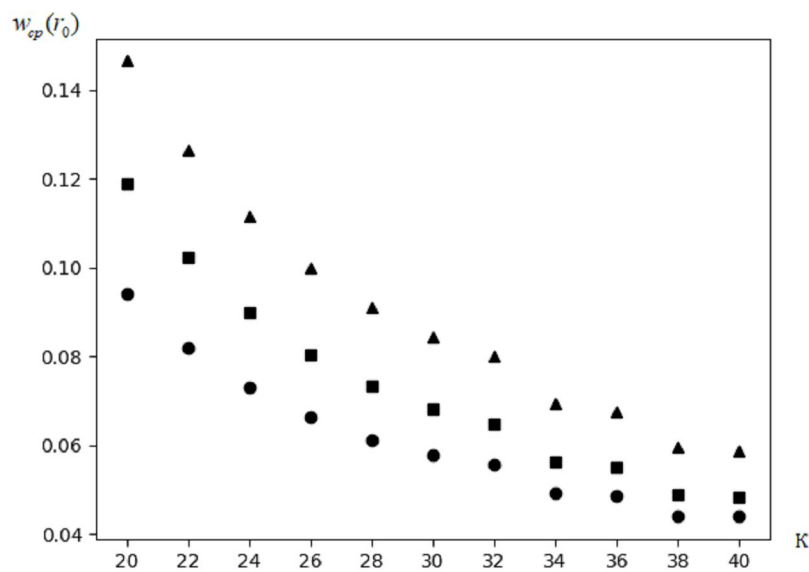


Рис. 5. Зависимость скорости скольжения от количества ребер в канале:

(▲) – $r_0 = 0,97$; (■) – $r_0 = 0,95$; (●) – $r_0 = 0,9$

Заключение

Получено решение задачи о ламинарном сдвиговом течении вязкой несжимаемой в орбренном кольцевом канале, на внешней границе которого имеет место условие проскальзывания. Полученные разложения по собственным функциям дают хорошую аппроксимацию для поля продольной скорости в каналах с различным количеством ребер и их высотой. Результаты задачи могут быть использованы для моделирования эффекта макроскопической гидрофобности на текстурированной или пористой границе, как это делалось в работах [1; 2; 6; 7]. Усредненное на уровне края ребер значение продольной скорости является хорошим приближением для скорости скольжения на границе «жидкость – текстурированная поверхность».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мосина, Е. В. Течение жидкости в окрестности пористой границы / Е. В. Мосина, И. В. Чернышев // Вестник Нижегородского университета им Н.И. Лобачевского. – 2011. – Вып. 4. – № 3. – С. 999–1001.
2. Мосина, Е. В. Течение жидкости в плоском канале над слоем регулярной пористой среды / Е. В. Мосина, И. В. Чернышев // Научный электронный архив Академии Естествознания. – Электрон. текстовые дан. – Режим доступа: <http://www.econf.rae.ru/article/8903> (дата обращения: 07.04.2018). – Загл. с экрана.
3. Мосина, Е. В. Фильтрационная модель продольного течения в цилиндрическом орбренном канале / Е. В. Мосина, И. В. Чернышев // ПМТФ. – 2012. – Т. 53. – № 3. – С. 48–55.
4. Chiu-On, Ng. On the effects of liquid-gas interfacial shear on slip flow through a parallel-plate channel with superhydrophobic grooved walls / Ng. Chiu-On, H. C. W. Chu, C. Y. Wang // Physics of Fluids. – 2010. – Vol. 22. – Article ID: 102002. – DOI: <https://doi.org/10.1063/1.3493641>.
5. Chiu-On, Ng. Stokes shear flow over a grating: Implications for superhydrophobic slip / Ng. Chiu-On, C. Y. Wang // Physics of Fluids. – 2009. – Vol. 21. – Article ID: 013602. – DOI: <https://doi.org/10.1063/1.3068384>.
6. James, D. F. Flow at the interface of a model fibrous porous medium / D. F. James, A. M. J. Davis // J. Fluid Mech. – 2001. – Vol. 426. – P. 47–72. – DOI: <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112000002160>.
7. Jeong, J. T. Slip boundary condition on an idealized porous wall / J. T. Jeong // Physics of Fluids. – 2001. – Vol. 13, № 7. – P. 1884–1890. – DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1373680>.
8. Wang, C. Y. The Stokes drag due to the sliding of a smooth plate over a finned plate / C. Y. Wang // Physics of Fluids. – 1994. – Vol. 6, № 7. – P. 2248–2252. – DOI: <https://doi.org/10.1063/1.868177>.

REFERENCES

1. Mosina E.V., Chernyshev I.V. Tehenie zhidkosti v okrestnosti poristoy granitsy [Fluid Flow near the Porous Boundary]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo*, 2011, iss. 4, no. 3, pp. 999-1001.
2. Mosina E.V., Chernyshev I.V. Tehenie zhidkosti v ploskom kanale nad sloem regularnoy poristoy sredi [Flow of Liquid in a Flat Channel over a Layer of Regular Porous Medium]. *Nauchnyy elektronnyy arkhiv Akademii Estestvoznania* [Scientific E-Archive of Natural Sciences Academy]. URL: <http://www.econf.rae.ru/article/8903> (accessed 7 April 2018).
3. Mosina E.V., Chernyshev I.V. Filtratsionnaya model prodolnogo techeniya v tsilindricheskom orebrennom kanale [Filtration Model of Longitudinal Flow in a Finned Cylindrical Channel]. *PMTF*, 2012, vol. 53, no. 3, pp. 48-55.
4. Chiu-On Ng., Chu H.C.W., Wang C.Y. On the effects of liquid-gas interfacial shear on slip flow through a parallel-plate channel with superhydrophobic grooved walls. *Physics of Fluids*, 2010, vol. 22. Article ID: 102002. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.3493641>.
5. Chiu-On Ng., Wang C.Y. Stokes shear flow over a grating: Implications for superhydrophobic slip. *Physics of Fluids*, 2009, vol. 21. Article ID: 013602. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.3068384>.
6. James D.F., Davis A.M.J. Flow at the interface of a model fibrous porous medium. *J. Fluid Mech.*, 2001, vol. 426, pp. 47-72. DOI: <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112000002160>.
7. Jeong J.T. Slip boundary condition on an idealized porous wall. *Physics of Fluids*, 2001, vol. 13, no. 7, pp. 1884-1890. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1373680>.
8. Wang C.Y. The Stokes drag due to the sliding of a smooth plate over a finned plate. *Physics of Fluids*, 1994, vol. 6, no. 7, pp. 2248-2252. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.868177>.

LONGITUDINAL SHEAR FLOW IN THE ANNULAR FINNED CHANNEL WITH SLIP CONDITION AT THE EXTERNAL BOUNDARY

Dmitriy Valeryevich Krivokhizhin

Student, Department of Fundamental Informatics and Optimal Control,
Volgograd State University
kd8433@mail.ru, fiou@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Igor Viktorovich Chernyshev

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Fundamental Informatics and Optimal Control,
Volgograd State University
igor_chernyshev@mail.ru, chernyshev_iv@volsu.ru, fiou@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. In the present study, in the Stokes approximation, we have solved the problem of the laminar shear flow of a viscous fluid in an annular channel with a finned external cylindrical surface for the translational motion of the inner cylinder. The solution of the boundary-value problem for the longitudinal velocity in the annular sector has been obtained by decomposition of the flow domain with subsequent representation of the velocity fields in the form of series expansions in eigenfunctions of the Laplace equation.

The velocity fields for the corresponding subdomains are:

$$w_1(r, \varphi) = (W - A_0) \frac{\ln r}{\ln r_1} + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(t_n \varphi) \left[-r_1^{-2t_n} r^{t_n} + r^{-t_n} \right],$$

$$w_2(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(p_n \varphi) \left[r^{p_n} + r_2^{2p_n} r^{-p_n} \right],$$

where

$$p_n = \frac{\pi(2n-1)}{2\varphi_0}, \quad t_n = \frac{\pi n}{\varphi_0}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

The unknown coefficients A_n , B_n can be obtained from the matching conditions on the subdomain boundary. To obtain an approximate solution, we restrict the number of terms in the series considered by the numbers N and M respectively. This mathematical model gives a good approximation for the longitudinal velocity field in channels with different number of fins and their height. The results can be used to simulate the effect of macroscopic hydrophobicity on a textured or porous boundary. The value of the longitudinal velocity, averaged at the level of the fins edges, can be a good approximation for the slip velocity at the interface of “liquid-textured surface”.

Key words: finned channel, shear flow, Stokes approximation, eigenfunctions, slip velocity, hydrophobic surfaces.