



www.volsu.ru

DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.4.6>

УДК 519.6:530.1

ББК 22.19+22.31

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ БРИЗЕРНЫХ РЕШЕНИЙ $(2 + 1)$ -МЕРНОЙ $O(3)$ НЕЛИНЕЙНОЙ СИГМА-МОДЕЛИ

Фарход Шамсидинович Шокиров

Кандидат физико-математических наук, научный сотрудник
сектора теоретической физики,
Физико-технический институт им. С.У. Умарова АН РТ
shokirov@rambler.ru, shokirov@phti.tj
просп. Айни, 299/1, 734063 г. Душанбе, Республика Таджикистан

Аннотация. Методами численного моделирования проведено исследование процессов взаимодействия бризерных решений в фазовом пространстве $(2 + 1)$ -мерной суперсимметричной $O(3)$ нелинейной сигма-модели. Получены модели лобовых столкновений, где в зависимости от динамических параметров системы наблюдаются процессы объединения бризеров, образования связанных состояний (сдвоенных бризеров), столкновения и отражения, прохождения бризеров друг сквозь друга, а также их разрушения. Показано, что бризеры $O(3)$ нелинейной сигма-модели при взаимодействии более устойчивы относительно аналогичных решений уравнения синус-Гордона. При наличии ротационной изоспиновой динамики система бризерных полей после столкновения излучая определенную часть энергии, сохраняет структурную устойчивость с характерной периодической осцилляцией. Выявлены свойства продольно-поперечных колебаний сдвоенных бризеров и скачкообразного увеличения скорости бризеров, отражающихся друг от друга после взаимодействия. Численные модели построены на основе методов теории конечных разностных схем с использованием свойств стереографической проекции, с учетом теоретико-групповых особенностей конструкций класса $O(N)$ нелинейных сигма-моделей теории поля. Разработан комплексный программный модуль, реализующий алгоритм численного расчета.

Ключевые слова: нелинейная сигма-модель, разностная схема, стереографическая проекция, сфера Блоха, усредненный лагранжиан, уравнение синус-Гордона.

Введение

Исследование процессов формирования, эволюции и взаимодействия пространственно-однородных колебательных мод, которые можно интерпретировать как классические модели составных частиц (например, поле мезонов), является нетривиальной задачей в солитонной теории [1; 2; 4; 6; 11; 13; 16; 19–21; 23; 26]. Особым классом практических задач в данной теории является поиск и исследование свойств локализованных когерентных структур, обладающих собственной динамикой внутренней степени свободы — так называемых пузырей, пульсонов, бионов [1; 2; 6; 19; 20], бризеров, световых пульс [4; 11; 13; 16; 21; 23; 26]. В работе [14] был предложен один из вариантов асимптотического решения данной задачи в рамках $(2 + 1)$ -мерной $O(3)$ нелинейной сигма-модели (НСМ). В настоящей работе на основе результатов, полученных в работе [14] (см. также [25]), проведением численных расчетов построены модели, описывающие процессы взаимодействия бризерных решений $(2 + 1)$ -мерной $O(3)$ НСМ. Моделирование процессов взаимодействия данных решений проведено с целью более подробного изучения их реальной динамики [6] и структурной устойчивости. Полученные в работе [14] двумерные осциллирующие решения сохраняют устойчивость в течение достаточно долгого времени численного моделирования ($t \in [0; 270]$), где потеря энергии на излучение составляет: $En_{rad} \leq 5,15 \%$. Заметим, что численные исследования осциллирующих решений теоретико-полевых моделей с использованием вычислительных процессоров имеют более чем полувековую историю (см., например, [1; 2; 6; 19; 20] и указанную в них литературу). В частности, в работах [1; 2] были обнаружены и исследованы метастабильные (с временем жизни порядка 10^3 периодов осцилляций) пульсирующие солитоны, так называемые пульсоны уравнения синус-Гордона (УСГ) в сферическом трехмерном пространстве. Подробное исследование процессов взаимодействия цилиндрически-симметричных пульсонов и так называемых Q -солитонов проведено в работах [6; 19; 20]. В частности, в указанных работах построены модели лобовых столкновений пульсонов и обнаружено, что при взаимодействии время жизни пульсонов остается таким же, как и в свободном состоянии. Также было показано, что существуют некоторые критические величины v_{cr} скорости движения взаимодействующих пульсонов, определяющие процесс образования их связанных состояний ($v \leq v_{cr}$) или выхода из взаимодействия ($v > v_{cr}$) с последующим их разрушением [6; 19].

В настоящей работе проведением экспериментов, аналогичных вышеуказанным для бризерных решений $O(3)$ НСМ, полученных в работе [14], показано, что данные решения являются более устойчивыми как в свободном состоянии, так и при их взаимодействии.

Плотность функции Лагранжа и гамильтониан исследуемой $O(3)$ НСМ в стандартной (изоспиновой) параметризации можно записать в следующем виде (см., например, работы [3; 5; 9; 10; 15; 17; 18; 22]):

$$L = \frac{1}{2}[\partial_\mu s_a \partial^\mu s_a - (1 - s_3^2)], \quad (1)$$

$$H = \frac{1}{2}[(\partial_0 s_a)^2 + (\partial_1 s_a)^2 + (\partial_2 s_a)^2 + 1 - s_3^2], \quad (2)$$

где $\mathbf{S}(s_1, s_2, s_3) = \mathbf{S}(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ единичный вектор — триплет реальных скалярных полей, удовлетворяющих условию $\mathbf{S}^2 = 1$; $\partial_\mu \partial^\mu = g^{ik} \partial_\mu \partial_\mu = \partial_t \partial_t - \partial_x \partial_x - \partial_y \partial_y$ ($\mu = 0, 1, 2$; $a = 1, 2, 3$); g^{ik} — метрический тензор ($i, k = 1, 2, 3$). Первое слагаемое

в (1) является известным выражением функции Лагранжа НСМ в изотропном случае [3; 5; 9; 10; 15; 17; 18; 22; 25]. Исследование настоящей работы проведено в рамках анизотропной $O(3)$ НСМ, где анизотропия выбрана в направлении s_3 -компоненты. Симметрией модели является $O(3)$ — симметрия динамики изотопического вектора (изовектора) в блоховской сфере $S^2 = SU(2)/U(1) = SO(3)/SO(2)$. Таким образом, состояние исследуемой НСМ описывается движением точки на единичной двумерной сфере $S \subset \mathbb{R}^3$, эквивалентным движению конца изовектора \mathbf{S} . Лагранжиан анизотропной $O(3)$ НСМ использован как в изоспиновой параметризации (1), так и в эквивалентных эйлеровой

$$L = \frac{1}{2}[\partial_\mu \theta \partial^\mu \theta + \sin^2 \theta (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - 1)], \quad (3)$$

и комплексной параметризациях

$$L = 2 \frac{\partial_\mu \bar{z} \partial^\mu z - \bar{z} z}{(1 + \bar{z} z)^2}, \quad (4)$$

где $\theta = \theta(t) \in [0; 2\pi]$ и $\varphi = \varphi(t) \in [0, 2\pi]$ — эйлеровы углы; $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Соотношения между вышеуказанными параметризациями определяются на основе применения свойств стереографической проекции сферы S^2 на комплексную плоскость

$$z = x + iy = \frac{s_1 + is_2}{1 \pm s_3} = e^{i\varphi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (5)$$

Необходимость перехода на комплексную параметризацию состоит в численном подходе. Проблема заключается в том, что бесконечно большие величины, возникающие на полюсах блоховской сферы S^2 в обычной стереографической проекции, приводят к ошибке в машинном счете вследствие появления операции деления на ноль. Для преодоления данной проблемы в работе [10] была предложена идея проецирования точек нижней части сферы ($s_3 < 0$) на нижнюю комплексную плоскость, соответственно точек верхней полусферы ($s_3 > 0$) на дополнительную, верхнюю комплексную плоскость. Таким образом, при эволюции вектора изотопического спина на верхней/нижней части сферы расчеты проведены в верхней/нижней комплексной плоскости. Далее по «экватору» ($s_3 = 0$) специальным образом проводится «сшивки». В итоге получим параметризацию $O(3)$ НСМ в комплексном виде (4).

Соответствующие уравнения Лагранжа — Эйлера для $O(3)$ НСМ (1), (3) и (4) принимают следующий вид:

$$\partial_\mu \partial^\mu s_i + s_i (\partial_\mu s_a \partial^\mu s_a) - s_\gamma (\delta_{i\gamma} - s_i s_\gamma) = 0, \quad (6.1)$$

$$(1 + \bar{z} z) \partial_\mu \partial^\mu z - 2\bar{z} \partial_\mu z \partial^\mu z + z(1 - \bar{z} z) = 0, \quad (6.2)$$

$$2\partial_\mu \partial^\mu \theta + \sin(2\theta)(1 - \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi) = 0, \quad (6.3)$$

$$2 \cos \theta \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \sin \theta \partial_\mu \partial^\mu \varphi = 0,$$

где $\delta_{i\gamma}$ — символ Кронекера, $\mu = 0, 1, 2$; $i = 1, 2, 3$; $s_i s_i = 1$; $\gamma = 3$; $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Разностные схемы для численного моделирования составлены для уравнения (6.2). Значения плотности энергии бризерных полей определяются выражением (2) с учетом соотношений (5). Заметим, что $O(3)$ НСМ в частном случае сводится [3; 5; 10; 15; 17; 18; 22] к вполне интегрируемому уравнению синус-Гордона (УСГ). В случае уравнений (6.3)

движение изовектора \mathbf{S} ограничивается меридианным сечением — $\varphi = 0$, $\theta \in [0; 2\pi]$ (рис. 1а) пространства сферы S^2 и с учетом (5) описывается УСГ следующего вида:

$$\theta_{tt} - \theta_{xx} - \theta_{yy} + \frac{1}{2} \sin(2\theta) = 0. \tag{7}$$

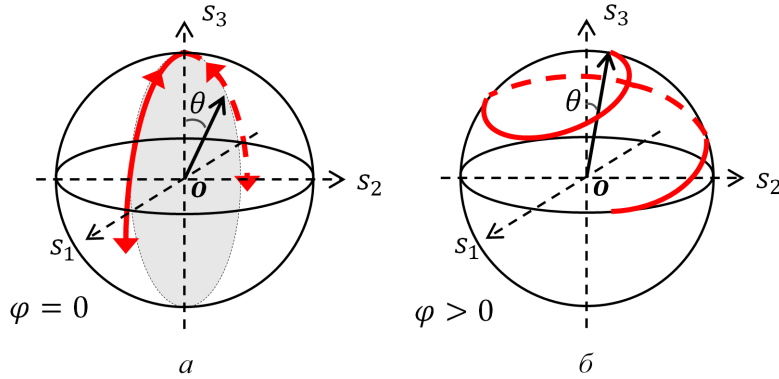


Рис. 1. Динамика $\mathbf{S}(s_1, s_2, s_3)$ в пространстве сферы S^2 : а — $\varphi = 0$; б — $\varphi > 0$

В численных экспериментах настоящей работы использованы приближенные решения осциллирующего типа, найденные в работе [14] методом усреднения лагранжиана $(2 + 1)$ -мерного УСГ следующего вида:

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} + \sin u = 0. \tag{8}$$

Исследования, проведенные в работе [14], были мотивированы результатами работы [21], где в гамильтоновом подходе на основе пробной функции вида

$$u(x, y, t) = -4 \arctg[\lambda(t)(1 - \lambda(t)^2)^{-1/2} \sin \nu(t) \operatorname{ch}^{-1}(\lambda x) \operatorname{ch}^{-1}(\lambda y)] \tag{9}$$

были получены относительно устойчивые решения УСГ (8), названные в указанной работе бризерами. В работе [14] выражение для усредненного лагранжиана УСГ (8)

$$L = \frac{1}{2}(u_t^2 - u_x^2 - u_y^2) - 1 + \cos u$$

относительно быстрой фазы $\nu(t)$ получено в следующем виде:

$$L = 2\lambda_t^2(1 - \lambda^2)^{-3/2} + (1 - \lambda^2)^{-1/2}4\lambda^2\nu_t^2 - 16(3\lambda^{-1} \operatorname{th}^{-1} \lambda - 2). \tag{10}$$

Выражение (10) зависит только от фазовых переменных $\lambda(t)$ и $\nu(t)$, которые являются основными параметрами, определяющими динамику пробной функции (9) [21]. В работе [14] из уравнения Лагранжа — Эйлера для (10) были получены выражения для $\lambda(t)$ и $\nu(t)$. Полученное бризерное решение вида (9) в изоспиновой параметризации s_i ($i = 1, 2, 3$) принимает следующий вид:

$$s_1 = -2\xi/(1 + \xi^2) \cos \varphi, \quad s_2 = -2\xi/(1 + \xi^2) \sin \varphi, \quad s_3 = (1 - \xi^2)/(1 + \xi^2), \tag{11}$$

$$\xi(x, y, t) = \lambda(1 - \lambda^2)^{-1/2} \sin \nu \operatorname{ch}^{-1}(\lambda x) \operatorname{ch}^{-1}(\lambda y).$$

В работе [14] на основе найденных параметров $\lambda(t)$ и $\nu(t)$ были построены численные модели неподвижных и движущихся решений вида (9) УСГ (7) в рамках $O(3)$ НСМ (при $\varphi = 0$ в (11)). В частности, было показано, что найденные решения сохраняют устойчивость в течение достаточно долгого времени — $t \leq 270$. В случае неподвижных ($\nu(t_0) = 0$) бризеров для $t \in [0; 270]$ (45 000 итерационных циклов) потеря энергии (En_{loss}) [20] бризерного поля не превышала 5,15 % [14], где

$$En_{loss} = En(t_0) - En(t), \quad En(t) = \int H(x, y, t) dx dy.$$

Далее в работе [14] с учетом (7), добавлением возмущений трехкомпонентному изовектору $A3$ -поля $\mathbf{S}(s_1, s_2, s_3)$ в пространстве сферы $S^2 \in R^3$ (см. рис. 1б) [7; 9] построены решения для $O(3)$ НСМ (1). Показана устойчивость построенных решений в стационарном и движущемся состояниях в течение достаточно долгого времени ($t \leq 270$), при этом бризеры $O(3)$ НСМ (1) оказались более стабильными ($En_{loss} \leq 4,8\%$, для $\varphi(t_0 + \tau) = \varphi(t_0) + 0,5\tau$, при $\nu(t_0) = 0$) по отношению к аналогичным решениям УСГ (7).

1. Численная модель двумерного бризера

В настоящей работе использован подход приближения разностных схем [12], а также алгоритм и численная схема, которые были предложены в работе [10] для неподвижного локализованного решения (см. также [9]). Использована трехслойная разностная схема второго порядка точности $O(\tau^2 + h^2)$ на пятиточечном шаблоне с весами явного типа [12]. Аппроксимация проведена на прямоугольной сетке $L(x, y)$: $4\,400 \times 2\,200$, где $h_x = h_y$ — шаг сетки по координате, τ — по времени. Устойчивость разностной схемы удовлетворяет требованиям для гиперболических систем уравнений: $\tau/h < 1$.

На рисунке 2 приведена иллюстрация распределения плотности энергии (2) (DH, Density of Hamiltonian) и ее контурной проекции [25] для случая $\nu(t_0) = 0$, $t_0 = 0$, а также динамика центральной точки $DH(0, 0, t)$ (11) при $t \in [0; 270]$. Наличие дополнительного вращения, заданного изовектору \mathbf{S} при $t_0 + \tau$ ($\varphi(t_0 + \tau) = \varphi(t_0) + \omega\tau$, $\omega \neq 0$) в пространстве сферы S^2 [25] (рис. 1б), приводит к формированию бризерного решения $O(3)$ НСМ (бризер с вращением изотопических спинов). При этом наблюдается увеличение площади DH (рис. 2б), определенная диссипация динамики внутренней степени свободы, а также увеличение значения интеграла энергии (En) бризерного поля [14; 25].

В экспериментах работы [14] в случае $\varphi = 0$ (рис. 3а,б) наблюдаются некоторые отклонения движения \mathbf{S} от плоской (см. рис. 1а) траектории (рис. 3в). В данном случае возмущения $\varphi_{pb} > 0$ вызваны воздействием линейных волн, отражающихся от границ области моделирования: $L[3001 \times 3001]$. По периметру L действуют специальные граничные условия [7; 9], которые поглощают линейные волны возмущений, излучаемые формирующимся бризером [10; 25]. Тем не менее при относительно интенсивном излучении определенная часть линейных волн, отражаясь от границ L , вносит некоторые возмущения $\varphi_{pb} \neq 0$ в динамику бризерного поля (11).

На рисунке 3 угол $\theta(t)$ определяет отклонение вектора изоспина от оси OZ , а $\varphi(t)$ — ротационную динамику вокруг этой оси [9; 14] (см. рис. 1б, 3в).

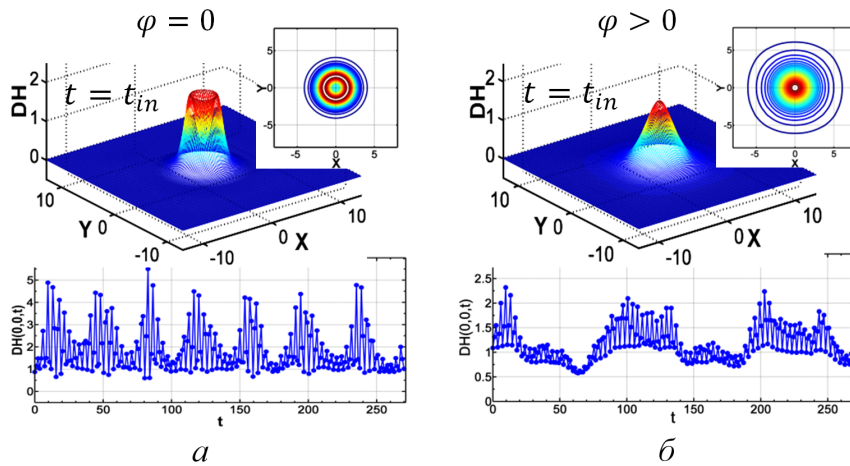


Рис. 2. Плотность энергии, ее контурная проекция и динамика центральной точки $DH(0, 0, t)$ стационарных бризеров вида (11) модели (1):
 $a - \varphi(t) = 0, t_{in} = 15, 8$; $b - \varphi(t) > 0 (\omega = 0, 5), t_{in} = 16, 8$.
 Общее время моделирования: $t \in [0; 270]$

НСМ обладают формальной лоренц-инвариантностью [3; 15], позволяющей провести в ее рамках исследование нелинейных свойств локализованных решений и динамику их взаимодействия [24].

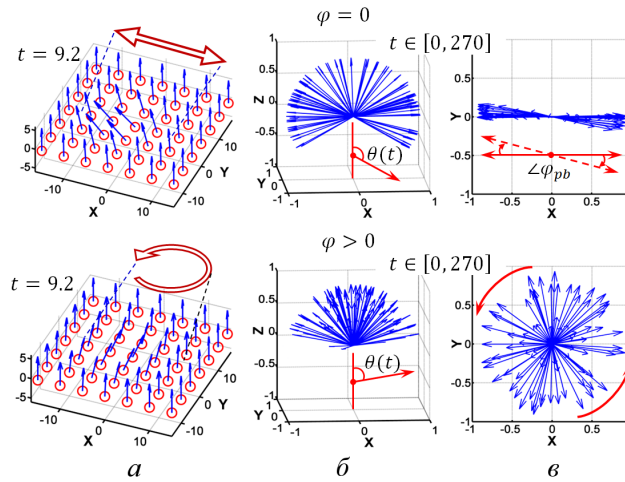


Рис. 3. Изоспиновая структура неподвижных бризеров (11) модели (1) при $\varphi(t) = 0$ (вверху) и $\varphi(t) > 0 (\omega = 0, 5)$ (внизу):
 $a -$ трехмерная иллюстрация при $t = 9, 2$ (в разряженном виде); $b -$ движение изовектора $\mathbf{S}(s_1, s_2, s_3)$ в точке $O(0, 0, 0)$; $c -$ проекция $\mathbf{S}(s_1, s_2, s_3)$ на плоскость (x, y) .
 Общее время моделирования: $t \in [0; 270]$

2. Взаимодействие бризеров УСГ

На первом этапе рассмотрим модели лобовых столкновений [24] бризеров (11) в рамках УСГ (7) при различных значениях скорости их движения (рис. 4), где

$$s_1 = -2\xi/(1 + \xi^2), \quad s_2 = 0, \quad s_3 = (1 - \xi^2)/(1 + \xi^2), \quad (12)$$

$$\xi(x, y, t) = \lambda(1 - \lambda^2)^{-1/2} \sin v \operatorname{ch}^{-1}(\lambda x) \operatorname{ch}^{-1}(\lambda y).$$

В данном случае в зависимости от значения скорости движения сталкивающихся бризеров наблюдается три вида эволюции системы: $|v(t_0)| \leq 0,38$ — объединение бризеров; $|v(t_0)| \in (0,39; 0,61)$ — разрушение бризеров; $|v(t_0)| \geq 0,63$ — прохождение бризеров друг сквозь друга. Скорость движения бризеров указана в долях скорости света (в вакууме): $c = 1$.

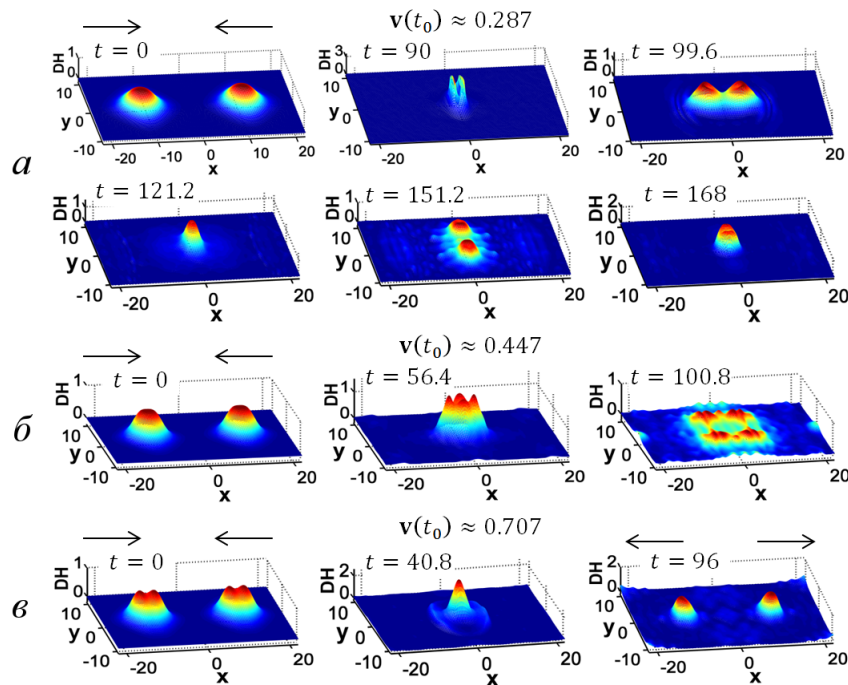


Рис. 4. Плотность энергии процесса столкновения бризеров (11) УСГ (7) с заданной начальной скоростью ($t_0 = 0, \omega = 0$):
 а — $v(t_0) \approx \pm 0,287$; б — $v(t_0) \approx \pm 0,447$; в — $v(t_0) \approx \pm 0,707$.
 Общее время моделирования: $t \in [0; 168]$

Объединение бризеров ($v(t_0) \approx \pm 0,287$). Бризеры при столкновении объединяются в единое устойчивое осциллирующее возмущение поля (рис. 4а). Потеря энергии системы взаимодействующих бризеров на излучение составляет $En_{loss} \approx 4,33\%$. Особым свойством данной серии экспериментов являются периодические колебания составляющих осциллирующего возмущения строго в продольном и поперечном направлениях (см., например, рис. 4а: $t = 99,6, t = 151,2$).

Разрушение бризеров ($v(t_0) \approx \pm 0,447$). Бризеры при столкновении образуют локализованное осциллирующее возмущение, которое постепенно разрушается периодическим излучением энергии (рис. 4б).

Прохождение бризеров друг сквозь друга ($v(t_0) \approx \pm 0,707$). В отличие от предыдущих экспериментов в этом случае сталкивающиеся бризеры проходят друга сквозь друга (рис. 4в), хотя и при наличии излучения определенной части их энергии в виде линейных волн возмущений: $En_{loss} \approx 16,48 \%$.

3. Взаимодействие бризеров $O(3)$ НСМ

Столкновение бризеров при $\omega_{right} = \omega_{left}$. В случае столкновения бризеров (11) $O(3)$ НСМ (1) с одинаковыми значениями ω , при всех значениях скорости их движения наблюдается объединение бризеров в единое осциллирующее возмущение. На рисунке 5 приведены результаты данной серии экспериментов при различных значениях $v(t_0)$ и $\omega = 0,5$, где $En_{loss} = 8,08 \%$ (а), $En_{loss} = 10,64 \%$ (б), $En_{loss} = 19,45 \%$ (в).

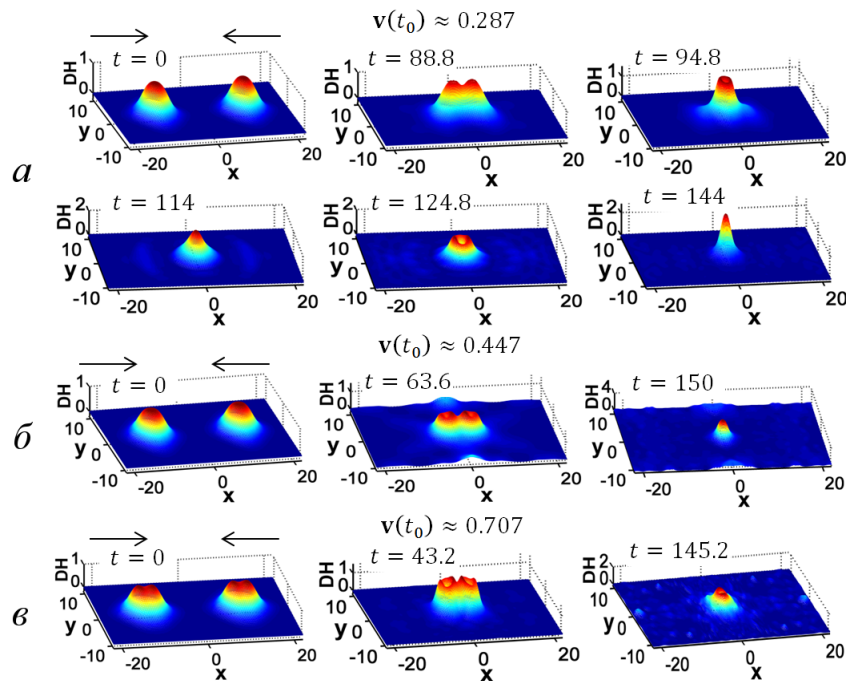


Рис. 5. Плотность энергии процесса столкновения бризеров (11) $O(3)$ НСМ (1) с заданной начальной скоростью ($t_0 = 0$, $\varphi(t_0 + \tau) = \varphi(t_0) \pm 0,5\tau$):
 а – $v(t_0) \approx \pm 0,287$; б – $v(t_0) \approx \pm 0,447$; в – $v(t_0) \approx \pm 0,707$.
 Общее время моделирования: $t \in [0; 150]$

Столкновение бризеров при $\omega_{right} = -\omega_{left}$. Аналогично предыдущему пункту рассмотрены модели лобовых столкновений бризеров (11) $O(3)$ НСМ (1), но при значениях ω , описывающих взаимно обратные направления вращения вектора A_3 -поля (рис. 6). В этой серии экспериментов наблюдается два варианта эволюции: отражение бризеров друг от друга (при $|v(t_0) \leq 0,41|$) и разрушение одного из бризеров (при $|v(t_0) \geq 0,42|$).

Столкновение и отражение ($v(t_0) \approx \pm 0,287$). На рисунке 6а приведены результаты экспериментов, где бризеры после столкновения отражаются друг от друга. Потеря энергии системы на излучение составляет $En_{loss} = 7,81 \%$. Наблюдается внезапное увеличение скорости движения бризеров.

Разрушение бризера с $\omega_{left} < 0$. На рисунках 6б и 6в приведены результаты

для $v(t_0) \approx \pm 0,447$ и $v(t_0) \approx \pm 0,707$ соответственно. Во всех экспериментах данной серии при столкновении наблюдается разрушение бризера, движущегося в обратном направлении по x .

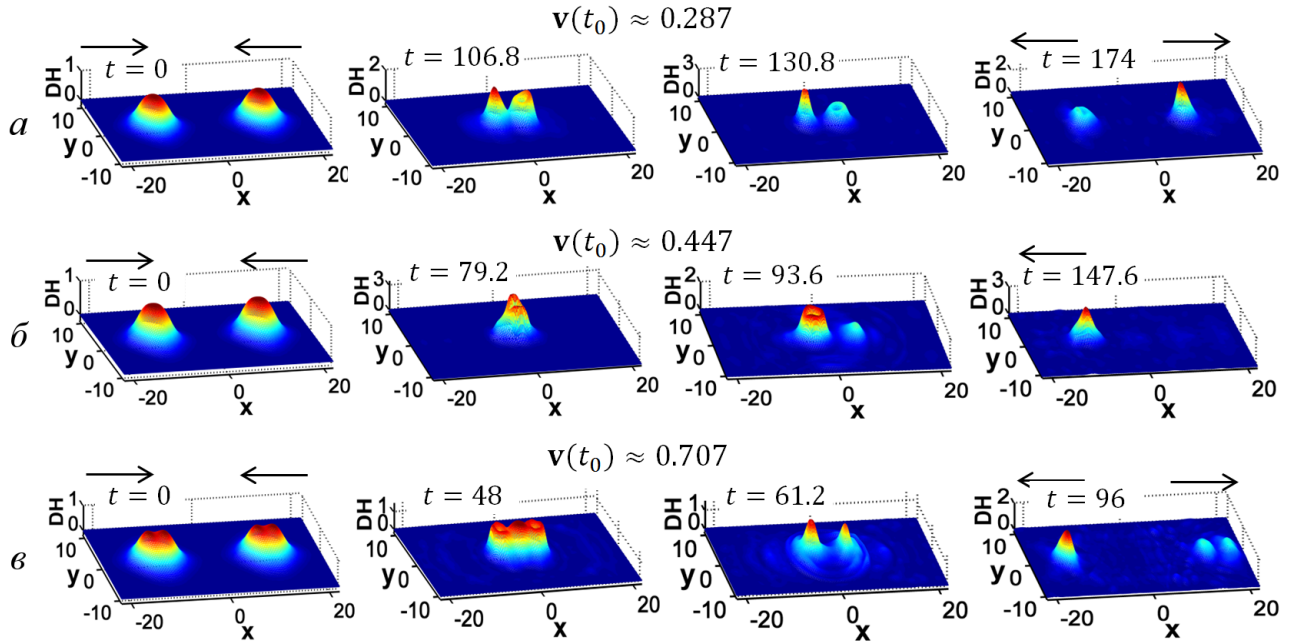


Рис. 6. Плотность энергии процесса столкновения бризеров (11) $O(3)$ НСМ (1) с заданной начальной скоростью движения ($t_0 = 0$, $\varphi_{right}(t_0 + \tau) = \varphi(t_0) + 0,5\tau$, $\varphi_{left}(t_0 + \tau) = \varphi(t_0) - 0,5\tau$):
 а — $v(t_0) \approx \pm 0,287$; б — $v(t_0) \approx \pm 0,447$; в — $v(t_0) \approx \pm 0,707$.
 Общее время моделирования: $t \in [0; 174]$

В данном случае возможно два варианта эволюции системы — столкновение и отражение бризеров или их прохождение друг сквозь друга. К сожалению, численные модели настоящей работы не позволяют ответить точно на данный вопрос. Потеря энергии систем на излучение составляют соответственно $En_{loss} = 44,82\%$ и $En_{loss} = 42,85\%$.

4. Взаимодействие бризеров $O(3)$ НСМ и УСГ

В этой части работы приведены результаты экспериментов по столкновению бризеров (11) $O(3)$ НСМ (движущихся в положительном направлении оси x) и бризеров (12) УСГ (движущихся в отрицательном направлении оси x), обладающих значениями частоты вращения вектора АЗ-поля $\omega_{NSM} = 0,5$ и $\omega_{SGE} = 0$ соответственно. Во всех экспериментах данной серии наблюдается процесс разрушения бризерного поля УСГ, который происходит особым образом (рис. 7).

На первом этапе при приближении друг к другу в резонансной зоне наблюдается притягивание («поглощение») бризерным полем $O(3)$ НСМ бризерного поля УСГ. Далее «объединенный» бризер периодически излучает часть энергии в виде радиально-симметричных линейных волн. Для моделей, приведенных на рисунке 7, величина излучаемой энергии имеет следующие значения: а — $En_{loss} = 17,56\%$; б — $En_{loss} = 20,4\%$; в — $En_{loss} = 31,34\%$.

5. Обсуждение полученных результатов

Статические свойства солитонных решений в большинстве случаев поддаются аналитическому исследованию, но процессы их взаимодействия удается исследовать лишь численными методами, особенно в случае осциллирующих солитонов [6]. В настоящей работе построением численных моделей фронтальных столкновений бризерных решений осуществлена попытка исследования динамики их взаимодействия. Все солитонные решения, использованные при построении моделей, были получены асимптотическими методами в работах [14; 25].

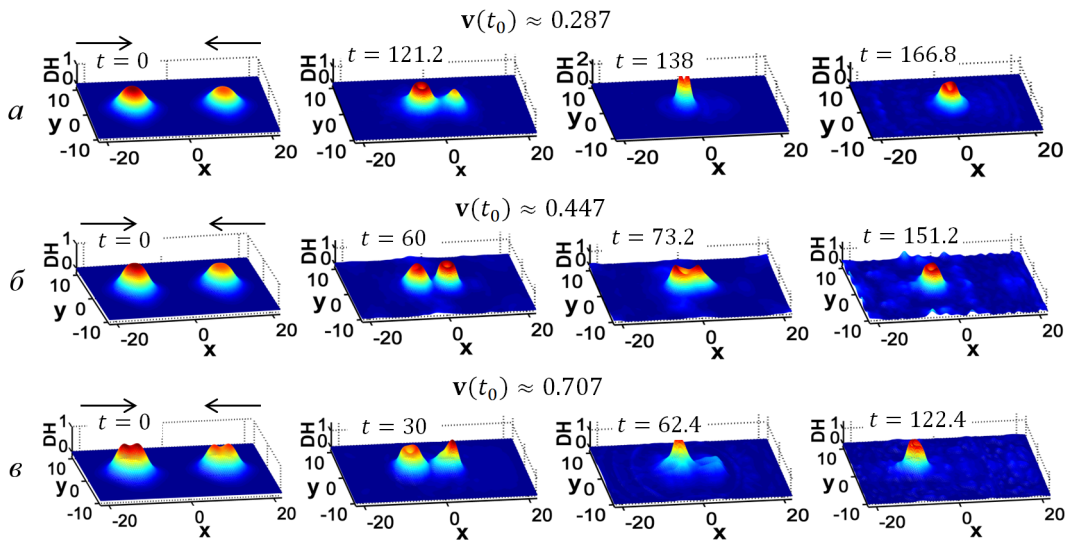


Рис. 7. Плотность энергии процесса столкновения бризеров (11) $O(3)$ НСМ (1) с заданной начальной скоростью ($t_0 = 0$, $\varphi_{right}(t_0 + \tau) = \varphi(t_0) + 0,5\tau$, $\varphi_{left}(t_0 + \tau) = 0$):
 а – $v(t_0) \approx \pm 0,287$; б – $v(t_0) \approx \pm 0,447$; в – $v(t_0) \approx \pm 0,707$.
 Общее время моделирования: $t \in [0; 166,8]$

Результаты первой группы экспериментов по лобовому столкновению бризерных решений УСГ (в рамках $O(3)$ НСМ при $\varphi(t) = 0$) приведены во второй части работы. Известно, что движущиеся солитоны вполне интегрируемого УСГ проходят друг сквозь друга с сохранением формы и энергии, приобретая лишь фазовый сдвиг. Однако в экспериментах, описанных на рисунке 4, столкновение бризерных солитонов УСГ при скоростях их движения в пределах $|v(t_0)| < 0,63$ не являются упругими (рис. 4а, б). Процесс взаимодействия бризеров при дальнейшем увеличении скорости их движения ($v(t_0) \rightarrow 1$) также не является упругим, хотя в этих экспериментах бризеры проходят друг сквозь друга (рис. 4в). В данном случае при взаимодействии бризеров происходит излучение значительной части их энергии (рис. 4в, $t \geq 40,8$). В первой группе экспериментов наблюдается образование сдвоенного осциллирующего возмущения с дополнительной динамикой продольно-поперечного колебания (рис. 4а). При средних скоростях движения ($0,39 < |v(t_0)| < 0,63$) сталкивающихся бризеров наблюдаются процессы объединения и последующего разрушения системы бризерных полей. Заметим, что, как было указано во введении, аналогичные результаты описаны в работе [6] в случае пульсирующих солитонов. Однако результаты настоящей работы показывают, что в отличие от случая пульсонов, разрушающихся как в свободном состоянии [1; 2; 19], так и при

взаимодействии [6; 20], бризерные решения вида (9) являются более устойчивыми. Заметим также, что неупругие взаимодействия (рис. 4) бризерных решений вида (9) в рамках УСГ можно объяснить, в частности, тем, что они получены в работе [14] методом усреднения лагранжиана и являются приближенными решениями. Тем не менее описанные процессы нуждаются в качественном анализе.

Результаты экспериментов по взаимодействию однотипных ($\varphi_{right}(t_0) = \varphi_{left}(t_0)$) бризеров $O(3)$ НСМ, так называемых возмущенных ($\omega \neq 0$) решений, как и в одномерном случае [7] сводятся к их слиянию в единое осциллирующее возмущение при всех задаваемых скоростях движения $v(t_0)$ взаимодействующих бризеров (рис. 5).

Интересные результаты получены при взаимодействии бризеров $O(3)$ НСМ, отличающиеся направлением вращения ($\pm\omega$) вектора АЗ-поля \mathbf{S} в пространстве блоховской сферы S^2 (рис. 6). Как показано на рисунке 6а, при малых скоростях движения взаимодействующих бризеров ($|v(t_0)| \leq 0,41$) имеют место процессы их столкновения и взаимного отражения. В этом случае в резонансной зоне проекции изотопических спинов $\mathbf{S}(s_1, s_2, s_3)$ взаимодействующих бризеров на комплексную плоскость S_z^p (рис. 3в) не коллинеарны и вращаются в противоположных направлениях: $S_{rot}^p(\uparrow\downarrow)$ [8].

В работе [8] при исследовании столкновения топологических решений было показано, что в этом случае происходит столкновение и отражение солитонов. Но при $0,41 < |v(t_0)| \rightarrow 1$ наблюдается однотипное нарушение симметричной эволюции системы, где в каждой серии экспериментов происходит разрушение бризерного солитона с отрицательным значением $-\omega$ (рис. 6б и 6в). При больших значениях $v(t_0) \rightarrow 1$ (рис. 6в) после взаимодействия наблюдается скачкообразное увеличение скорости движения взаимно-отраженных осциллирующих решений — бризера с положительным значением $+\omega$ и пульсирующего сгустка энергии, образовавшегося после разрушения бризера с отрицательным значением $-\omega$. Выявленные свойства также нуждаются в строгом теоретическом анализе.

В последней серии экспериментов по взаимодействию разнотипных бризеров — $O(3)$ НСМ ($\varphi(t_0 + \tau)$) и УСГ ($\varphi(t) = 0$) наблюдается процесс объединения бризерных солитонов (рис. 7). Но в данном случае, в отличие от экспериментов, описанных на рисунках 4 и 5, в резонансной зоне изоспиновая структура бризерного поля УСГ приобретает дополнительную вращательную динамику. Таким образом, происходит так называемое «поглощение» бризера УСГ возмущенным бризером $O(3)$ НСМ, после которого наблюдается периодическое излучение лишней энергии объединенного бризера в виде линейных радиально-симметричных волн.

Заключение

В рамках $(2 + 1)$ -мерной анизотропной $O(3)$ НСМ проведено численное моделирование процессов лобового столкновения локализованных осциллирующих (бризерных) решений вида (9). Численные эксперименты проводились при разных скоростях движения взаимодействующих бризеров и значений частоты вращения ($\omega \neq 0$) вектора изотопического спина $\mathbf{S}(s_1, s_2, s_3)$ в пространстве блоховской сферы S^2 . Для численных моделей использованы бризерные решения вида (11) и (12), полученные асимптотическими методами в работе [14]. Разработан программный модуль, позволяющий провести комплексный анализ эволюции взаимодействующих решений $O(3)$ НСМ теории поля с учетом ее групповых особенностей в двумерном псевдоевклидовом пространстве. Проведен анализ изоспиновой динамики, плотности (DH) и интеграла энергии (En) системы

взаимодействующих бризеров.

Целью настоящей работы было определение структурной устойчивости бризерных решений вида (9), найденных асимптотическими методами в работе [14], при их взаимодействии. Модели взаимодействующих бризеров в фазовом пространстве $(2+1)$ -мерной $O(3)$ НСМ, полученные в настоящей работе, показывают их устойчивость при определенных значениях параметров скорости движения $v(t)$ и частоты вращения вектора АЗ-поля ω . При этом бризерные решения $O(3)$ НСМ, обладающие ненулевым значением $\omega \neq 0$, являются более устойчивыми при взаимодействии относительно аналогичных решений УСГ ($\omega = 0$).

Результаты настоящей работы показывают также эффективность метода построения солитонных решений УСГ, предложенного в работе [21], где на основе пробного решения (9) усреднением плотности лагранжиана УСГ (8) были получены соответствующие интегральные уравнения. В работе [14] были найдены точные решения данных уравнений, на основе которых были определены выражения для фазовых параметров пробного решения вида (9). Таким образом, полученные в работе [14] и в настоящей работе результаты показывают возможность применения вышеописанного метода, апробированного в рамках УСГ и $O(3)$ НСМ, также для построения других видов солитонных решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбовский, И. Л. Динамика сферически-симметричных пульсонов большой амплитуды / И. Л. Боголюбовский, В. Г. Маханьков // Письма в ЖЭТФ. — 1977. — Т. 25, вып. 2. — С. 120–123.
2. Боголюбовский, И. Л. О времени жизни пульсирующих солитонов в некоторых классических моделях / И. Л. Боголюбовский, В. Г. Маханьков // Письма в ЖЭТФ. — 1976. — Т. 24, вып. 1. — С. 15–18.
3. Бутрим, В. И. Особенности релаксации магнонов в легкоплоскостном антиферромагнетике в рамках сигма-модели / В. И. Бутрим, Б. А. Иванов // Физика низких температур. — 2012. — Т. 38, № 12. — С. 1410–1421. — DOI: 10.1063/1.4771980.
4. Киселев, В. В. Нелинейная динамика бризеров в спиральных структурах магнетиков / В. В. Киселев, А. А. Расковалов // ЖЭТФ. — 2016. — Т. 149, вып. 6. — С. 1260–1269. — DOI: 10.4213/tmf8315.
5. Логинов, А. Ю. Связанные фермионные состояния в поле солитона нелинейной $O(3)$ σ модели / А. Ю. Логинов // Письма в ЖЭТФ. — 2014. — Т. 100, вып. 5. — С. 385–389. — DOI: 10.1134/S0021364014170093.
6. Маханьков, В. Г. Солитоны и численный эксперимент / В. Г. Маханьков // ФЭЧАЯ. — 1983. — Т. 14, № 1. — С. 123–180.
7. Муминов, Х. Х. Взаимодействие динамических и топологических солитонов в 1D нелинейной сигма-модели / Х. Х. Муминов, Ф. Ш. Шокиров // Доклады АН РТ. — 2016. — Т. 59, № 3–4. — С. 120–126.
8. Муминов, Х. Х. Изоспиновая динамика топологических вихрей / Х. Х. Муминов, Ф. Ш. Шокиров // Доклады АН РТ. — 2016. — Т. 59, № 7–8. — С. 320–326.
9. Муминов, Х. Х. Математическое моделирование нелинейных динамических систем квантовой теории поля / Х. Х. Муминов, Ф. Ш. Шокиров. — Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2017. — 375 с.
10. Муминов, Х. Х. Многомерные динамические топологические солитоны в нелинейной анизотропной сигма-модели / Х. Х. Муминов // Доклады АН РТ. — 2002. — Т. 45, № 10. — С. 28–36. — DOI: 10.1134/S0021364014170093.
11. Рысаева, Л. Х. Вероятность нарушения РТ-симметрии при столкновении бризеров со случайными фазами в модели плоского РТ-симметричного каплера / Л. Х. Рысаева

ва, С. В. Сучков, С. В. Дмитриев // Письма в ЖЭТФ. — 2014. — Т. 99, вып. 10. — С. 664–668. — DOI: 10.7868/S0370274X1410004X.

12. Самарский, А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. — М. : Физматлит, 2001. — 320 с.

13. Федоров, Э. Г. Взаимодействие электромагнитных бризеров в массиве углеродных нанотрубок / Э. Г. Федоров, А. В. Пак, М. Б. Белоненко // Физика твердого тела. — 2014. — Т. 56, вып. 10. — С. 2044–2049.

14. Шокиров, Ф. Ш. Математическое моделирование бризеров двумерной $O(3)$ нелинейной сигма-модели / Ф. Ш. Шокиров // Математическое моделирование и численные методы. — 2016. — № 4 (12). — С. 3–16. — DOI: 10.18698/2309-3684-2016-4-316.

15. Belonenko, M. B. Soliton antiferromagnetic lattice in carbon nanotubes / M. B. Belonenko, E. V. Demushkina, N. G. Lebedev // Russian Journal of Physical Chemistry B. — 2008. — Vol. 2, № 6. — P. 964–968. — DOI: 10.1134/S1990793108060146.

16. Oscillations of Eccentric Pulsons / P. L. Christiansen, N. Groenbech-Jensen, P. Lomdahl, B. A. Malomed // Physica Scripta. — 1997. — Vol. 55, № 2. — P. 131–134. — DOI: 10.1088/0031-8949/55/2/002.

17. Huang, R. Quantum Field Theory. From Operators to Path Integrals / R. Huang. — N. Y. : John Wiley & Sons Inc, 1998. — 416 p.

18. Kudryavtsev, A. Skyrmions and domain walls in $(2+1)$ dimensions / A. Kudryavtsev, B. Piette, W. Zakrzewski // Nonlinearity. — 1998. — Vol. 11. — P. 783–795. — DOI: 10.1088/0951-7715/11/4/002.

19. Makhankov, V. G. Dynamics of classical solutions (in non-integrable systems) / V. G. Makhankov // Phys. Rep. — 1978. — Vol. 35, iss. 1. — P. 1–128. — DOI: 10.1016/0370-1573(78)90074-1.

20. Makhankov, V. G. Many dimensional $U(1)$ solitons, their interactions, resonances and bound states / V. G. Makhankov, C. Kummer, A. B. Shvachka // Physica Scripta. — 1979. — Vol. 20. — P. 454–461.

21. Minzoni, A. A. Evolution of two-dimensional standing and travelling breather solutions for the sine-Gordon equation / A. A. Minzoni, N. F. Smyth, A. L. Worthy // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2004. — Vol. 189, iss. 3-4. — P. 167–187. — DOI: 10.1016/j.physd.2003.09.047.

22. Peskin, M. E. An Introduction to Quantum Field Theory / M. E. Peskin, D. V. Schroeder. — San Francisco : Addison-Wesley Publ. Comp, 1995. — 842 p.

23. Piette, B. Metastable stationary solutions of the radial D -dimensional sine-Gordon model / B. Piette, W. J. Zakrzewski // Nonlinearity. — 1998. — Vol. 11, № 4. — P. 1103–1110. — DOI: 10.1088/0951-7715/11/4/020.

24. Shokirov, F. Sh. Numerical simulation of breathers interactions in two-dimensional $O(3)$ nonlinear sigma model / F. Sh. Shokirov. — Arxiv.org: Cornell University Library. — Electronic text data. — Mode of access: <https://arxiv.org/abs/1608.02178>. — Title from screen.

25. Shokirov, F. Sh. Stationary and moving breathers in $(2+1)$ -dimensional $O(3)$ nonlinear σ -model / F. Sh. Shokirov. — Arxiv.org: Cornell University Library. — Electronic text data. — Mode of access: <https://arxiv.org/abs/1605.01000>. — Title from screen.

26. Xin, J. X. Modeling light bullets with the two-dimensional sine-Gordon equation / J. X. Xin // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2000. — Vol. 135, iss. 3-4. — P. 345–368. — DOI: 10.1016/S0167-2789(99)00128-1.

REFERENCES

1. Bogolyubskiy I.L., Makhankov V.G. Dinamika sfericheskii-simmetrichnykh pulsonov bolshoy amplitudy [Dynamics of Spherically Symmetrical Pulsons of Large Amplitude]. *Pisma v ZhETF* [JETP Letters], 1977, vol. 25, iss. 2, pp. 120-123.

2. Bogolyubskiy I.L., Makhankov V.G. O vremeni zhizni pulsiruyushchikh solitonov v nekotorykh klassicheskikh modelyakh [Lifetime of Pulsating Solitons in Some Classical Models]. *Pisma v ZhETF* [JETP Letters], 1976, vol. 24, iss. 1, pp. 15-18.
3. Butrim V.I., Ivanov B.A. Osobennosti relaksatsii magnonov v legkoploskostnom antiferromagnetike v ramkakh sigma-modeli [Specific Features of Relaxation of Magnons in an Easy-Plane Antiferromagnet in the Framework of the Sigma-Model]. *Fizika nizkikh temperatur* [Low Temperature Physics], 2012, vol. 38, no. 12, pp. 1410-1421. DOI: 10.1063/1.4771980.
4. Kiselev V.V., Raskovalov A.A. Nelineynaya dinamika brizerov v spiralnykh strukturakh magnetikov [Nonlinear Dynamics of Breathers in the Spiral Structures of Magnets]. *ZhETF* [JETP], 2016, vol. 149, iss. 6, pp. 1260-1269. DOI: 10.4213/tmf8315.
5. Loginov A.Yu. Svyazannye fermionnye sostoyaniya v pole solitona nelineynoy $O(3)$ σ modeli [Bound Fermion States in the Field of a Soliton of the Nonlinear $O(3)$ σ Model]. *Pisma v ZhETF* [JETP Letters], 2014, vol. 100, iss. 5, pp. 385-389. DOI: 10.1134/S0021364014170093.
6. Makhankov V.G. Solitony i chislenny eksperiment [Solitons and Numerical Experiment]. *FEChAYa* [Sov. J. Part. Nucl], 1983, vol. 14, no. 1, pp. 123-180.
7. Muminov Kh.Kh., Shokirov F.Sh. Vzaimodeystvie dinamicheskikh i topologicheskikh solitonov v 1D nelineynoy sigma-modeli [Interactions of Dynamical and Topological Solitons in 1D Nonlinear Sigma-Model]. *Doklady AN RT* [Reports of AS RT], 2016, vol. 59, no. 3-4, pp. 120-126.
8. Muminov Kh.Kh., Shokirov F.Sh. Izospinovaya dinamika topologicheskikh vikhrey [Isospin Dynamics of Topological Vortices]. *Doklady AN RT* [Reports of AS RT], 2016, vol. 59, no. 7-8, pp. 320-326.
9. Muminov Kh.Kh., Shokirov F.Sh. *Matematicheskoe modelirovanie nelineynykh dinamicheskikh sistem kvantovoy teorii polya* [Mathematical Modeling of Nonlinear Dynamical Systems of Quantum Field Theory]. Novosibirsk, ubl. House of SB RAS, 2017. 375 p.
10. Muminov Kh.Kh. Mnogomernye dinamicheskie topologicheskie solitony v nelineynoy anizotropnoy sigma-modeli [Multi-Dimensional Dynamical Topological Solitons in Nonlinear Anisotropic Sigma-Model]. *Doklady AN RT* [Reports of AS RT], 2002, vol. 45, no. 10, pp. 28-36. DOI: 10.1134/S0021364014170093.
11. Rysaeva L.Kh., Suchkov S.V., Dmitriev S.V. Veroyatnost narusheniya RT-simmetrii pri stolknovenii brizerov so sluchaynymi fazami v modeli ploskogo RT-simmetrichnogo kaplera [Probability of Breaking of the PJ Symmetry at Collision Between Breathers with Random Phases in the Model of a PJ Symmetric Planar Coupler]. *Pisma v ZhETF* [JETP Letters], 2014, vol. 99, iss. 10, pp. 664-668. DOI: 10.7868/S0370274X1410004X.
12. Samarskiy A.A., Mikhaylov A.P. *Matematicheskoe modelirovanie: Idei. Metody. Primery* [Principles of Mathematical Modelling: Ideas, Methods, Examples]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 320 p.
13. Fedorov E.G., Pak A.V., Belonenko M.B. Vzaimodeystvie elektromagnitnykh brizerov v massive uglerodnykh nanotrubok [Interaction of Two-Dimensional Electromagnetic Breathers in an Array of Carbon Nanotubes]. *Fizika tverdogo tela* [JETP Letters], 2014, vol. 56, iss. 10, pp. 2044-2049.
14. Shokirov F.Sh. Matematicheskoe modelirovanie brizerov dvumernoy $O(3)$ nelineynoy sigma-modeli [Mathematical Modeling of Breathers of Two-Dimensional $O(3)$ Nonlinear Sigma Model]. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennyye metody* [Mathematical modeling and Computational Methods], 2016, no. 4 (12), pp. 3-16. DOI: 10.18698/2309-3684-2016-4-316.
15. Belonenko M.B., Demushkina E.V., Lebedev N.G. Soliton Antiferromagnetic Lattice in Carbon Nanotubes. *Russian Journal of Physical Chemistry B*, 2008, vol. 2, no. 6, pp. 964-968. DOI: 10.1134/S1990793108060146.
16. Christiansen P.L., Groenbech-Jensen N., Lomdahl P., Malomed B.A. Oscillations of Eccentric Pulsons. *Physica Scripta*, 1997, vol. 55, no. 2, pp. 131-134. DOI: 10.1088/0031-8949/55/2/002.
17. Huang R. *Quantum Field Theory. From Operators to Path Integrals*. N. Y., John Wiley & Sons Inc, 1998. 416 p.
18. Kudryavtsev A., Piette B., Zakrzewski W. Skyrmions and Domain Walls in $(2 + 1)$ Dimensions. *Nonlinearity*, 1998, vol. 11, pp. 783-795. DOI: 10.1088/0951-7715/11/4/002.

19. Makhankov V.G. Dynamics of Classical Solutions (in Non-Integrable Systems. *Phys. Rep.*, 1978, vol. 35, iss. 1, pp. 1-128. DOI: 10.1016/0370-1573(78)90074-1.
20. Makhankov V.G., Kummer C., Shvachka A.B. Many Dimensional U(1) Solitons, Their Interactions, Resonances and Bound States. *Physica Scripta*, 1979, vol. 20, pp. 454-461.
21. Minzoni A.A., Smyth N.F., Worthy A.L. Evolution of Two-Dimensional Standing and Travelling Breather Solutions for the Sine-Gordon Equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2004, vol. 189, iss. 3-4, pp. 167-187. DOI: 10.1016/j.physd.2003.09.047.
22. Peskin M.E., Schroeder D.V. *An Introduction to Quantum Field Theory*. San Francisco, Addison-Wesley Publ. Comp, 1995. 842 p.
23. Piette B., Zakrjewsky W.J. Metastable Stationary Solutions of the Radial D-Dimensional Sine-Gordon Model. *Nonlinearity*, 1998, vol. 11, no. 4, pp. 1103-1110. DOI: 10.1088/0951-7715/11/4/020.
24. Shokirov F.Sh. *Numerical simulation of breathers interactions in two-dimensional O(3) nonlinear sigma model*. Arxiv.org: Cornell University Library. URL: <https://arxiv.org/abs/1608.02178>.
25. Shokirov F.Sh. *Stationary and moving breathers in (2+1)-dimensional O(3) nonlinear σ -model*. Arxiv.org: Cornell University Library. URL: <https://arxiv.org/abs/1605.01000>.
26. Xin J.X. Modeling Light Bullets with the Two-Dimensional Sine-Gordon Equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2000, vol. 135, iss. 3-4, pp. 345-368. DOI: 10.1016/S0167-2789(99)00128-1.

NUMERICAL SIMULATION OF THE INTERACTIONS OF BREATHER SOLUTIONS OF $(2 + 1)$ -DIMENSIONAL $O(3)$ NONLINEAR SIGMA MODEL**Farkhod Shamsidinovich Shokirov**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Research Fellow,
Theoretical Physics Sector,
S.U. Umarov Physical-Technical Institute of ASRT
shokirov@rambler.ru, shokirov@phti.tj
Prosp. Aini, 299/1, 734063 Dushanbe, Republic of Tajikistan

Abstract. By methods of numerical simulation the processes of interaction of breather solutions in the phase space of the $(2+1)$ -dimensional supersymmetric $O(3)$ nonlinear sigma model are investigated. Frontal collision models are obtained, where, depending on the dynamic parameters of the system, processes of combining the breathers, the formation of bound states (doubled breathers), collision and reflection, the passage of breathers through each other, as well as their destruction are observed. It is shown that the breathers of the $O(3)$ nonlinear sigma model in the interaction are more stable with respect to similar solutions of the sine-Gordon equation. In the presence of rotational isospin dynamics, the system of breather fields after the collision emits a certain part of the energy preserves structural stability with a characteristic periodic oscillation. Properties of longitudinal-transverse oscillations of doubled breathers and a sudden increase in the speed of breathers, reflected from each other after interaction, are revealed. Numerical models are constructed on the basis of methods of the theory of finite difference schemes, by using the properties of stereographic projection, taking into account the group-theoretical features of constructions of the $O(N)$ class of nonlinear sigma-models of field theory. A complex program module has been developed that implements the numerical calculation algorithm.

Key words: nonlinear sigma model, difference scheme, stereographic projection, Bloch sphere, averaged Lagrangian, sine-Gordon equation.