DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.3.2

УДК 512.57
ББК 22.144

О СТРОЕНИИ КОММУТАТИВНЫХ УНАРНЫХ АЛГЕБР С ДИСТРИБУТИВНОЙ РЕШЕТКОЙ КОНГРУЭНЦИЙ

Владимир Валентинович Попов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики,
Волгоградский государственный университет
popov_v_v@rambler.ru, popov.vlaval@volsu.ru, kiem@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Показано, что любая коммутативная унарная алгебра с конечным числом унарных операций, решетка конгруэнций которой дистрибутивна, содержит подалгебру, решетка конгруэнций которой изоморфна решетке конгруэнций одного из унаров $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2(n)$ (простой структуры) или решетке конгруэнций унарной алгебры $\mathbf{D}_3$ с двумя унарными операциями.

Ключевые слова: коммутативная унарная алгебра, m-уноид, решетка конгруэнций, дистрибутивная решетка, циклический элемент.

Введение

В работе изучаются решетки конгруэнций унарных алгебр, сигнатура которых содержит конечное число унарных операций. Алгебры с m унарными операциями рассматривались А.И. Мальцевым [6, с. 348] и были названы m-уноидами. Унар — это алгебра с одной унарной операцией. В работах [2; 3; 11] изучались унары, решетки конгруэнций которых принадлежат заданному классу решеток (полумодулярны, атомарны, дистрибутивны и т. д.). Аналогичные вопросы для унарных алгебр в двумя унарными операциями рассматривались в [7; 8; 10]. Важные результаты о коммутативных унарных алгебрах с дистрибутивной решеткой конгруэнций получены в работах [4; 5].

Все необходимые определения имеются в [1; 6]. Часть результатов данной заметки объявлена в [9].

Напомним, что унарная алгебра $\mathbf{A} = (A, \Omega)$ — это алгебраическая система, которая определяется некоторым множеством A и набором Ω унарных операций на A. Множество A называется *носителем* или *основным множеством* алгебры, а его элементы — *элементами* алгебры. Каждую операцию $f \in \Omega$ можно рассматривать как отображение множества A в себя. Операции $f \in \Omega$ называются *основными* или *главными* в отличие от других операций, которые могут быть определены на алгебре.

Пусть $\mathbf{A} = (A, \Omega)$ — произвольная унарная алгебра. Через Ω^* обозначается свободный моноид слов с порождающим множеством Ω относительно композиции. Единицей в Ω^* служит пустое слово. Результат $w(x)$ применения слова $w \in \Omega^*$ к элементу $x \in A$ определяется индуктивно по длине слова (см., например, [4]). По определению $f^0(x) = x$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ для произвольных $f \in \Omega$, $x \in A$ и целого $n \geq 1$. Кроме того, если $w = w_1 w_2$, то $w(x) = w_1(w_2(x))$, где $w, w_1, w_2 \in \Omega^*$ и $x \in A$.

Унарная алгебра $\mathbf{A} = (A, \Omega)$ называется коммутативной, если для всех $f, g \in \Omega$ на $\mathbf{A}$ выполнено тождество $f(g(x)) = g(f(x))$.

Конгруэнция θ на алгебре $\mathbf{A}$ — это отношение эквивалентности на носителе A этой алгебры, которое стабильно относительно каждой главной операции f, то есть если для любых элементов $x, y \in A$ из $x\theta y$ следует $f(x)\theta f(y)$.

Через $\mathrm{Con}\ \mathbf{A}$ обозначается множество всех конгруэнций алгебры $\mathbf{A}$. На этом множестве вводится частичный порядок: для конгруэнций θ_1, θ_2 этой алгебры отношение $\theta_1 \leq \theta_2$ выполнено тогда и только тогда, когда для любых элементов $x, y \in A$ из $x\theta_1 y$ следует $x\theta_2 y$. Нулевой конгруэнцией называется конгруэнция, при которой эквивалентны только совпадающие элементы алгебры. Единичная конгруэнция — это конгруэнция, при которой эквивалентны любые элементы алгебры. Если M — подмножество носителя A алгебры $\mathbf{A}$, то через $\theta(M)$ обозначается конгруэнция, порожденная множеством M, то есть наименьшая конгруэнция, относительно которой все элементы множества M попадают в один класс эквивалентности.

Если $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}\ \mathbf{A}$, то через $\theta_1 \wedge \theta_2$ обозначается нижняя грань конгруэнций θ_1 и θ_2, то есть наибольшая конгруэнция $\theta \in \mathrm{Con}\ \mathbf{A}$, для которой $\theta \leq \theta_1$ и $\theta \leq \theta_2$. Аналогично определяется верхняя грань $\theta_1 \vee \theta_2$ конгруэнций θ_1 и θ_2.

Решетка конгруэнций $\mathrm{Con}\ \mathbf{A}$ называется дистрибутивной, если для любых трех конгруэнций $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathrm{Con}\ \mathbf{A}$ верно равенство $\theta_1 \wedge (\theta_2 \vee \theta_3) = (\theta_1 \wedge \theta_2) \vee (\theta_1 \wedge \theta_3)$.

Подалгеброй алгебры $\mathbf{A} = (A, \Omega)$ называется такое подмножество A' множества A, что $f(A') \subset A'$ при всех $f \in \Omega$. В этом случае (A', Ω') является унарной алгеброй, где Ω' состоит из ограничений всех операций $f \in \Omega$ на множество A'. Вместо (A', Ω') в подобных ситуациях будем писать (A', Ω).

Если алгебра $\mathbf{A}$ коммутативна и $\varphi \in \Omega^*$, то φ коммутирует с любой операцией $f \in \Omega$. При этом всякая конгруэнция θ на $\mathbf{A}$ стабильна относительно операции φ (то есть из $x, y \in A$ и $x\,\theta\,y$ вытекает $\varphi(x)\,\theta\,\varphi(y)$). Отсюда легко заключить, что если к набору Ω основных унарных операций алгебры $\mathbf{A}$ добавить операцию φ, то решетка конгруэнций алгебры не изменится. Элемент $x \in A$ называется φ-циклическим, если найдется целое число $n \geq 1$, для которого $\varphi^n(x) = x$.

Через $\mathbf{Z}$, $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}_0$ обозначаются, соответственно, множество целых чисел, множество натуральных чисел и множество неотрицательных целых чисел.

Ниже нам потребуется описание следующих унаров и унарных алгебр:

Пример 1. Носитель унара $\mathbf{D}_1 = (A, f)$ — это множество $\mathbf{N}$ натуральных чисел, а операция f определена формулой $f(x) = x + 1$, $x \in \mathbf{N}$.

Пример 2. Носитель унара $\mathbf{D}_2(n) = (A, f)$ — это кольцо $\mathbf{Z}_n$ вычетов по некоторому модулю $n \geq 1$, а $f(x) = x + 1 (\mathrm{mod}\ n)$ при $x \in \mathbf{Z}_n$. Если при этом $n = 1$, то носитель унара состоит из единственного элемента, а f — тождественное отображение.

Пример 3. Носитель алгебры $\mathbf{D}_3 = (A, f, g)$ — это множество $\mathbf{Z}$ целых чисел, а операции определены формулами $f(x) = x + 1$ и $g(x) = x - 1$, $x \in \mathbf{Z}$.

Если (A, f, g) — алгебра с двумя унарными операциями и $m > 2$ — целое число, то ее можно превратить в алгебру с m унарными операциями, добавив в список главных операций операции вида $f^i g^j$, где $i, j \geq 0$ — целые числа. При этом решетка конгруэнций алгебры не изменится.

1. Основной результат

Основной результат данной статьи следующий.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{A} = (A, \Omega)$ *— коммутативная унарная алгебра с дистрибутивной решеткой конгруэнций,* $m = |\Omega| \geq 2$. *Тогда эта алгебра содержит подалгебру, решетка конгруэнций которой изоморфна решетке конгруэнций одного из унаров* $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2(n)$ *или решетке конгруэнций алгебры* $\mathbf{D}_3$.

Случай $m = 2$ рассмотрен в работе [7]. При $m > 2$ нужны дополнительные результаты.

2. Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{A} = (A, \Omega)$ *— коммутативная алгебра,* A_0 *— ее подалгебра и* x, x' *— различные элементы множества* $A \setminus A_0$. *Пусть* $f(x) \in A_0$ *и* $f(x') \in A_0$ *при всех* $f \in \Omega$. *Тогда решетка конгруэнций* $\mathrm{Con}\,\mathbf{A}$ *алгебры* $\mathbf{A}$ *не дистрибутивна.*

Доказательство. Рассмотрим конгруэнции $\sigma = \theta(\{x, x'\})$, $\gamma = \theta(\{x\} \cup A_0)$ и $\delta = \theta(\{x'\} \cup A_0)$, где $\theta(M)$ — (наименьшая) конгруэнция, порожденная множеством M. Выберем произвольный элемент $t \in A_0$. Тогда $x\gamma t$ и $t\delta x'$, поэтому x и x' находятся в отношении $\gamma \vee \delta$, откуда легко заключить, что x и x' находятся и в отношении $\sigma \wedge (\gamma \vee \delta)$. Из определения конгруэнций σ, γ и δ вытекает, что если $y \in A$ и $x(\sigma \wedge \gamma)y$, то $y = x$. Аналогично, из $x(\sigma \wedge \delta)y$ следует $y = x$. Поэтому x и x' не находятся в отношении $(\sigma \wedge \gamma) \vee (\sigma \wedge \delta)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{A} = (A, \Omega)$ *— коммутативная алгебра с дистрибутивной решеткой конгруэнций. Пусть* x, x' *— различные элементы* A. *Тогда найдется такое непустое слово* $\varphi \in \Omega^*$, *что будет выполнено хотя бы одно из следующих равенств:*

(a) $x = \varphi(x)$;

(b) $x = \varphi(x')$;

(c) $x' = \varphi(x)$;

(d) $x' = \varphi(x')$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}_0$ — подалгебра, порожденная множеством $\{f(x) : f \in \Omega\} \cup \{f(x') : f \in \Omega\}$. Из дистрибутивности решетки $\mathrm{Con}\,\mathbf{A}$ и леммы 1 вытекает, что $x \in A_0$ или $x' \in A_0$. Осталось заметить, что для любого элемента $y \in A$ соотношение $y \in A_0$ выполнено тогда и только тогда, когда найдется слово $\varphi \in \Omega^*$, для которого $y = \varphi(x)$ или $y = \varphi(x')$. При этом φ не может быть тождественным отображением A на себя (иначе $x \in A_0$ или $x' \in A_0$).

В дальнейшем будем предполагать, что главные операции унарной алгебры $\mathbf{A} = (A, \Omega)$ перенумерованы, то есть $\Omega = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$, где $m = |\Omega|$, и, когда это удобно, вместо (A, Ω) писать $(A, f_1, f_2, \ldots, f_m)$. В этих обозначениях $\varphi \in \Omega^*$ тогда и только тогда, когда найдутся неотрицательные целые числа i_1, i_2, ..., i_m, для которых $\varphi = f_1^{i_1} f_2^{i_2} \ldots f_m^{i_m}$.

Лемма 3. *Пусть* $\mathbf{A} = (A, f_1, f_2, \ldots, f_m)$ *— коммутативная алгебра с дистрибутивной решеткой конгруэнций. Тогда найдутся такие неотрицательные целые числа* k_1, k_2, ..., k_m, *что* $k_1 + k_2 + \ldots + k_m > 0$ *и для некоторого элемента* $z_0 \in A$ *будет выполнено хотя бы одно из следующих равенств:*

(a) $f_1(z_0) = f_2^{k_2} \ldots f_m^{k_m}(z_0)$;

(b) $f_1^{k_1} f_2^{k_2} \ldots f_m^{k_m}(z_0) = z_0$.

Поэтому на подалгебре $\mathbf{A}_1$, *порожденной элементом* z_0, *выполнено хотя бы одно из тождеств* $f_1(x) = f_2^{k_2} \ldots f_m^{k_m}(x)$ *или* $f_1^{k_1} f_2^{k_2} \ldots f_m^{k_m}(x) = x$.

Доказательство. Выберем произвольный элемент $x_0 \in A$ и положим $y_1 = f_1(x_0)$, $y_2 = f_2(x_0)$. Если $y_1 = y_2$, то $f_1(x_0) = f_2(x_0)$, поэтому при $k_2 = 1$, $k_3 = \ldots = k_m = 0$ и $z_0 = x_0$ будет выполнено равенство *(a)*.

Пусть теперь $y_1 \neq y_2$. Применяя лемму 2 при $x = y_1$ и $x' = y_2$, выберем неотрицательные целые числа i_1, i_2, ..., i_m, для которых $i_1 + i_2 + \ldots + i_m > 0$, а для операции $\varphi = f_1^{i_1} f_2^{i_2} \ldots f_m^{i_m}$ выполнено хотя бы одно из равенств $y_1 = \varphi(y_1)$, $y_1 = \varphi(y_2)$, $y_2 = \varphi(y_1)$ или $y_2 = \varphi(y_2)$. Если справедливо первое или четвертое равенство, то будет выполнено равенство *(b)* доказываемой леммы, если положить $k_1 = i_1$, $k_2 = i_2$, ..., $k_m = i_m$, а также $z_0 = y_1$ или $z_0 = y_2$ соответственно. Пусть теперь выполнено второе равенство, то есть $y_1 = \varphi(y_2)$. Это равенство можно записать в виде

$$f_1(x_0) = f_1^{i_1} f_2^{i_2} f_3^{i_3} \ldots f_m^{i_m}(f_2(x_0)) = f_1^{i_1} f_2^{i_2+1} f_3^{i_3} \ldots f_m^{i_m}(x_0).$$

Если $i_1 = 0$, то при $k_2 = i_2 + 1$, $k_3 = i_3$, ..., $k_m = i_m$, а также при $z_0 = x_0$ и любом k_1 будет выполнено равенство *(a)*.

Пусть теперь $i_1 \geq 1$. Тогда верно равенство

$$f_1(x_0) = f_1^{i_1-1} f_2^{i_2+1} f_3^{i_3} \ldots f_m^{i_m}(f_1(x_0)),$$

поэтому при $k_1 = i_1 - 1$, $k_2 = i_2 + 1$, $k_3 = i_3$, ..., $k_m = i_m$, а также при $z_0 = f_1(x_0)$ будет верно равенство *(b)*. Аналогично рассматривается случай $y_2 = \varphi(y_1)$. Лемма доказана.

В дальнейшем нам потребуются два известных результата.

Лемма 4. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— коммутативная унарная алгебра с дистрибутивной решеткой конгруэнций,* $\mathbf{B}_1$ *— его подалгебра и* $\mathbf{B}_2$ *— фактор-алгебра алгебры* $\mathbf{A}$ *по некоторой конгруэнции. Тогда решетки конгруэнций унарных алгебр* $\mathbf{B}_1$ *и* $\mathbf{B}_2$ *дистрибутивны.*

Справедливость леммы 4 вытекает из того факта, что решетки $\mathrm{Con}\,\mathbf{B}_1$ и $\mathrm{Con}\,\mathbf{B}_2$ вкладываются в решетку $\mathrm{Con}\,\mathbf{A}$ как подрешетки (см., например, [4, с. 55]).

Лемма 5. *Пусть* $\mathbf{A} = (A, f_1, f_2, \ldots, f_m)$ *— алгебра с дистрибутивной решеткой конгруэнций и* φ *— унарная операция на* A, *которая коммутирует с каждой операцией* f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. *Пусть отображение* $\varphi : A \to A$ *взаимно однозначно (то есть из* $x_1, x_2 \in A$ *и* $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ *следует* $x_1 = x_2$*). Пусть* $\lambda = \lambda(\varphi)$ *— отношение на носителе* A, *которое задается следующим образом: если* x, y *— элементы носителя* A, *то* $x \lambda y$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$ *или найдется такое целое число* $k \geq 1$, *что* $y = \varphi^k(x)$ *или* $x = \varphi^k(y)$. *Тогда* λ *— конгруэнция на алгебре* $\mathbf{A}$.

Доказательство. Рефлексивность и симметричность отношения λ вытекает непосредственно из определения λ. Проверим, что λ транзитивно. Пусть $x\lambda y$ и $y\lambda z$, где $x, y, z \in \in A$. Необходимо проверить, что $x\lambda z$. Если $x = y$ или $y = z$, то это очевидно. Пусть теперь $x \neq y$ и $y \neq z$. Тогда найдутся целые числа $k, l \geq 1$, для которых выполнено хотя бы одно из равенств $y = \varphi^k(x)$ или $x = \varphi^k(y)$, а также выполнено хотя бы одно из равенств $z = \varphi^l(y)$ или $y = \varphi^l(z)$. Не теряя общности, считаем, что $l \leq k$.

Если $y = \varphi^k(x)$ и $z = \varphi^l(y)$, то $z = \varphi^{k+l}(x)$, откуда $x\lambda z$.

Если $y = \varphi^k(x)$ и $y = \varphi^l(z)$, то $\varphi^l(z) = y = \varphi^k(x) = \varphi^l(\varphi^{k-l}(x))$, откуда $z = = \varphi^{k-l}(x)$ (поскольку φ взаимно однозначно), поэтому $x\theta z$. Отметим, что при $k = l$ верно $z = x$.

Пусть теперь $x = \varphi^k(y)$ и $z = \varphi^l(y)$. Тогда $x = \varphi^k(y) = \varphi^{k-l}(\varphi^l(y)) = \varphi^{k-l}(z)$, откуда $x\theta z$.

Пусть, наконец, $x = \varphi^k(y)$ и $y = \varphi^l(z)$. Тогда $x = \varphi^{k+l}(z)$ и снова получаем $x\theta z$. Транзитивность отношения λ доказана. Стабильность этого отношения следует из того, что операция φ коммутирует с каждой главной операцией алгебры $\mathbf{A}$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* $\mathbf{A} = (A, f_1, f_2, \ldots, f_m)$ *— унарная алгебра с дистрибутивной решеткой конгруэнций и* φ, ψ *— две унарных операции на* A*, которые коммутируют с каждой из операций* f_i*,* $i = 1, 2, \ldots, m$*. Пусть* $\varphi, \psi : A \to A$ *— взаимно однозначные отображения и* $\varphi\psi = \psi\varphi$*.*

Тогда найдутся целые числа $p, q \geq 0$ *и элемент* $z_1 \in A$*, такие, что* $p + q > 0$ *и выполнено хотя бы одно из равенств:*

(a) $\varphi^p\psi^q(z_1) = z_1$*;*

(b) $\varphi^p(z_1) = \psi^q(z_1)$.

Доказательство. Пусть $\gamma = \lambda(\varphi)$ — конгруэнция на алгебре $\mathbf{A}$, построенная по операции φ в лемме 5. Пусть также $\delta = \lambda(\psi)$, $\sigma = \lambda(\varphi\psi)$ — конгруэнции, построенные аналогичным способом по операциям ψ и $\varphi\psi$. Пусть a — произвольный элемент алгебры $\mathbf{A}$. Положим $b = \varphi(a)$ и $c = \psi(\varphi(a)) = \psi(b)$. Если $a = c$, то при $p = q = 1$ и $z_1 = a$ выполнено равенство *(a)*. Пусть теперь $a \neq c$. Ясно, что $a\gamma b\delta c$ и $a\sigma c$, поэтому $a[\sigma \wedge (\gamma \vee \delta)]c$.

Так как решетка $\mathrm{Con}\, A$ дистрибутивна, справедливо соотношение $a[(\sigma \wedge \gamma) \vee (\sigma \wedge \wedge \delta)]c$. Поэтому класс эквивалентности $\overline{a}$ относительно конгруэнции $(\sigma \wedge \gamma) \vee (\sigma \wedge \wedge \delta)$, содержащий элемент a, содержит и отличный от него элемент c, и, следовательно, состоит более чем из одного элемента. Поэтому найдется такой элемент $y \in A$, что $y \neq a$ и выполнено хотя бы одно из соотношений $a(\sigma \wedge \gamma)y$ или $a(\sigma \wedge \delta)y$.

Не теряя общности, считаем, что выполнено первое соотношение (в противном случае меняем местами φ и ψ). Тогда $a\gamma y$ и $a\sigma y$, поэтому найдутся такие целые числа $k, l \geq 1$, что верно хотя бы одно из равенств $y = \varphi^k(a)$ или $a = \varphi^k(y)$, а также верно хотя бы одно из равенств $y = (\varphi\psi)^l(a)$ или $a = (\varphi\psi)^l(y)$. Теперь возможны четыре случая.

Случай 1. Верны равенства $y = \varphi^k(a)$ и $y = (\varphi\psi)^l(a)$. Допустим, что $k \leq l$. Тогда $\varphi^k(a) = y = (\varphi\psi)^l(a) = \varphi^{l-k}\psi^l(\varphi^k(a))$, поэтому при $p = l - k$, $q = l$ и $z_1 = \varphi^k(a)$ получаем $z_1 = \varphi^p\psi^q(z_1)$, то есть выполнено равенство *(a)*. При этом $p + q = (l - k) + + l \geq 0 + 1 > 0$. Аналогично проверяется, что если $l < k$, то при $p = k - l$, $q = l$ и $z_1 = \varphi^l(a)$ выполнено равенство *(b)*.

Случай 2. Верны равенства $y = \varphi^k(a)$ и $a = (\varphi\psi)^l(y)$. В этом случае $y = \varphi^k(a) = \varphi^k((\varphi\psi)^l(y)) = \varphi^{k+l}\psi^l(y)$, поэтому при $p = k+l$, $q = l$ и $z_1 = y$ выполнено равенство *(a)*.

Случай 3. Верны равенства $a = \varphi^k(y)$ и $y = (\varphi\psi)^l(a)$. В этом случае $\varphi^{k+l}\psi^l(a) = a$, то есть при $p = k + l$, $q = l$ и $z_1 = a$ выполнено равенство *(a)*.

Случай 4. Верны равенства $a = \varphi^k(y)$ и $a = (\varphi\psi)^l(y)$. Рассуждая, как в случае 1, несложно убедиться, что если $k \leq l$, то при $p = l - k$, $q = l$ и $z_1 = \varphi^k(y)$ выполнено равенство *(a)*. Если же $l < k$, то при $p = k - l$, $q = l$ и $z_1 = \varphi^l(y)$ выполнено равенство *(b)*. Лемма доказана. Отметим, что случаи 3 и 4 сводятся к случаям 1 и 2, если поменять местами элементы a и y.

3. Доказательство теоремы 1

Справедливость теоремы 1 вытекает из следующей леммы.

Лемма 7. *Пусть $m \geq 1$ — целое число и $\mathbf{A} = (A, f_1, f_2, \ldots, f_m)$ — коммутативная алгебра с дистрибутивной решеткой конгруэнций. Тогда существует три объекта — подмножество A' носителя A алгебры $\mathbf{A}$, унарная операция u на A, а также набор α_1, α_2, ..., α_m неотрицательных целых чисел, для которых на алгебре $\mathbf{A}' = (A', f_1, f_2, \ldots, f_m)$ справедливо тождество $u(x) = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_m^{\alpha_m}(x)$ и при каждом $i = 2, 3, \ldots, m$ найдется целое число β_i, для которого на алгебре $\mathbf{A}'$ выполнено тождество $f(x) = u^{\beta_i}(x)$, причем если какое-либо β_i отрицательно, то отображение u обратимо на A'. При этом ограничение отображения u на множество A' взаимно однозначно.*

Доказательство. Докажем лемму индукцией по m. Если $m = 1$ или $m = 2$, то справедливость леммы вытекает из результатов работ [3] и [7] соответственно. Пусть теперь $m \geq 3$. По лемме 3 найдется подалгебра $\mathbf{A}_1$ алгебры $\mathbf{A}$ и последовательность k_1, k_2, ..., k_m неотрицательных целых чисел, для которых $k_1 + k_2 + \ldots + k_m > 0$ и на подалгебре $\mathbf{A}_1$ выполнено или тождество *(a)* $f_1(x) = f_2^{k_2} \ldots f_m^{k_m}(x)$, или тождество *(b)* $f_1^{k_1} f_2^{k_2} \ldots f_m^{k_m}(x) = x$. Через A_1 обозначим носитель подалгебры $\mathbf{A}_1$.

По лемме 4 решетка $\mathrm{Con}\ \mathbf{A}_1$ дистрибутивна. Если на подалгебре $\mathbf{A}_1$ выполнено тождество *(a)*, то операция $f_1(x)$ выражается через остальные главные операции алгебры $\mathbf{A}_1$, поэтому f_1 можно удалить из списка главных операций алгебры $\mathbf{A}_1$ (не изменяя при этом решетки конгруэнций) и справедливость доказываемой леммы будет вытекать из индуктивного предположения.

Пусть теперь на $\mathbf{A}_1$ выполнено тождество *(b)*. В этом тождестве хотя бы одно из чисел k_1, k_2, ..., k_m положительно. Для упрощения записи будем предполагать, что таким является k_1. Из справедливости тождества *(b)* на алгебре $\mathbf{A}_1$ вытекает, что на этой алгебре операция f_1 обратима и верно тождество $f_1^{-1}(x) = f_1^{k_1-1} f_2^{k_2} \ldots f_m^{k_m}(x)$.

Рассмотрим отношение эквивалентности λ на алгебре $\mathbf{A}_1$, которое задается следующим образом: если $x_1, x_2 \in A_1$, то $x_1 \lambda x_2$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или найдется такое целое число $k \geq 1$, что $x_2 = f_1^k(x_1)$ или $x_1 = f_1^k(x_2)$. По лемме 5 λ — конгруэнция на алгебре $\mathbf{A}_1$.

Пусть $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1/\lambda$ — соответствующая фактор-алгебра. Обозначим через ζ отображение $A_1 \to B_1$, которое элементу x алгебры $\mathbf{A}_1$ сопоставляет класс эквивалентности $\overline{x} = \{x' \in A_1 : x' \lambda x\}$, то есть элемент алгебры $\mathbf{B}_1$. Тогда для любых элементов

$x_1, x_2 \in A_1$ соотношения $x_1 \lambda x_2$ и $\zeta(x_1) = \zeta(x_2)$ будут эквивалентны. Так как отображение f_1 обратимо, а f_1^0 — тождественное отображение, справедливы следующие свойства.

(1) Если $x_1, x_2 \in A_1$, то $\zeta(x_1) = \zeta(x_2) \iff$ найдется такое целое число k, что $x_1 = f_1^k(x_2)$.

При $i = 1, 2, \ldots, m$ главная операция g_i алгебры $\mathbf{B}_1$, которая соответствует операции f_i на алгебре $\mathbf{A}_1$, задается так: если $x, y \in A_1$ и $y = f_i(x)$, то $g_i(\overline{x}) = \overline{y}$. Поэтому для любого элемента $x \in A_1$ выполнено равенство $\zeta(f_i(x)) = g_i(\zeta(x))$.

Из леммы 4 вытекает, что решетка $\mathrm{Con}\,\mathbf{B}_1$ дистрибутивна. В фактор-алгебре $\mathbf{B}_1$ операция g_1 будет тождественным отображением, поэтому можно удалить эту операцию из списка главных операций алгебры $\mathbf{B}_1$, не изменяя решетки конгруэнций этой алгебры. Теперь можно применить индуктивное предположение, в соответствии с которым существуют подалгебра $\mathbf{B}'$ алгебры $\mathbf{B}_1$, унарная операция v на носителе B' алгебры $\mathbf{B}'$, а также набор α_2, α_3, …, α_m неотрицательных целых чисел, для которых на подалгебре $\mathbf{B}'$ выполнено тождество $v(x) = g_2^{\alpha_2} g_3^{\alpha_3} \ldots g_m^{\alpha_m}(x)$ и при любом $i = 2, \ldots, m$ найдется такое целое число β_i, для которого на алгебре $\mathbf{B}'$ выполнено тождество $g_i(x) = v^{\beta_i}(x)$, причем если хотя бы одно β_i отрицательно, то отображение v обратимо на B'.

Положим $u(x) = f_2^{\alpha_2} f_3^{\alpha_3} \ldots f_m^{\alpha_m}(x)$ и выберем такой элемент a алгебры $\mathbf{A}_1$, что элемент $b = \zeta(a)$ принадлежит алгебре $\mathbf{B}'$. Обозначим через $\mathbf{A}_2$ подалгебру алгебры $\mathbf{A}_1$, порожденную элементом a, а через A_2 — носитель этой подалгебры. Из определения операций g_i и u вытекает, что для любого элемента $x \in A_2$ справедливы равенства

$$\zeta(u(x)) = \zeta(f_2^{\alpha_2} f_3^{\alpha_3} \ldots f_m^{\alpha_m}(x)) = g_2^{\alpha_2} g_3^{\alpha_3} \ldots g_m^{\alpha_m}(\zeta(x)) = v(\zeta(x)),$$

откуда вытекает, что выполнено свойство:

(2) Если $x \in A_2$ и $k \geq 1$ — целое число, то верно равенство $\zeta(u^k(x)) = v^k(\zeta(x))$.

Проверим теперь, что справедливо свойство:

(3) Пусть $i \in \{2, 3, \ldots, m\}$. Тогда операцию f_i на алгебре A_2 можно выразить в виде суперпозиции операций f_1, f_1^{-1} и u.

Если $\beta_i > 0$, то, применяя свойство (2) при $x = a$, получим $\zeta(f_i(a)) = g_i(b) = v^{\beta_i}(b) = \zeta(u^{\beta_i}(a))$. Используя свойство (1) при $x_1 = f_i(a)$ и $x_2 = u^{\beta_i}(a)$, выберем целое число k, для которого $f_i(a) = f_1^k u^{\beta_i}(a)$. Так как a — порождающий элемент подалгебры A_2, заключаем, что на алгебре A_2 выполнено тождество $f_i(x) = f_1^k u^{\beta_i}(x)$, и свойство (3) доказано (при $\beta > 0$).

Пусть теперь $\beta_i < 0$. Тогда отображение v обратимо (по индуктивному предположению).

Так как $-\beta_i > 0$ и $v^{\beta_i}(y) = g_i(y)$ при всех $y \in B'$, справедливо следующее равенство:

$$\zeta(u^{-\beta_i} f_i(a)) = v^{-\beta_i} g_i(b) = b = \zeta(a).$$

Применяя свойство (1), выберем целое число k, для которого $u^{-\beta_i} f_i(a) = f_1^k(a)$. Из последнего равенства получаем $u^{-\beta_i} f_i f_1^{-k}(a) = a$. Так как a — порождающий элемент подалгебры $\mathbf{A}_2$, справедливо свойство:

(4) На подалгебре A_2 выполнено тождество $u^{-\beta_i} f_i f_1^{-k}(x) = x$.

Из свойства (4) получаем, что на подалгебре $\mathbf{A}_2$ выполнено тождество $u^{-1}(x) = u^{-\beta_i - 1} f_i f_1^{-k}(x)$. Поэтому на подалгебре $\mathbf{A}_2$ отображение u обратимо и операция $u^{-1}(x)$ выражается в виде суперпозиции отображений f_1, f_1^{-1} и u.

Из (4) получаем также, что на подалгебре $\mathbf{A}_2$ выполнено тождество $f_i(x) = f_1^k u^{\beta_i}(x)$. Следовательно, операция $f_i(x)$ выражается в виде суперпозиции отображений f_1, f_1^{-1} и u. Свойство (3) доказано (при $\beta < 0$).

Пусть, наконец, $\beta_i = 0$. Тогда ограничение отображения g_i на подалгебру $\mathbf{B}_1$ является тождественным отображением. Рассуждая, как при рассмотрении случая $\beta_i > 0$, несложно убедиться, что при некотором целом k на подалгебре $\mathbf{A}_2$ выполнено тождество $f_i(x) = f_1^k(x)$. Свойство (3) доказано (при $\beta = 0$). Таким образом, свойство (3) верно при любом целом β.

Проверим теперь, что выполнено свойство:

(5) Решетка конгруэнций алгебры $\mathbf{A}_2 = (A_2, f_1, f_2, \ldots, f_m)$ совпадает с решеткой конгруэнций алгебры $\mathbf{E} = \big(A_2, f_1, f_1^{-1}, u\big)$.

В самом деле, на подалгебре $\mathbf{A}_1$ выполнено тождество $f_1^{-1}(x) = f_1^{k_1-1} f_2^{k_2} \ldots f_m^{k_m}(x)$, а на подалгебре $\mathbf{A}_2$ — тождество $u(x) = f_2^{\alpha_2} f_3^{\alpha_3} \ldots f_m^{\alpha_m}(x)$, где все степени — целые и неотрицательные. Так как $A_2 \subset A_1$, заключаем, что на множестве A_2 операции f_1^{-1} и u являются суперпозицией операций $f_2, \ldots, f_m$, поэтому любая конгруэнция на алгебре $\mathbf{A}_2$, которая стабильна относительно операций $f_1, f_2, \ldots, f_m$, будет стабильна и относительно операций f_1, f_1^{-1} и u, откуда вытекает, что $\mathrm{Con}\ \mathbf{A}_2 \subset \mathrm{Con}\ \mathbf{E}$. Пусть теперь i — целое число от 2 до m. По свойству (3) операцию f_i можно записать как суперпозицию трех операций f_1, f_1^{-1} и u. Поэтому $\mathrm{Con}\ \mathbf{E} \subset \mathrm{Con}\ \mathbf{A}_2$. Свойство (5) доказано.

Далее возможны три случая.

Случай 1. Для некоторого элемента $a_0 \in A_2$ и некоторого целого числа $p > 0$ верно равенство $f_1^p(a_0) = a_0$. В этом случае на подалгебре $\mathbf{A}_3$, порожденной элементом a_0, выполнено тождество $f_1^p(x) = x$, поэтому на нем же верно тождество $f_1^{-1}(x) = f_1^{p-1}(x)$. Следовательно, решетка конгруэнций алгебры $\mathbf{E} = \big(A_3, f_1, f_1^{-1}, u\big)$ совпадает с решеткой конгруэнций алгебры $\mathbf{E}' = (A_3, f_1, u)$, в которой всего две главные операции. Используя леммы 4 и 5, несложно проверить, что решетка конгруэнций алгебры $\mathbf{E}'$ дистрибутивна. Теперь справедливость леммы 7 вытекает из индуктивного предположения.

Случай 2. Отображение $u : A_2 \to A_2$ взаимно однозначно. Напомним, что отображение f_1 обратимо на подалгебре A_1, а потому взаимно однозначно на этом алгебре. Применяя лемму 6 к операциям $\varphi = f_1$ и $\psi = u$, фиксируем такие целые числа $p, q \geq 0$, что $p + q > 0$ и для некоторого элемента $z_1 \in A_2$ выполнено хотя бы одно из следующих равенств: (a) $f_1^p u^q(z_1) = z_1$; (b) $f_1^p(z_1) = u^q(z_1)$. Обозначим через A_3 подалгебру алгебры $\mathbf{A}_2$, порожденную элементом z_1. Рассмотрим два случая.

Случай 2a. Выполнено равенство (a). Тогда на подалгебре $\mathbf{A}_3$ справедливо тождество $f_1^p u^q(x) = x$. Если $p \geq 1$, то на подалгебре $\mathbf{A}_3$ выполнено тождество $f_1^{-1}(x) = f_1^{p-1} u^q(x)$. Поэтому решетка конгруэнций алгебры $\mathbf{E}_3 = \big(A_3, f_1, f_1^{-1}, u\big)$ совпадает с решеткой конгруэнций алгебры (A_3, f_1, u). Теперь, как и в случае 1, справедливость леммы 9 вытекает из индуктивного предположения.

Пусть теперь $p = 0$. Тогда $q \geq 1$. Если $q = 1$, то u — тождественное отображение на A_3, поэтому u можно удалить из списка основных операций алгебры $\mathbf{E}$, что позволяет воспользоваться индуктивным предположением.

Пусть, наконец, $q > 1$ (и $p = 0$), то есть на алгебре $\mathbf{A}_3$ выполнено тождество $u^q(x) = x$. Считаем, что z_1 не является f_1-циклическим элементом (этот вариант рассмотрен в случае 1). Проверим, что при указанных ограничениях решетка $\mathrm{Con}\ \mathbf{E}_3$ не дистрибутивна.

Рассмотрим конгруэнции

$$\sigma = \theta(\{z_1, f_1(z_1)\}), \quad \gamma = \theta(\{z_1, f_1u(z_1)\}) \quad \text{и} \quad \delta = \theta(\{z_1, f_1^2u(z_1)\}),$$

где $\theta(M)$ — (наименьшая) конгруэнция, порожденная множеством M. Несложно проверить, что $\gamma \vee \delta$ — единичная конгруэнция, а $\sigma \wedge \delta$ и $\sigma \wedge \gamma$ — нулевые конгруэнции. Отсюда вытекает, что решетка конгруэнций алгебры $\mathbf{E}_3$ не дистрибутивна. Однако $\mathbf{E}_3$ является подалгеброй алгебры $\mathbf{A}$ и по лемме 4 ее решетка конгруэнций должна быть дистрибутивна. Полученное противоречие показывает, что этот случай невозможен.

Случай 2b. Выполнено равенство (b). Тогда на подалгебре $\mathbf{A}_3$ справедливо тождество $f_1^p(x) = u^q(x)$. Если $p = 0$, то на $\mathbf{A}_3$ справедливо тождество $u^q(x) = x$, где $q \geq 1$. Такая ситуация описана при рассмотрении случая 2a.

Если $p = 1$, то на $\mathbf{A}_3$ справедливо тождество $f_1(x) = u^q(x)$, поэтому f_1 можно удалить из списка основных операций алгебры $\mathbf{A}_3$ и затем воспользоваться индуктивным предположением.

Пусть, наконец, $p > 1$. Тогда на $\mathbf{A}_3$ справедливо тождество $f_1^{-1}(x) = f_1^{p-1}u^q(x)$, поэтому f_1^{-1} можно удалить из списка основных операций алгебры $\mathbf{E}_3$, а затем воспользоваться индуктивным предположением.

Случай 3. Отображение $u : A_2 \to A_2$ не взаимно однозначно. Пусть $u(x_1) = u(x_2)$ и $x_1 \neq x_2$ для некоторых элементов $x_1, x_2 \in A_2$. Тогда

$$v(\zeta(x_1)) = \zeta(u(x_1)) = \zeta(u(x_2)) = v(\zeta(x_2)).$$

Отображение v в условиях доказываемой леммы взаимно однозначно (по индуктивному предположению), поэтому $\zeta(x_1) = \zeta(x_2)$. По свойству (1) найдется такое целое число $k \geq 1$, что $x_1 = f_1^p(x_2)$. Положим $a_0 = u(x_1)$. Тогда $a_0 = u(x_1) = u(f_1^k(x_2)) = f_1^k(u(x_2)) = f_1^k(u(x_1)) = f_1^k(a_0)$. Мы снова приходим к ситуации, описанной в случае 1. Лемма 7 доказана. Из этой леммы легко выводится теорема 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артамонов, В. А. Общая алгебра / В. А. Артамонов, В. Н. Салий, Л. А. Скорняков. — М. : Наука, 1991. — Т. 1. — 480 с.

2. Бощенко, А. П. Псевдодополнения в решетке конгруэнций унаров / А. П. Бощенко // Алгебраические системы : межвуз. сб. научн. работ. — Волгоград : Изд-во ВГПИ, 1989. — С. 23–26.

3. Егорова, Д. П. Структура конгруэнций унарной алгебры / Д. П. Егорова // Упорядоченные множества и решетки : межвуз. науч. сб. — Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1978. — Вып. 5. — С. 11–44.

4. Карташов, В. К. Об условиях дистрибутивности и модулярности решеток конгруэнций коммутативных унарных алгебр / В. К. Карташов, А. В. Карташова, В. Н. Пономарев // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, № 4 (2). — С. 52–57.

5. Карташова, А. В. О решетках конгруэнций прямых сумм сильно связных коммутативных унарных алгебр / А. В. Карташова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, № 4 (2). — С. 57–62.

6. Мальцев, А. И. Алгебраические системы / А. И. Мальцев. — М. : Наука, 1970. — 392 с.

7. Попов, В. В. О коллективной нормальности, о вращаемых графах и конгруэнциях уноидов / В. В. Попов. — Саарбрюккен : Ламберт академик паблишинг, 2013. — 68 с.

8. Попов, В. В. О решетках конгруэнций периодических унарных алгебр / В. В. Попов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2014. — № 2 (21). — С. 27–30.

9. Попов, В. В. О дистрибутивности решеток конгруэнций m-уноидов / В. В. Попов // Национальная ассоциация ученых. — 2017. — № 7 (34). — С. 25–26.

10. Усольцев, В. Л. Минимальные унарные алгебры с двумя коммутирующими операциями / В. Л. Усольцев // Деп. в ВИНИТИ 31.12.96 N3857-D96. — 20 с.

11. Berman, J. On the congruence lattices of unary algebras / J. Berman // Proc. Amer. Math. Soc. — 1972. — Vol. 36, № 1. — P. 34–38.

REFERENCES

1. Artamonov V.A., Saliy V.N., Skornyakov L.A. *Obshchaya algebra* [General Algebra]. Moscow, Nauka Publ., 1991, vol. 1. 480 p.

2. Boshchenko A.P. Psevdodopolneniya v reshetke kongruentsiy unarov [Pseudocomplementations in the Lattice of Congruences of Unary Algebras]. *Algebraicheskie sistemy: mezhvuz. sb. nauchn. rabot.* Volgograd, VGPI Publ., 1989, pp. 23-26.

3. Egorova D.P. Struktura kongruentsiy unarnoy algebry [The Structure of Congruences of a Unary Algebra]. *Uporyadochennye mnozhestva i reshetki: mezhvuz. nauch. sb.* Saratov, Izd-vo Sarat. un-ta Publ., 1978, iss. 5, pp. 11-44.

4. Kartashov V.K., Kartashova A.V., Ponomarev V.N. Ob usloviyakh distributivnosti i modulyarnosti reshetok kongruentsiy kommutativnykh unarnykh algebr [On Conditions for Distributivity Or Modularity of Congruence Lattices of Commutative Unary Algebras]. *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2013, vol. 13, no. 4 (2), pp. 52-57.

5. Kartashova A.V. O reshetkakh kongruentsiy pryamykh summ silno svyaznykh kommutativnykh unarnykh algebr [On Congruence Lattices of Direct Sums of Strongly Connected Commutative Unary Algebras]. *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2013, vol. 13, no. 4 (2), pp. 57-62.

6. Maltsev A.I. *Algebraicheskie sistemy* [Algebraic Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 392 p.

7. Popov V.V. *O kollektivnoy normalnosti, o vrashchaemykh grafakh i kongruentsiyakh unoidov* [On Collective Normality, on Rotated Graphs and Congruences of Unoids]. Saarbrucken, LAMBERT Academic Publishing, 2013. 68 p.

8. Popov V.V. O reshetkakh kongruentsiy periodicheskikh unarnykh algebr [On Lattices of Congruences of Periodic Unary Algebras]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2014, no. 2 (21), pp. 27-30.

9. Popov V.V. O distributivnosti reshetok kongruentsiy m-unoidov [On the Distributivity of Lattices of Congruences of m-Unoids]. *Natsionalnaya assotsiatsiya uchenykh*, 2017, no. 7 (34), pp. 25-26.

10. Usoltsev V. L. Minimalnye unarnye algebry s dvumya kommutiruyushchimi operatsiyami [Minimal Unary Algebras with Two Commuting Operations]. *Dep. v VINITI 31.12.96 N3857-D96*, p. 20.

11. Berman J. On the Congruence Lattices of Unary Algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1972, vol. 36, no. 1, pp. 34-38.

ON COMMUTATIVE UNARY ALGEBRAS WITH THE DISTRIBUTIVE CONGRUATIONS LATTICES

Vladimir Valentinovich Popov

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Computer Science and Experimental Mathematics,
Volgograd State University
popov_v_v@rambler.ru, popov.vlaval@volsu.ru, kiem@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. The article is devoted to the study of lattices of congruences of unary algebras. Algebras with m unary operations were considered by A. I. Maltsev [6, p. 348] and were called m-unoids. Unar is an algebra with one unary operation.

In [2; 3; 11] unars whose congruence lattices belong to a given class of lattices (semimodular, atomic, distributive, etc.) were studied. Similar questions for unary algebras with two unary operations were considered in [7; 8; 10]. Important results on commutative unary algebras with a distributive lattice congruences were obtained in [4; 5]. The main results of this note is announced in [9].

The unary algebra $\mathbf{A} = (A, \Omega)$ is an algebraic system, which is defined by some set A and a set Ω of unary operations on A. Each operation $f \in \Omega$ can be considered as a mapping of the set A into itself. The algebra $\mathbf{A} = (A, \Omega)$ is said to be commutative if for all $f, g \in \Omega$ and all $x \in A$ it holds the equality $f(g(x)) = g(f(x))$.

The congruence θ on the algebra $\mathbf{A}$ is such an equivalence relation on A, that for each $f \in \Omega$ and all $x, y \in A$ from $x\theta y$ it follows $f(x)\theta f(y)$. By Con $\mathbf{A}$ is denoted the set of all congruences on algebra $\mathbf{A}$. There is a partial order on Con $\mathbf{A}$: for the congruences θ_1, θ_2 the relation $\theta_1 \leq \theta_2$ is satisfied if and only if for any elements $x, y \in A$ from $x\theta_1 y$ it follows $x\theta_2 y$. If $\theta_1, \theta_2 \in$ Con $\mathbf{A}$, then $\theta_1 \wedge \theta_2$ denotes the lower bound congruences θ_1 and θ_2, then is the largest congruence $\theta \in$ Con $\mathbf{A}$ for which $\theta \leq \theta_1$ and $\theta \leq \theta_2$. The upper bound $\theta_1 \vee \theta_2$ of congruences θ_1 and θ_2.

A lattice of congruences Con $\mathbf{A}$ is called distributive if for any three congruences $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in$ Con $\mathbf{A}$ the equality $\theta_1 \wedge (\theta_2 \vee \theta_3) = (\theta_1 \wedge \theta_2) \vee (\theta_1 \wedge \theta_3)$.

Below we need the description of the following unars and unary algebras:

Example 1 *The unar* $\mathbf{D}_1$ *is* $(\mathbf{N}, f)$*, where* $\mathbf{N}$ *is the set of natural numbers, and the operation* f *is defined by the formula* $f(x) = x + 1$*,* $x \in \mathbf{N}$.

Example 2 *For natural numbers* $n \geq 1$*, the unar* $\mathbf{D}_2$ *is* $(\mathbf{Z}_n, f)$*, where* $\mathbf{Z}_n$ *is the residue ring modulo* n *and* $f(x) = x + 1 (\mathrm{mod}\ n)$ *for* $x \in \mathbf{Z}_n$*. If, in addition,* $n = 1$*, then the unary carrier consists of a single element, and* f *is the identity map.*

Example 3 *The unary algebra* $\mathbf{D}_3$ *is* $(\mathbf{Z}, f, g)$*, where* $\mathbf{Z}$ *is the set of integers, and* f*,* g *are defined by formulas* $f(x) = x + 1$ *and* $g(x) = x - 1$*,* $x \in \mathbf{Z}$.

The main result of this note is as follows:

Theorem 1. *Let* $\mathbf{A} = (A, \Omega)$ *be a commutative unary algebra with a distributive lattice of congruences,* $m = |\Omega| \geq 2$. *Then this algebra contains a subalgebra, the lattice of congruences of which is isomorphic to the lattice of congruences one of the unars* $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2(n)$ *or a lattice congruences of the algebra* $\mathbf{D}_3$.

Key words: commutative unary algebra, m-unoid, latticies of congruences, distributive property, cyclic element.