УДК 517.54+514.774
ББК 22.16+22.15

ЕВКЛИДОВО ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО В КЛАССЕ КОНФОРМНЫХ МЕТРИК НЕКОМПАКТНОГО РИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ

В.М. Кесельман

Для произвольного n-мерного некомпактного связного риманова многообразия в классе метрик, конформных исходной метрике многообразия, изопериметрическая функция многообразия приводится к асимптотически точной форме евклидова вида (как в пространстве $\mathbb{R}^n$).

Ключевые слова: *риманово многообразие, конформный тип многообразия, конформная емкость, конформные метрики, изопериметрическая функция.*

1. Изопериметрическое неравенство

Рассматривается произвольное **некомпактное** n-мерное $(n \geq 2)$ связное гладкое риманово многообразие (M^n, g) с краем ∂M^n, возможно пустым. Здесь g — исходная риманова метрика на M^n.

Для произвольной области $D \subset M^n$ будем обозначать через $V(D)$ и $S(\partial D)$, соответственно, *объем* (то есть n-мерный объем) области D и *площадь* (то есть $(n-1)$-мерный объем) границы ∂D, которую будем всюду далее предполагать гладкой.

Под *изопериметрическим неравенством* на многообразии (M^n, g) понимается, как обычно, соотношение вида

$$\mathcal{P}(V(D)) \leq S(\partial D), \qquad (\star)$$

справедливое для любой области $D \subset M^n$ конечного объема $V(D)$.

Здесь $\mathcal{P} = \mathcal{P}(x)$, $x \in (0, V(M^n))$, — некоторая функция, которая называется *изопериметрической функцией* многообразия (M^n, g).

При этом, если $\partial M^n \neq \emptyset$, то под границей ∂D будем понимать *относительную границу* области D, то есть ту часть ее полной границы, которая лежит во внутренности многообразия. В этом случае неравенство $(\star)$ называется также *относительным изопериметрическим неравенством*.

Поскольку любая положительная функция, которая не превосходит изопериметрическую функцию, сама является изопериметрической функцией, то среди всех изопериметрических функций многообразия наибольший интерес представляет наибольшая изопериметрическая функция многообразия. Такая функция существует, называется *изопериметрическим профилем многообразия* (M^n, g) и определяется следующим образом:

$$\forall x \in (0, V(M^n)) : \quad \mathcal{P}(x) := \inf_{\{D:\, V(D)=x\}} S(\partial D).$$

Изопериметрическая функция $\mathcal{P}$ будет профилем многообразия (M^n, g), если она является *асимптотически точной*, то есть для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство:

$$S(\partial D) \leq (1+\varepsilon)\,\mathcal{P}(V(D)) \qquad (\star\star)$$

для всех областей $D \subset M^n$ некоторого исчерпания многообразия M^n.

Назовем такое исчерпание *ε-асимптотически точным для функции $\mathcal{P}$ в метрике g*. Иными словами, это такое исчерпание многообразия, на котором в метрике g реализуется ε-асимптотическая точность изопериметрического неравенства с функцией $\mathcal{P}$.

При этом неравенство $(\star\star)$ будем называть *обратным изопериметрическим неравенством* для функции $\mathcal{P}$.

2. Классические изопериметрические неравенства

Напомним хорошо известные изопериметрические неравенства для двух классических n-мерных многообразий: евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и пространства Лобачевского $\mathbb{H}^n$.

В $\mathbb{R}^n$ выполняется так называемое *евклидово изопериметрическое неравенство*:

$$c\,V(D)^{\frac{n-1}{n}} \leq S(\partial D),$$

то есть пространство $\mathbb{R}^n$ имеет изопериметрическую функцию вида $\mathcal{P}(x) = c \cdot x^{\frac{n-1}{n}}$, где $c = nv_n^{1/n}$, v_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

Евклидово изопериметрическое неравенство и соответствующая изопериметрическая функция являются точными в пространстве $\mathbb{R}^n$, то есть для указанной функции $\mathcal{P}$ неравенство $(\star)$ обращается в равенство, причем эта точность достигается на любом шаре $D \subset \mathbb{R}^n$.

В пространстве $\mathbb{H}^n$ выполняется *линейное изопериметрическое неравенство*

$$c\,V(D) \leq S(\partial D),$$

то есть $\mathbb{H}^n$ имеет изопериметрическую функцию линейного вида $\mathcal{P}(x) = c \cdot x$, где $c = n-1$.

Линейное изопериметрическое неравенство и соответствующая линейного вида изопериметрическая функция являются асимптотически точными в $\mathbb{H}^n$ (в смысле выполнимости неравенства $(\star\star)$ для указанной функции $\mathcal{P}$), причем эта точность реализуется на шаровых исчерпаниях пространства $\mathbb{H}^n$.

3. Класс конформных метрик многообразия. Формулировка гипотезы

На произвольном многообразии (M^n, g) любая его изопериметрическая функция, включая наибольшую, может иметь сколь угодно сложный вид, или, наоборот, быть только тождественно нулевой. Примеры таких многообразий (M^n, g) легко построить.

Однако при изменении метрики g изопериметрическая функция многообразия M^n, конечно, меняется.

В связи с теорией квазиконформных отображений нас интересуют конформные замены метрики, точнее, класс римановых метрик $\tilde{g}$ на M^n,

$$\tilde{g} = \lambda^2 g, \quad \lambda > 0,$$

полученных умножением метрики g на произвольные гладкие положительные функции на M^n. Такие метрики $\tilde{g}$ называются *конформно-эквивалентными*, или, короче, *конформными* метрике g. В совокупности они составляют *класс конформных метрик многообразия* (M^n, g).

Будем говорить, что некоторое свойство, например, изопериметрическое неравенство, *выполняется в классе конформных метрик многообразия* (M^n, g), если оно справедливо относительно какой-либо метрики на M^n, конформной метрике g.

В.А. Зоричем был поставлен вопрос: какой наиболее простой вид имеет изопериметрическое неравенство в классе конформных метрик произвольного некомпактного многообразия (M^n, g), или, иными словами, к какому «нормальному» виду (кроме $\mathcal{P} \equiv 0$) можно привести изопериметрическую функцию многообразия (M^n, g) посредством конформных замен его исходной метрики.

В процессе исследования характера изменения изопериметрической функции многообразия при конформных изменениях его метрики возникла (и была высказана В.А. Зоричем) следующая общая гипотеза [1]:

Для произвольного связного некомпактного риманова многообразия (M^n, g) *в классе его конформных метрик найдется метрика, в которой изопериметрическая функция многообразия имеет один из двух канонических видов, а именно:*

- либо евклидовый вид $\mathcal{P}(x) = c \cdot x^{\frac{n-1}{n}}$ *(как в пространстве* $\mathbb{R}^n$*),*

- либо линейный вид $\mathcal{P}(x) = c \cdot x$ *(как в пространстве* $\mathbb{H}^n$*),*

с точностью до значений коэффициентов **c** *в соответствующих видах изопериметрических функций.*

При этом указанная изопериметрическая функция является асимптотически точной (в более общем варианте гипотезы, *наибольшей изопериметрической функцией многообразия*).

К настоящему времени сформулированная гипотеза в целом доказана, причем в уточненной форме — см. теорему 1 раздела 6. Уточнение гипотезы состоит в том, что возможность приведения изопериметрической функции многообразия к одному из указанных канонических видов (евклидову или линейному) зависит от того, какой конформный тип имеет данное многообразие.

Упомянутое здесь понятие конформного типа многообразия требует, естественно, определения, к которому мы сейчас перейдем, предварительно отметив один из истоков возникновения этого понятия и его роль для обоснования гипотезы в простейшем случае.

4. Двумерный случай

Рассмотрим данную гипотезу в простейшем случае **некомпактного двумерного односвязного многообразия** M^2 **без края** (иногда называемого *поверхностью*).

В силу теоремы униформизации (или обобщенной теоремы Римана), всякое такое многообразие M^2 конформно отображается либо на единичный круг, либо на евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$. В первом случае многообразие M^2 называется конформно гиперболическим (или говорят, что оно имеет гиперболический конформный тип), во втором случае M^2 называется конформно параболическим (или, говорят, оно имеет параболический конформный тип).

Тогда под действием указанного конформного отображения любая конформно евклидова метрика (в единичном круге или в $\mathbb{R}^2$) индуцирует на самом многообразии M^2 метрику, конформную его исходной метрике.

Поэтому, если многообразие M^2 имеет гиперболический конформный тип, то метрика Лобачевского в единичном круге, будучи конформно евклидовой, переносится указанным образом на само многообразие вместе со всеми метрическими соотношениями пространства $\mathbb{H}^2$, в частности, изопериметрическим неравенством Лобачевского.

Аналогично, если многообразие M^2 имеет параболический конформный тип, то евклидова метрика в $\mathbb{R}^2$ индуцирует конформно эквивалентную метрику на M^2, в которой сохраняются все метрические соотношения евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, в частности, евклидово изопериметрическое неравенство.

Таким образом, для двумерной односвязной некомпактной поверхности M^2 изопериметрическая функция действительно приводится посредством конформной замены метрики поверхности либо к евклидову виду пространства $\mathbb{R}^2$, либо к линейному виду пространства $\mathbb{H}^2$, причем в соответствии с тем, какой конформный тип имеет поверхность M^2, а именно, параболический или гиперболический, соответственно.

5. Понятие конформного типа n-мерного некомпактного риманова многообразия

Отмеченный выше в двумерном случае способ разделения некомпактных многообразий на конформно гиперболические и параболические не распространяется на n-мерные многообразия при $n > 2$, поскольку в этом случае, как известно, конформные отображения практически отсутствуют и потому нет аналогов теоремы униформизации.

Однако вместо конформных отображений многообразия (M^n, g) можно рассматривать конформные замены его метрики g (которые в случае поверхности (M^2, g) раздела 4 могут служить эквивалентной альтернативой конформным отображениям (M^2, g) в $\mathbb{R}^2$).

Тогда для распространения приведенного в двумерном специальном случае понятия конформного типа многообразия на произвольное многообразие (M^n, g) (при $n \geq 2$) следует использовать характеристики многообразия, сохраняющиеся при любых конформных заменах его метрики — так называемые *конформные инварианты* многообразия.

Одним из таких конформных инвариантов некомпактного риманова многообразия является *конформная емкость абсолюта* («бесконечности») многообразия, определяемая следующим образом.

Пусть G — произвольное открытое множество в M^n, а C — отличный от точки *континуум* (связный компакт) в G.

Конформной емкостью конденсатора (C, G) называется величина

$$\operatorname{cap}(C,\, G) = \inf \int_G |\nabla f|^n dv,$$

где inf берется по всем гладким финитным в G функциям f таким, что $f \equiv 1$ на C.

Известно, что на любом многообразии (M^n, g) имеет место альтернатива: *величина* $\operatorname{cap}(C,\, M^n)$ *либо положительна, либо равна нулю независимо от выбора невырожденного континуума* $C \subset M^n$.

Поскольку это свойство емкости $\operatorname{cap}(C,\, M^n)$ определяется только геометрией многообразия M^n на «бесконечности», то в указанных альтернативных случаях обычно говорят о положительной или нулевой конформной емкости абсолюта многообразия.

Известно (и легко проверить), что для пространства Лобачевского $\mathbb{H}^n$ конформная емкость его абсолюта положительна, а для евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ она равна нулю.

Принимается следующее определение (см., например, [2]):

- если $\operatorname{cap}(C, M^n) > 0$ *для любого или хотя бы одного невырожденного континуума* $C \subset M^n$ *(то есть конформная емкость абсолюта многообразия положительна), то многообразие* M^n *относится к конформно-гиперболическому типу;*

- если $\operatorname{cap}(C, M^n) = 0$ *для любого или хотя бы одного невырожденного континуума* $C \subset M^n$ *(то есть конформная емкость абсолюта многообразия нулевая), то* M^n *относится к конформно-параболическому типу.*

Поскольку величина $\operatorname{cap}(C, G)$ не меняется при конформных заменах исходной метрики многообразия, то конформный тип многообразия является его конформным инвариантом.

Тем самым, при любом $n \geq 2$, совокупность всех некомпактных римановых многообразий (M^n, g) конформно инвариантно (то есть инвариантно относительно конформных замен исходной метрики многообразия) разбивается на два класса: класс конформно-гиперболических многообразий (содержащий пространство Лобачевского $\mathbb{H}^n$) и класс конформно-параболических многообразий (содержащий евклидово пространство $\mathbb{R}^n$).

Отсюда, в частности, следует, что определение конформного типа произвольного многообразия (M^n, g) эквивалентно приведенному в разделе 4 определению в рассматриваемом там случае некомпактных односвязных двумерных поверхностей.

6. Теорема о нормальном виде изопериметрической функции

Исходя из классификации некомпактных многообразий на основе понятия конформного типа многообразия, а также с учетом проведенного в разделе 4 обсуждения двумерного случая, в формулировке гипотезы, приведенной в разделе 3, можно сделать естественное уточнение, касающееся зависимости канонического вида искомой изопериметрической функции от конформного типа данного многообразия, а именно: в классе конформных метрик многообразия (M^n, g) изопериметрическая функция многообразия, имеющая евклидов вид, существует на конформно параболическом многообразии, а имеющая линейный вид — на конформно гиперболическом многообразии.

Как уже было отмечено, уточненная гипотеза в целом получила подтверждение (хотя и остались некоторые не до конца выясненные моменты, о которых мы скажем ниже). В результате доказана следующая теорема.

Теорема 1 (о нормальном виде изопериметрической функции). *Пусть* (M^n, g) *— произвольное связное некомпактное риманово многообразие.*

Тогда при любом $\varepsilon > 0$ *можно построить метрику* $\tilde{g}$*, конформную исходной метрике* g*, такую что* $\tilde{g}$*-объем многообразия* M^n *бесконечный и на* $(M^n, \tilde{g})$ *выполняется изопериметрическое неравенство, в котором изопериметрическая функция* $\tilde{\mathcal{P}}$ *имеет следующий вид:*

- если (M^n, g) *— многообразие конформно-гиперболического типа, то* $\tilde{\mathcal{P}}(x) = a \cdot x$ *при всех* $x > 0$ *(где* $a > 0$ *— некоторая постоянная);*

- если (M^n, g) *— многообразие конформно-параболического типа, то* $\tilde{\mathcal{P}}(x) = b \cdot x^{\frac{n-1}{n}}$ *при всех* $x > \varepsilon$ *(где* $b > 0$ *— некоторая постоянная).*

При этом указанная изопериметрическая функция $\tilde{\mathcal{P}}$ *является* ε*-асимптотически точной на многообразии* $(M^n, \tilde{g})$*.*

Эту теорему можно дополнить следующей информацией о геометрическом виде исчерпания многообразия, на котором реализуется ε-асимптотическая точность изопериметрической функции $\tilde{\mathcal{P}}$.

Дополнение. В случае многообразия (M^n, g) конформно-гиперболического типа ε-асимптотически точное для линейного изопериметрического неравенства исчерпание многообразия является сколь угодно близким к $\tilde{g}$-шаровому исчерпанию многообразия M^n (то есть к исчерпанию, состоящему из концентрических геодезических $\tilde{g}$-шаров).

В случае многообразия (M^n, g) конформно-параболического типа ε-асимптотически точное для евклидова вида изопериметрического неравенства исчерпание многообразия является сколь угодно близким к $\tilde{g}$-шаровому исчерпанию *не самого многообразия M^n, а его подмногообразия*, полученного из M^n выбрасыванием некоторого неограниченного открытого множества конечного (сколь угодно малого) $\tilde{g}$-объема.

При этом метрика $\tilde{g}$ является полной.

Замечание. Первая часть теоремы — о приведении изопериметрической функции к линейному виду на конформно-гиперболических многообразиях — доказана в работах [1] и [3]. Вторая часть теоремы — о приведении изопериметрической функции к евклидову виду на конформно-параболических многообразиях — в работах [4] и [5].

Обратим внимание, что в теореме евклидов вид изопериметрической функции $\tilde{\mathcal{P}}(x)$, в отличие от линейного вида для конформно-гиперболического многообразия, установлен лишь для достаточно больших $x > 0$ (точнее, для $x > \varepsilon$, где ε априори сколь угодно мало́).

Это ограничение представляется вполне естественным для данной теоремы, поскольку конформный тип многообразия характеризует поведение многообразия только на «бесконечности» и поэтому может отвечать за выполнимость изопериметрического неравенства лишь для областей достаточно большого $\tilde{g}$-объема.

Тем не менее в случае многообразий конформно-гиперболического типа предположение об отграниченности от нуля $\tilde{g}$-объемом областей D не требуется (хотя в первоначальном доказательстве в [1] это предположение присутствовало, но в дальнейшем нам удалось от него освободиться в [3]).

Вполне возможно, что указанное ограничение является излишним и для конформно-параболических многообразий.

7. Об обращении теоремы о нормальном виде изопериметрической функции

Теорема 1 утверждает, что для произвольного многообразия (M^n, g) его изопериметрическую функцию можно привести с помощью конформного преобразования исходной метрики g к тому или иному асимптотически точному нормальному виду (линейному или евклидову) в зависимости от конформного типа данного многообразия.

Естественно, возникает вопрос о справедливости обратной теоремы о том, характеризуется ли конформный тип многообразия возможностью приведения его изопериметрической функции к линейному или евклидову виду (при условии или без условия асимптотической точности).

В случае **линейного вида изопериметрической функции** (какой она имеет в пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^n$) ответ на поставленный вопрос дает следующее предложение (см. [1]).

Предложение 1. *Если в некоторой метрике $\tilde{g}$, конформной исходной метрике многообразия (M^n, g), его $\tilde{g}$-объем бесконечен, а его изопериметрическая функция имеет вид $\tilde{\mathcal{P}}(x) = a \cdot x$, $a > 0$, при достаточно больших $x > 0$, то (M^n, g) — многообразие конформно-гиперболического типа.*

Это предложение является прямым следствием следующей известной нижней оценки конформной емкости (см., например, [6, с.48]):

$$\operatorname{cap}(C,\, M^n) \geq \left(\int_{\tilde{V}(C)}^{+\infty} \tilde{\mathcal{P}}(x)^{\frac{n}{1-n}}\, dx \right)^{1-n},$$

где C — произвольный континуум в M^n, $\tilde{g}$-объем которого $\tilde{V}(C) > 0$.

Поскольку для линейной изопериметрической функции интеграл в правой части сходится, то $\operatorname{cap}(C,\, M^n) > 0$. Значит, многообразие M^n — конформно-гиперболическое.

Таким образом, для первой части теоремы 1, утверждающей существование на конформно-гиперболическом многообразии (M^n, g) в классе его конформных метрик изопериметрической функции линейного вида, справедливо и обратное утверждение.

Более того, конформно-гиперболический тип многообразия гарантируется наличием в классе конформных метрик многообразия изопериметрической функции линейного вида $a \cdot x$ даже при достаточно больших $x > 0$ и без дополнительных предположений о точности этой изопериметрической функции.

Перейдем теперь к рассмотрению **евклидова вида изопериметрической функции** (который она имеет в пространстве $\mathbb{R}^n$).

В отличие от рассмотренного линейного вида изопериметрической функции существование на многообразии изопериметрической функции евклидова вида $b \cdot x^{\frac{n-1}{n}}$ (при достаточно больших $x > 0$) еще не определяет однозначно конформный тип данного многообразия, а именно, конформно-параболический тип.

Действительно, в силу теоремы 1 на любом многообразии (M^n, g) конформно-гиперболического типа в некоторой метрике $\tilde{g}$, конформной метрике g, существует изопериметрическая функция линейного вида $a \cdot x$ при $x > 0$. Следовательно, функция евклидова вида $a \cdot x^{\frac{n-1}{n}}$, будучи при $x > 1$ меньшей, чем $a \cdot x$, также является изопериметрической функцией многообразия $(M^n, \tilde{g})$ для всех областей $\tilde{g}$-объема $x > 1$.

Правда, в указанной метрике $\tilde{g}$ изопериметрическая функция евклидова вида не будет асимптотически точной ни на каком исчерпании многообразия (поскольку невозможно одновременное выполнение как линейного вида изопериметрического неравенства $(\star)$, так и евклидова вида обратного изопериметрического неравенства $(\star\star)$ для областей сколь угодно большого объема).

Тем не менее (см. теорему 2 следующего раздела) *в классе конформных метрик произвольного конформно-гиперболического многообразия (M^n, g) для любого $\varepsilon > 0$ можно построить метрику, в которой изопериметрическая функция многообразия является ε-асимптотически точной и имеет евклидов вид $b \cdot x^{\frac{n-1}{n}}$ при $x > \varepsilon$.*

Таким образом, для второй части теоремы 1, утверждающей существование на конформно-параболическом многообразии (M^n, g) в классе его конформных метрик асимптотически точной изопериметрической функции евклидова вида, обратное утверждение не справедливо.

Однако остается возможность обращения теоремы 1 для случая конформно-параболического многообразия, если дополнить ее утверждение определенным условием о характере исчерпания, на котором реализуется асимптотическая точность искомой изопериметрической функции $\tilde{\mathcal{P}}$ евклидова вида. Ориентиром в поиске такого обращения может стать следующее простое предложение.

Предложение 2. *Предположим, что для всех областей D некоторого исчерпания полного некомпактного риманова многообразия (M^n, g) бесконечного объема выполняется обратное изопериметрическое неравенство $(\star\star)$ для функции $\mathcal{P}$ евклидова вида $b \cdot x^{\frac{n-1}{n}}$, $b > 0$, при достаточно больших $x > 0$.*

Тогда если это исчерпание шаровое, то многообразие (M^n, g) имеет конформно-параболический тип.

Доказательство. Действительно, поскольку для любого шара $B(r) \subset M^n$ (радиуса r) его объем $V(r) := V(B(r))$ и площадь $S(r) := S(\partial B(r))$ его границы связаны соотношением $V'(r) = S(r)$, то обратное изопериметрическое неравенство $(\star\star)$ с функцией $\mathcal{P}(x) = b \cdot x^{\frac{n-1}{n}}$ для шарового исчерпания $\{B(r)\}$ переписывается в следующем виде:

$$V'(r) \leq c \cdot V(r)^{\frac{n-1}{n}}$$

при всех достаточно больших $r > 0$. Здесь $c > 0$ — некоторая постоянная.

Интегрируя это дифференциальное неравенство, получаем для всех достаточно больших r оценку: $V(r) \leq c \cdot r^n$ (с некоторой другой постоянной c), которая обеспечивает, как хорошо известно (см., например, [2]), конформно-параболический тип полного некомпактного многообразия M^n.

В настоящее время мы не знаем, может ли предложение 2 служить в качестве обратной теоремы к теореме 1 (в соответствующей уточненной форме) в случае многообразия конформно-параболического типа, поскольку имеющееся доказательство теоремы 1, как было сказано в дополнении к ней, предъявляет исчерпание, хотя и близкое к шаровому исчерпанию подмногообразия, но все же не к шаровому исчерпанию всего многообразия, которое фигурирует в условии предложения 2.

Тем не менее удалось выявить некоторые аналитические свойства построенного в доказательстве теоремы 1 асимптотически точного исчерпания, характеризующие его близость к шаровому исчерпанию, и с помощью этих свойств определить класс исчерпаний, на которые распространяется предложение 2. Об этом — в следующем разделе.

8. Евклидово изопериметрическое неравенство

В данном разделе мы сформулируем теорему о том, что в классе конформных метрик произвольного некомпактного многообразия (M^n, g) всегда выполняется асимптотически точное изопериметрическое неравенство евклидова вида.

При этом мы приведем аналитические свойства исчерпаний, на которых в случае конформно-параболических многообразий реализуется указанная асимптотическая точность евклидова вида изопериметрического неравенства, причем приводимые свойства исчерпания будут однозначно определять конформно-параболический тип многообразия.

Напомним, что под исчерпанием многообразия M^n понимается, как обычно, семейство областей $D(t) \subset M^n$, $t \geq t_0$, таких, что $D(t_1) \Subset D(t_2)$ при любых $t_0 \leq t_1 < t_2$, причем $\cup_t D(t) = M^n$. Говорят, что *исчерпание* $\{D(t)\}$ *порождается функцией исчерпания* h, если h — непрерывная функция на M^n такая, что $\overline{D(t)} = \{p \in M^n | \, h(t) \leq t\}$ для всех $t \geq t_0$.

В случае некомпактного полного риманова многообразия (M^n, g) стандартным примером его функции исчерпания является функция расстояния $r = d_g(p, p_0)$ текущей точки $p \in M^n$ до некоторой фиксированной точки $p_0 \in M^n$. Эта функция порождает шаровое исчерпание многообразия геодезическими шарами с центром в p_0. Известно, что r — локально-липшицева функция и $|\nabla h| = 1$ почти всюду в M^n.

Определение 1. *Исчерпание $\{D(t)\}$ многообразия (M^n, g) назовем $(1+\varepsilon)$-***близким к шаровому** *исчерпанию данного многообразия, если оно порождается локально-липшицевой функцией исчерпания h, удовлетворяющей следующим условиям:*

- существует открытое множество $U \subset M^n$, g-объем которого $< \varepsilon$, и такое, что почти всюду на $M^n \setminus U$ выполняются неравенства

$$\delta_1 \leq |\nabla h| \leq \delta_2$$

для некоторых положительных δ_1, δ_2, причем $\delta_2/\delta_1 < 1 + \varepsilon$;

- при почти всех достаточно больших $t > 0$

$$\sup_{\partial D(t) \cap U} |\nabla h| \leq f(t),$$

где функция f является неубывающей (при достаточно больших $t > 0$) и удовлетворяет условию $\int^{+\infty} \frac{dt}{f(t)} = +\infty$.

Теперь мы можем сформулировать анонсированную в начале данного раздела теорему, которая может служить дополнением к теореме 1 (см. раздел 6) о нормальном виде изопериметрической функции.

Теорема 2 (об изопериметрическом неравенстве евклидова вида). *Пусть (M^n, g) — произвольное связное некомпактное риманово многообразие.*

Тогда при любом $\varepsilon > 0$ можно построить метрику $\tilde{g}$, конформную исходной метрике g, такую что $\tilde{g}$-объем многообразия M^n бесконечный и на $(M^n, \tilde{g})$ выполняется ε-асимптотически точное изопериметрическое неравенство с изопериметрической функцией $\tilde{\mathcal{P}}$ евклидова вида $\tilde{\mathcal{P}}(x) = b \cdot x^{\frac{n-1}{n}}$ при всех $x > \varepsilon$ (где $b > 0$ — некоторая постоянная).

При этом, в случае конформно-параболического многообразия M^n метрику $\tilde{g}$ можно построить полной, а ε-асимптотически точное исчерпание для указанной функции $\tilde{\mathcal{P}}$ является $(1+\varepsilon)$-близким к шаровому исчерпанию многообразия $(M^n, \tilde{g})$.

Последнее утверждение этой теоремы можно дополнить замечанием о том, что в случае конформно-гиперболического многообразия M^n асимптотически точное исчерпание для изопериметрической функции $\tilde{\mathcal{P}}$ евклидова вида не может быть $(1+\varepsilon)$-близким к шаровому исчерпанию многообразия. Такое замечание никак не связано с конструкцией метрики $\tilde{g}$ в теореме 2, а является непосредственным следствием следующей общей теоремы.

Теорема 3. *Предположим, что для всех областей D некоторого исчерпания некомпактного риманова многообразия (M^n, g) бесконечного объема выполняется обратное изопериметрическое неравенство $(\star\star)$ для функции $\mathcal{P}$ евклидова вида $b \cdot x^{\frac{n-1}{n}}$, где $b > 0$ — постоянная.*

Тогда, если это исчерпание является $(1+\varepsilon)$-близким к шаровому исчерпанию многообразия (для какого-либо $\varepsilon > 0$), то многообразие имеет конформно-параболический тип.

Как видим, эта теорема распространяет предложение 2 (предыдущего раздела) с шаровых исчерпаний многообразия на исчерпания, близкие к шаровым.

С другой стороны, именно на таких исчерпаниях, в силу теоремы 2, реализуется асимптотическая точность евклидова вида изопериметрического неравенства в классе конформных метрик конформно-параболического многообразия.

Таким образом, как непосредственное следствие теорем 2 и 3, имеем.

Критерий конформной параболичности риманова многообразия. *Связное некомпактное риманово многообразие (M^n, g) имеет конформно-параболический тип тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая конформная исходной метрике многообразия полная метрика $\tilde{g}$, в которой объем многообразия $(M^n, \tilde{g})$ бесконечный и существует ε-асимптотически точная изопериметрическая функция $\tilde{\mathcal{P}}$ евклидова вида $\tilde{\mathcal{P}}(x) = b \cdot x^{\frac{n-1}{n}}$ при $x > \varepsilon$, причем соответствующее ε-асимптотически точное для указанной функции $\tilde{\mathcal{P}}$ исчерпание многообразия является $(1+\varepsilon)$-близким к шаровому исчерпанию многообразия $(M^n, \tilde{g})$.*

Выражаю свою искреннюю благодарность В.А. Зоричу за постоянное внимание и интерес к настоящей работе, ценные советы и замечания.

Я глубоко признателен В.М. Миклюкову и всем слушателям моего доклада по теме данной работы за интересные вопросы и обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зорич, В. А. Изопериметрическое неравенство на многообразиях конформно-гиперболического типа / В. А. Зорич, В. М. Кесельман // Функциональный анализ и его приложения. — 2001. — Т. 35, № 2. — С. 12–23.
2. Зорич, В. А. О конформном типе риманова многообразия / В. А. Зорич, В. М. Кесельман // Функциональный анализ и его приложения. — 1996. — Т. 30, № 2. — С. 40–55.
3. Кесельман, В. М. Изопериметрическое неравенство на конформно-гиперболических многообразиях / В. М. Кесельман // Мат. сб. — 2003. — Т. 194, № 4. — С. 29–48.
4. Кесельман, В. М. Изопериметрическое неравенство на конформно-параболических многообразиях / В. М. Кесельман // Мат. сб. — 2009. — Т. 200, № 1. — С. 3–36.
5. Кесельман, В. М. Об относительном изопериметрическом неравенстве на конформно-параболическом многообразии с краем / В. М. Кесельман // Мат. сб. — 2011. — Т. 202, № 7. — С. 117–134.
6. Миклюков, В. М. Геометрический анализ. Дифференциальные формы, почти решения, почти квазиконформные отображения / В. М. Миклюков. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2007. — 503 с.

EUCLIDEAN ISOPERIMETRIC INEQUALITY ON NON-COMPACT RIEMANNIAN MANIFOLD

V.M. Keselman

For arbitrary n-dimensional non-compact connected Riemannian manifold the isoperimetric function of the manifold can be reduced to Euclidean form (as in $\mathbb{R}^n$) in the class of Riemannian metrics conformal to the initial metric of the manifold; moreover this form is asymptotically sharp.

Key words: *Riemannian manifold, conformal type of manifold, conformal capacity, conformal metrics, isoperimetric function.*