www.volsu.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ,
ИНФОРМАТИКА И УПРАВЛЕНИЕ

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2019.2.5

УДК 517.951, 519.632
ББК 22.161, 22.19

Дата поступления статьи: 20.03.2019
Дата принятия статьи: 29.04.2019

# АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ 4-ГО ПОРЯДКА В КЛАССЕ КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НА ТРЕУГОЛЬНОЙ СЕТКЕ [1]

**Алексей Александрович Клячин**

Доктор физико-математических наук,
заведующий кафедрой математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
klyachin-aa@yandex.ru, matf@volsu.ru
https://orcid.org/0000-0003-3293-9066
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

**Владимир Александрович Клячин**

Доктор физико-математических наук,
заведующий кафедрой компьютерных наук и экспериментальной математики,
Волгоградский государственный университет
klchnv@mail.ru, klyachin.va@volsu.ru
https://orcid.org/0000-0003-1922-7849
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация



**Аннотация.** В настоящей работе определяется уклонение кусочно-кубического почти-решения бигармонического уравнения и выводится общая формула его вычисления. На основе данного понятия получена аппроксимация уравнения. Проведен ряд численных расчетов с целью экспериментального подтверждения полученной формулы.

**Ключевые слова:** кусочно-кубическая функция, почти-решение, бигармоническое уравнение, аппроксимация уравнения, уклонение кусочно-кубического почти-решения.

## Введение

Дадим необходимые определения. Пусть задана многогранная ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Рассмотрим произвольное разбиение этого многогранника на невырожденные тетраэдры $T_1$, $T_2$, ..., $T_N$ и пусть $M_1$, $M_2$, ..., $M_m$ — все вершины этих тетраэдров. Будем предполагать, что ни одна из точек $M_i$ не является внутренней точкой ни одной грани тетраэдров. Через $\Gamma_l$ будем обозначать грани всех тетраэдров, $l = 1, 2, ..., L$, а максимальный диаметр всех тетраэдров обозначим через $h$, т. е. $h = \max\limits_{1 \le k \le N} \mathrm{diam} T_k$.

В настоящей работе определяется понятие уклонения почти-решения бигармонического уравнения в классе кусочно-полиномиальных функций на треугольной сетке. На основе этого определения выводится простая формула вычисления уклонения и экспериментально подтверждается на нескольких примерах.

## 1. Понятие почти-решения бигармонического уравнения

В работе [3] вводится понятие почти-решения для эллиптических уравнений, которое для уравнения минимальных поверхностей

$$Q[f] \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{f_{x_i}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 0 \tag{1}$$

будет выглядеть следующим образом. Функция $f \in W^{1,p}(\Omega)$ называется почти-решением уравнения минимальной поверхности в области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, если найдется $\varepsilon \ge 0$ такое, что для любой функции $h \in C_0^1(\Omega)$, $|h(x)| \le 1$ в $\Omega$, выполнено

$$\left| \int\limits_{\Omega} \frac{\langle \nabla f, \nabla h \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} dx \right| \le \varepsilon.$$

Наименьшая из величин $\varepsilon \ge 0$, которую будем обозначать $\varepsilon_Q(f)$, удовлетворяющая этому определению, называется уклонением почти-решения $f(x)$. Другими словами,

$$\varepsilon_Q(f) = \sup \left| \int\limits_{\Omega} \frac{\langle \nabla f, \nabla h \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} dx \right|,$$

где точная верхняя грань берется по всем функциям $h \in C_0^1(\Omega)$ таким, что $|h(x)| \le 1$ в $\Omega$. Отметим, что если функция $f \in C^2(\Omega)$ и $\varepsilon_Q(f) = 0$, то функция $f$ является решением уравнения (1) в области $\Omega$.

В работе [1] на основе данного определения было введено понятие уклонения кусочно-линейного почти-решения уравнения (1), получена формула его вычисления на произвольной треугольной сетке. Там же доказана сходимость $\varepsilon_Q(f^L)$ к интегралу

$$\iint\limits_{\Omega} |Q[f]| dx dy$$

при стремлении мелкости сетки к нулю для $f \in C^2(\Omega)$, если уклонение вычисляется для кусочно-линейной функции $f^L$, совпадающей в узлах сетки с функцией $f$.

Для получения уравнения, аппроксимирующего бигармоническое уравнение

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0, \tag{2}$$

нам потребуется несколько видоизменить приведенное определение для класса кусочно-кубических функций. В связи с этим мы вводим понятие уклонения кусочно-кубического почти-решения и выводим формулу его вычисления.

Через $\varphi_i(x), i = 1, ..., m$, обозначим такую кусочно-линейную функцию, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\varphi_i(M_j) = 0 \text{ при } j \neq i, \ \varphi_i(M_j) = 1 \text{ при } j = i.$$

Будем в качестве почти-решения рассматривать кусочно-кубические функции. Поясним сказанное.

Зафиксируем произвольное натуральное число $q$. Для каждого тетраэдра $T_k$ будем строить полином следующим образом. Пусть $A_1^k, A_2^k, ..., A_{n+1}^k$ – вершины этого тетраэдра. Рассмотрим набор точек

$$B_{ij}^k = A_1^k + \frac{i_1}{q}\overrightarrow{A_2^k A_1^k} + ... + \frac{i_n}{q}\overrightarrow{A_{n+1}^k A_1^k},$$

где $i_1, ..., i_n = 0, ...q$ и $i_1 + ... + i_n \leq q$.

Отметим, что число этих точек $R_{q,n}$, включая вершины тетраэдра, определяется равенствами

$$R_{q,2} = \frac{(q+1)(q+2)}{2}, \ R_{q,n} = 1 + \sum_{i=1}^{q} R_{i,n-1}, \text{ для } n \geq 3.$$

Пусть $A_1, A_2, ..., A_{R_{q,n}}$ – все полученные точки в $T^k$. Зафиксируем некоторые постоянные значения $u_1, u_2, ...u_{R_{q,n}}$ и построим интерполяционный полином $P_k^q(x)$ степени $q$ такой, что

$$P_k^q(A_i) = u_i, \quad i = 1, 2, ..., R_{q,n}.$$

Вычисление коэффициентов многочлена $P_k^q$ сводится к решению линейной системы уравнений. Далее считаем, что $q = 3$. Построенную кусочно-кубическую функцию будем обозначать через $u(x)$.

Уклонением почти-решения $u(x)$ будем называть величину

$$\varepsilon_{\Delta\Delta}(u) = \sup \left| \sum_{k=1}^{N} \int_{T_k} \langle \nabla\Delta u, \nabla h \rangle dx \right|,$$

где точная верхняя грань берется по всем кусочно-линейным функциям вида

$$h(x) = \sum_{i=1}^{M} h_i \varphi_i(x)$$

таким, что $|h_i| \leq 1$ для всех $i = 1, ..., m$ и $h_i = 0$ для $M_i \in \partial\Omega$ (то есть для граничных вершин).

Зафиксируем произвольно $i = \overline{1, m}$. Пусть $T_1^i, T_2^i, ..., T_{k(i)}^i$ те тетраэдры, у которых вершиной будет точка $M_i$. Выходящие из этой вершины грани тетраэдра $T_j^i$, $j = 1, 2, ..., k(i)$, обозначим $\Gamma_{j1}^i$, $\Gamma_{j2}^i$, ..., $\Gamma_{jn}^i$ и пусть $\Gamma_{jn+1}^i$ оставшаяся грань тетраэдра $T_j^i$, противоположная вершине $M_i$. Обозначим через $\nu_{j1}^i$, $\nu_{j2}^i$, ..., $\nu_{jn}^i$, $\nu_{jn+1}^i$ – внешние по отношению к тетраэдру $T_j^i$ нормали этих граней. Так как в тетраэдре функция $u$ кубическая, то $\nabla\Delta u \equiv \mathrm{const}$. Ниже $|E|$ означает $(n-1)$-мерную меру множества $E$. Тогда

$$\int\limits_\Omega \langle \nabla\Delta u, \nabla h\rangle\, dx = \sum_{\text{внутр. } M_i} h_i \int\limits_\Omega \langle \nabla\Delta u, \nabla \varphi_i\rangle\ dx = \sum_{\text{внутр. } M_i} h_i \sum_{j=1}^{k(i)} \int\limits_{T_j^i} \langle \nabla\Delta u, \nabla \varphi_i\rangle\, dx.$$

Так как для полинома третьей степени $u$ выполнено $\mathrm{div}(\nabla\Delta u) = 0$, то

$$\sum_{\text{внутр. } M_i} h_i \sum_{j=1}^{k(i)} \int\limits_{T_j^i} \langle \nabla\Delta u, \nabla \varphi_i\rangle\, dx = \sum_{\text{внутр. } M_i} h_i \sum_{j=1}^{k(i)} \sum_{l=1}^{n+1} \langle \nabla\Delta u, \nu_{jl}^i\rangle \int\limits_{\Gamma_{jl}^i} \varphi_i\, dS =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\text{внутр. } M_i} h_i \sum_{j=1}^{k(i)} \sum_{l=1}^{n} \langle \nabla\Delta u, \nu_{jl}^i\rangle |\Gamma_{jl}^i|.$$

Последнее слагаемое в сумме по $l$ равно нулю, так как функция $\varphi_i = 0$ на грани $\Gamma_{jn+1}^i$. Преобразуем данное выражение следующим образом

$$\sum_{l=1}^{n} \langle \nabla\Delta u, \nu_{jl}^i\rangle |\Gamma_{jl}^i| = \sum_{l=1}^{n+1} \langle \nabla\Delta u, \nu_{jl}^i\rangle |\Gamma_{jl}^i| - \langle \nabla\Delta u, \nu_{jn+1}^i\rangle |\Gamma_{jn+1}^i| =$$

$$= \sum_{l=1}^{n+1} \int\limits_{\Gamma_{jl}^i} \langle \nabla\Delta u, \nu_{jl}^i\rangle dS - \langle \nabla\Delta u, \nu_{jn+1}^i\rangle |\Gamma_{jn+1}^i| = \int\limits_{\partial T_j^i} \langle \nabla\Delta u, \nu\rangle\, dS - \langle \nabla\Delta u, \nu_{jn+1}^i\rangle |\Gamma_{jn+1}^i| =$$

$$= -\langle \nabla\Delta u, \nu_{jn+1}^i\rangle |\Gamma_{jn+1}^i|,$$

так как интеграл равен нулю по формуле Гаусса — Остроградского. Поэтому приходим к равенству

$$\int\limits_\Omega \langle \nabla\Delta u, \nabla h\rangle\, dx = -\frac{1}{n} \sum_{\text{внутр. } M_i} h_i \sum_{j=1}^{k(i)} \langle \nabla\Delta u, \nu_{jn+1}^i\rangle |\Gamma_{jn+1}^i|.$$

Тогда

$$\varepsilon_{\Delta\Delta}(u) \le \frac{1}{n} \sum_{\text{внутр. } M_i} \left| \sum_{j=1}^{k(i)} \langle \nabla\Delta u, \nu_{jn+1}^i\rangle |\Gamma_{jn+1}^i| \right|.$$

Очевидно, что неравенство превращается в равенство для такой функции $h$, которая в граничных вершинах равна нулю, а во внутренних вершинах равна

$$h_i = \mathrm{sgn}\left( \sum_{j=1}^{k(i)} \langle \nabla\Delta u, \nu_{jn+1}^i\rangle |\Gamma_{jn+1}^i| \right).$$

Таким образом, справедливо утверждение.

**Теорема 1.** *Уклонение почти-решения $f^N$ уравнения минимальной поверхности вычисляется по формуле*

$$\varepsilon_{\Delta\Delta}(u) = \frac{1}{n} \sum_{\text{внутр. } M_i} \left| \sum_{j=1}^{k(i)} \langle \nabla \Delta u, \nu^i_{jn+1} \rangle |\Gamma^i_{jn+1}| \right|. \tag{3}$$

## 2. Экспериментальная проверка полученной формулы

Рассмотрим примеры численных расчетов величины (3). Вычисления будем проводить для функций, являющихся решением бигармонического уравнения (2) в области квадрата $[0,1] \times [0,1]$. Для осуществления вычислений стороны этого квадрата разбиваются на $N$ частей и в каждой полученной прямоугольной ячейке строится диагональ. Таким образом мы получим триангуляцию, для которой будем проводить вычисления согласно формуле (3).

В качестве инструментов проведения численных экспериментов была выбрана связка Python + NumPy. Модуль NumPy позволяет использовать 'C'-подобные массивы, которые обеспечивают уменьшение времени вычислений за счет более быстрого доступа к элементам по сравнению с обычными списками Python. Так же частично были использованы расчетные модули на триангуляциях, описанные в работе [2].

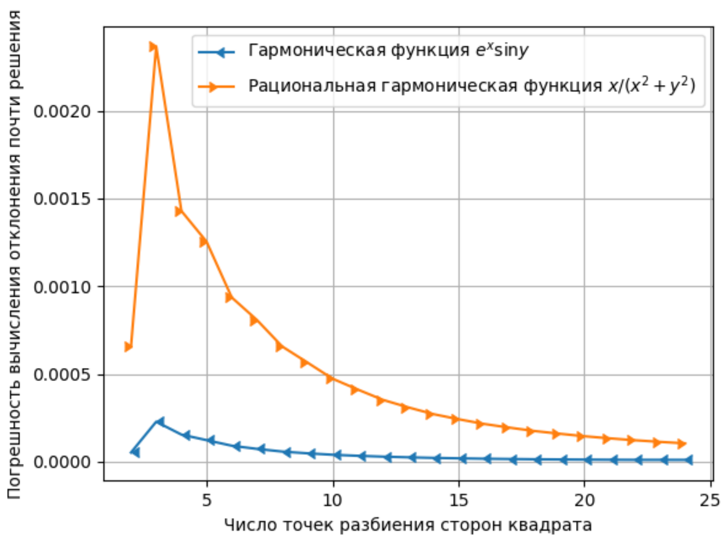


Рис. 1. Результаты численных экспериментов

На рисунках 1, 2 показаны зависимости вычисленной величины отклонения решения уравнения от числа точек разбиения сторон указанной квадратной области. При этом аппроксимация величины $\nabla \Delta u$ осуществлялась в каждом треугольнике триангуляции с помощью многочленов 4-го порядка

$$P(x,y) = ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 + fx^3 +$$
$$+ gx^2y + hxy^2 + ky^3 + lx^2 + mxy + ny^2 + px + qy + r.$$

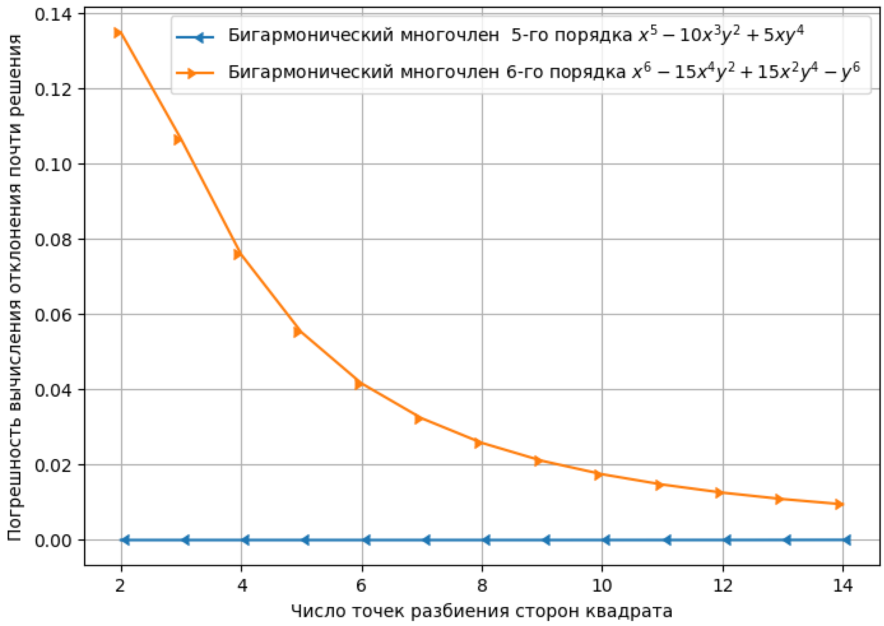


Рис. 2. Результаты численных экспериментов

Для этого внутри треугольника и на его сторонах выбиралось равномерно расположенных 15 точек, как показано на рисунке 3. При этом приближенное значение

$$\nabla\Delta u \approx \nabla\Delta P(x,y) = (24ax + 6by + 4cx + 6dy + 6f + 2h,$$

$$6bx + 4cy + 6dx + 24ey + 2g + 6k)$$

для использования формулы (3) вычисляется в центре треугольника.

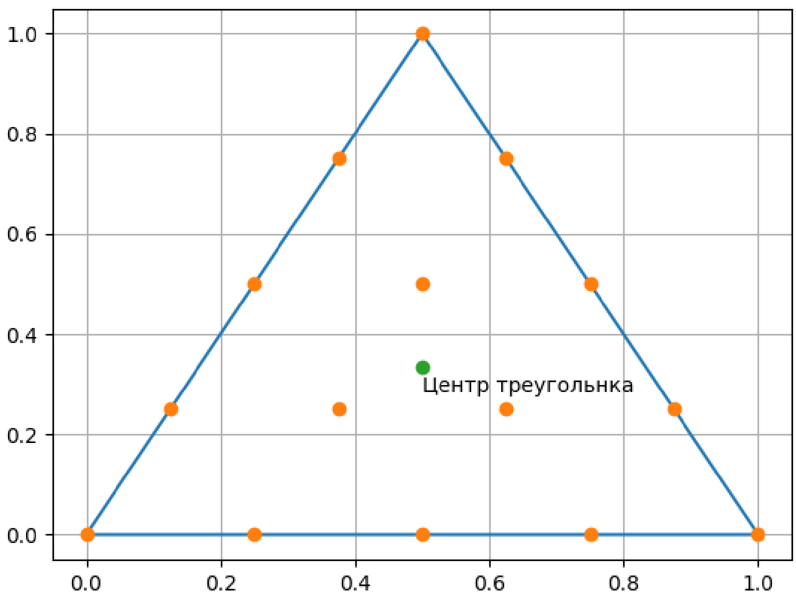


Рис. 3. Точки для интерполяции в треугольнике

### Вывод

В целом для всех выбранных бигармонических функций величина уклонения $\varepsilon_{\Delta\Delta}(u)$ оказалась, как и ожидалось, достаточно малой даже при сравнительно небольшом количестве узлов триангуляции. В среднем, при $25 \leq N \leq 35$, абсолютная погрешность составила порядка $0,0001$, что дает приблизительно асимптотическую оценку $O(h^2)$, когда шаг разбиения $h \to 0$.

## *ПРИМЕЧАНИЕ*

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 19-47-340015 р_а.

## *СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

1. Клячин, А. А. О кусочно-линейных почти решениях эллиптических уравнений / А. А. Клячин // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2013. — № 2 (19). — С. 19–26.

2. Клячин, В. А. Численное исследование устойчивости равновесных поверхностей с использованием пакета NumPY / В. А. Клячин, Е. Г. Григорьева // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2015. — № 2 (27). — С. 17–30.

3. Миклюков, В. М. Геометрический анализ. Дифференциальные формы, почти-решения, почти квазиконформные отображения / В. М. Миклюков. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2007. — 530 с.

## *REFERENCES*

1. Klyachin A.A. O kusochno-lineynykh pochti resheniyakh ellipticheskikh uravneniy [On Piecewise Linear Almost Solutions of Elliptic Equations]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2013, no. 2 (19), pp. 19-26.

2. Klyachin V.A., Grigoryeva E.G. Chislennoe issledovanie ustoychivosti ravnovesnykh poverkhnostey s ispolzovaniem paketa NumPY [Numerical Investigation of Stability for Equilibrium Surfaces Using NumPy Package]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2015, no. 2 (27), pp. 17-30.

3. Miklyukov V.M. *Geometricheskiy analiz. Differentsialnye formy, pochti-resheniya, pochti kvazikonformnye otobrazheniya* [Geometric Analysis. Differential Forms, Almost-Solutions, Almost Quasiconformal Mappings]. Volgograd, Izd-vo VolGU Publ., 2007. 530 p.

# THE APPROXIMATION OF THE FOURTH-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE CLASS OF THE PIECEWISE POLYNOMIAL FUNCTIONS ON THE TRIANGULAR GRID

**Aleksey Aleksandrovich Klyachin**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Head of the Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
klyachin-aa@yandex.ru, matf@volsu.ru
https://orcid.org/0000-0003-3293-9066
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

**Vladimir Aleksandrovich Klyachin**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Head of the Department of Computer Sciences and Experimental Mathematics,
Volgograd State University
klchnv@mail.ru, klyachin.va@volsu.ru
https://orcid.org/0000-0003-1922-7849
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

**Abstract.** The present work determines the deviation of the piecewise cubic almost-solution of the biharmonic equation and derives the general formula (3) for its calculation. Based on this concept, we obtained an approximation of the equation. A number of numerical calculations were carried out in order to confirm the obtained formula (see pictures 1 and 2) experimentally. In general, for all selected biharmonic functions, the deviation value $\varepsilon_{\Delta\Delta}(u)$ turned out to be, as expected, rather small even with a relatively small number of triangulation nodes. On average, with $25 \leq N \leq 35$, the absolute error was about $0,0001$, which gives an approximately asymptotic estimate of $O(h^2)$ when the partitioning step is $h \to 0$.

**Key words:** piecewise cubic function, almost solution, biharmonic equation, approximation of the equation, deviation of the piecewise cubic almost solution.