DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2019.2.4

УДК 517.51 Дата поступления статьи: 17.01.2019
ББК 22.16.15 Дата принятия статьи: 04.03.2019

КРИТЕРИИ УСТРАНИМЫХ МНОЖЕСТВ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ИЗ СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВ $\mathbf{L^1_{p,w}}$

Владимир Алексеевич Шлык

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики
и информационных таможенных технологий,
Владивостокский филиал Российской таможенной академии
shlykva@yandex.ru
ул. Стрелковая, 16в, 690034 г. Владивосток, Российская Федерация

Аннотация. В работе установлены точные функциональные и емкостные характеристики устранимых множеств для гармонических функций на открытом ограниченном множестве $G \subset R^n, n \geq 2$, из весового пространства $L^1_{p,w}(G)$ с весом w, удовлетворяющим A_p-условию Макенхаупта, $p > 1$. Доказательство основных результатов базируется на теории распределений по Л. Шварцу и использует свойства экстремальных функций для емкости компакта.

Ключевые слова: соболевские пространства, гармонические функции, распределение Шварца, емкость множества.

Светлой памяти В.М. Миклюкова посвящается.

Введение

В [16] Л. Альфорс и А. Бейрлинг заложили основы теории устранимых множеств для конформных отображений в комплексной плоскости.

В этом направлении, как на плоскости, так и в пространстве, были проведены многочисленные исследования. Не претендуя на полноту, упомянем здесь работы Б. Шабата [15], В. Миклюкова [13], Ю. Вяйсяля [23], А. Копылова [11], В. Асеева и А. Сычева [1], С. Водопьянова и В. Гольдштейна [3], Ю. Дымченко и В. Шлыка [6].

Особо отметим статью Л. Хедберга [19], в которой он, используя распределения по Л. Шварцу, получил точные функциональные и емкостные характеристики устранимых особенностей для классов гармонических функций $HD^p(G)$, $FD^p(G)$.

Ниже, применяя построения Л. Хедберга, мы находим аналогичные характеристики устранимых множеств в классе $HD^{p,w}(G)$ гармонических функций. Кроме того, устанавливаем достаточные условия плотности класса $C_0^\infty(G)$ в классе $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(R^n)$.

Отметим, что для класса $FD^{p,w}$, являющегося обобщением класса FD^p, критерии устранимых множеств получены в [5].

1. Терминология и обозначения

Далее G — открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве R^n, $n \geq 2$, $\mathcal{L}_k$ — k-мерная мера Лебега; A_p — класс локально интегрируемых функций $w : R^n \to \to (0, +\infty)$, удовлетворяющих условию Макенхаупта [20]

$$\sup \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w dx \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w^{1-q} dx \right)^{p-1} < \infty, \tag{1}$$

где супремум берется по всем координатным кубам $Q \subset R^n$, $|Q| = \mathcal{L}_n(Q)$, $p, q \in \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Вес w^{1-q} обозначим через $\tilde{w}$ и заметим, что ввиду (1) $\tilde{w} \in A_q$. Для весовой функции $w \in A_p$ обозначим через $L^1_{p,w}(G)$ класс функций $u : G \to (-\infty, +\infty)$, локально интегрируемых в G, имеющих в G обобщенные частные производные и таких, что

$$\int\limits_G |\nabla u|^p \, w dx < \infty.$$

В $L^1_{p,w}(G)$ введем норму

$$\|u\|_{L^1_{p,w}(G)} = \left(\int\limits_G |\nabla u|^p \, w dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

в котором функции из $L^1_{p,w}(G)$, отличающиеся друг от друга на постоянную на каждой компоненте связности множества G $\mathcal{L}_n$-почти везде, отождествляются. Как известно (см. [21, Theorems 4.4.4, 4.4.6], где класс $L^1_{p,w}(G)$ имеет обозначение $BL^{p,w}(G)$), пространство $L^1_{p,w}(G)$ в норме $\|\cdot\|_{L^1_{p,w}(G)}$ является полным и $C^\infty(G)$ является плотным в указанной норме для $L^1_{p,w}(G)$.

Через $HD^{p,w}(G)$, следуя Л. Хедбергу, обозначим класс всех гармонических в G функций из $L^1_{p,w}(G)$.

Компакт $E \subset G$ назовем устранимым для $HD^{p,w}(G)$, если каждую функцию $u \in \in HD^{p,w}(G \setminus E)$ можно продолжить до функции из $HD^{p,w}(G)$.

Через $\mathcal{L}^p_k(G)$ обозначим класс всех вектор-функций $u = (u_1, \ldots, u_k)$, для которых

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p_k(G)} = \left(\int\limits_G \left(\sum_{i=1}^k u_i^2(x) \right)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

В случае $k = 1$ положим $\mathcal{L}^p_1(G) = \mathcal{L}^p(G)$.

Запись $\bar{F}$ обозначает замыкание множества $F \subset R^n$ в топологии R^n.

Положим для $r > 0$ $B(x,r) = \{y \in R^n : |y-x| < r\}$. Носителем $\operatorname{supp} f$ непрерывной в G функции $f(x)$ назовем замыкание в G множества тех x, для которых $f(x) \neq 0$. $C_0^\infty(R^n)$ и $C_0^\infty(G)$ — совокупность бесконечно дифференцируемых функций в R^n с компактными носителями соответственно в R^n и G.

Замыкание $C_0^\infty(G)$ по норме $L^1_{p,w}(G)$ обозначим через $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{p,w}(G)$. В дальнейшем мы будем использовать один результат Фейбса, Кенига, Серапиони [12, теорема 1.3]:

Если Ω — ограниченное открытое множество в R^n, то существует положительная постоянная C такая, что для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$ верна оценка

$$\int\limits_\Omega |u|^q \tilde{w} dx \le C \int\limits_\Omega |\nabla u|^q \tilde{w} dx. \qquad (2)$$

Для компакта $K \subset R^n$ его $(q,\tilde{w})$-емкость относительно Ω определим как

$$C_{q,\tilde{w}}(K) = \inf_g \int\limits_\Omega |\nabla g|^q \tilde{w} dx,$$

где инфимум берется по всем функциям $g \in C_0^\infty(\Omega)$ таким, что $g = 1$ в окрестности компакта K, где Ω — фиксированное ограниченное открытое множество и $K \subset \Omega$. Ниже такие функции назовем допустимыми для $C_{q,\tilde{w}}(K)$.

Функцию $u_0 \in \overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(\Omega)$ назовем экстремальной для $C_{q,\tilde{w}}(K)$, если она является пределом в $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(\Omega)$ последовательности допустимых функций для $C_{q,\tilde{w}}(K)$ и $C_{q,\tilde{w}}(K) = \int\limits_\Omega |\nabla u_0|^q \tilde{w} dx$ (о существовании u_0 см. лемму 2).

Функцию $h \in \overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(\Omega)$ назовем пробной для $C_{q,\tilde{w}}(K)$, если $h = \lim\limits_{m\to\infty} u_m$ в $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(\Omega)$, где $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$ и $u_m = 0$ в окрестности компакта K.

Замечание 1. Если $u \in \overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G)$, то, положив $u = 0$ на $R^n \setminus G$, нетрудно заметить, что $u \in \overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(R^n)$.

Замечание 2. Равенство $C_{q,\tilde{w}}(K) = 0$ не зависит от выбора ограниченного открытого множества $\Omega \supset K$. Действительно, пусть $C_{q,\tilde{w}}(K) = 0$ относительно $\Omega \supset K$ и пусть Ω_1 — еще одно открытое ограниченное множество в R^n, $K \subset \Omega_1$. Рассмотрим неотрицательную функцию $h \in C_0^\infty(\Omega \cap \Omega_1) \cap C^\infty(R^n)$, где $h = 1$ в окрестности K и $h = 0$ на $R^n \setminus \Omega_2$, $\overline{\Omega_2} \subset \Omega \cap \Omega_1$, $K \subset \Omega_2$ (построение такой функции h можно найти в [4, теорема 2.6]). Если $u_m \in \overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(\Omega)$ — допустимая для $C_{q,\tilde{w}}(K)$ и $\int\limits_\Omega |\nabla u_m|^q \tilde{w} dx \to C_{q,\tilde{w}}(K)$ при $m \to \infty$, то $h \cdot u_m \in \overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(\Omega \cap \Omega_1)$ — допустимая функция для $C_{q,\tilde{w}}(K)$ в $\Omega \cap \Omega_1$. В силу (2)

$$\int\limits_{\Omega\cap\Omega_1} |\nabla(hu_m)|^q \tilde{w} dx = \int\limits_{\Omega\cap\Omega_1} |h\nabla u_m + u_m \nabla h|^q \tilde{w} dx \le$$

$$\le 2^q \max|h|^q \cdot o(1) + 2^q \max|\nabla h|^q \int\limits_{\Omega\cap\Omega_1} |u_m|^q \tilde{w} dx \le const \cdot o(1), m \to \infty.$$

Следовательно, $C_{q,\tilde{w}}(K) = 0$ относительно $\Omega \cap \Omega_1$. В силу монотонности $C_{q,\tilde{w}}(K) = 0$ относительно Ω_1.

Для произвольного множества $F \subset R^n$ положим $C_{q,\tilde{w}}(F) = 0$, если для каждого компакта $K \subset F$ найдется открытое ограниченное множество $\Omega \supset K$ такое, что $C_{q,\tilde{w}}(K) = 0$ относительно Ω.

Пусть $T : f \to K * f$ — сингулярный интегральный оператор свертки с ядром K, удовлетворяющим следующим стандартным условиям:

1. для преобразования Фурье $\hat{K}$ ядра K имеем оценку $\|\hat{K}\|_\infty \le C$;
2. $|K(x)| \le \frac{C}{|x|^n}$;
3. $|K(x) - K(x-y)| \le \frac{C|y|}{|x|^{n+1}}$ для $|y| < \frac{|x|}{2}$.

Здесь C — некоторая постоянная.

Известен результат Р. Койфмана и К. Феффермана [18, theorem 3], более подробно см. [21, theorem 5.2.5]: если $\tilde{w} \in A_q$ и $f\tilde{w}^{\frac{1}{q}} \in \mathcal{L}^q(R^n)$, то

$$\int\limits_{R^n} |Tf(x)|^q \tilde{w} dx \le C_q \int\limits_{R^n} |f(x)|^q \tilde{w} dx, \tag{3}$$

где C_q — положительная постоянная, которая зависит только от q, n, w.

Если $f(x)\tilde{w}^{\frac{1}{q}} \in \mathcal{L}^q(G)$, то в качестве f в (3) нужно рассмотреть функцию, продолженную нулем на $R^n \setminus G$.

Неравенство (3) при $w \equiv 1$ было первоначально установлено Кальдероном и Зигмундом в [17] для ядер $K = K_{ij} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\dfrac{1}{|x|^{n-2}}\right)$, где $|x| = |(x_1, \dots, x_n)| > 0$ и $n > 2$; для $n = 2$ $K = K_{ij} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(-\log|x|)$, где $|x| = |(x_1, x_2)| > 0$.

Из определения K_{ij} следует, что

$$K_{ij} = \frac{F(x)}{|x|^n}, \tag{4}$$

где $F(x)$ — ограниченная однородная функция степени 0, то есть $F(kx) = F(x)$ для всех $k > 0$ и $|x| > 0$. Доказательство условия 1 для ядер K вида (4) приведено в [14, п. 4.3 гл. II, с. 53]. Очевидно, что (4) влечет условие 2. Условие 3 для K_{ij} следует непосредственно из применения формулы Тейлора в точке x.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Любой непрерывный линейный функционал на* $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G)$ *можно представить в виде*

$$F(u) = \int\limits_G \left(\sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dx, \tag{5}$$

где $\tilde{w}^{-\frac{1}{q}} g \in \mathcal{L}^p_n(G)$ *и* $g = (g_1, \dots, g_n)$. *Кроме того,* $\|F\| \le \|\tilde{w}^{-\frac{1}{q}} g\|_{\mathcal{L}^p_n(G)}$.

Доказательство. Очевидно, что правая часть (5) является линейным функционалом на $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G)$ и

$$|F(u)| \le \int\limits_G |g| \cdot |\nabla u|\, dx = \int\limits_G |g| \tilde{w}^{-\frac{1}{q}} \tilde{w}^{\frac{1}{q}} |\nabla u|\, dx \le \left(\int\limits_G |g|^p\, w dx \right)^{\frac{1}{p}} \|u\|_{L^1_{q,\tilde{w}}(G)}.$$

Отсюда (5) — ограниченный линейный функционал на $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G)$.

Обратно, пусть $F(u)$ — некоторый ограниченный линейный функционал на $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G)$. Сопоставим вектору ∇u, где $u \in \overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G)$, набор $v = \tilde{w}^{\frac{1}{q}} \nabla u$ из $\mathcal{L}^q_n(G)$. Так как пространство $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G)$ полно (как замкнутое подпространство полного пространства $L_{q,\tilde{w}}(G)$), то область значений оператора $\nabla : \overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G) \to \mathcal{L}^q_n(G)$ является замкнутым подпространством пространства $\mathcal{L}^q_n(G)$. Определим функционал $\Phi(v) = F(u)$ для любого вектора $v \in \mathcal{L}^q_n(G)$, представимого в виде $\tilde{w}^{\frac{1}{q}} \nabla u$. Тогда $\|\Phi\| = \|F\|$ и по теореме Хана-Банаха Φ может быть распространен до линейного функционала на $\mathcal{L}^q_n(G)$ с сохранением нормы. В силу линейности $\Phi(v)$ можно записать в виде $\sum\limits_{i=1}^n \Phi_i(v_i)$, где $\Phi_i(v_i)$ — линейный функционал на $\mathcal{L}^q(G)$ и $v = (v_1, \ldots, v_n)$. Отсюда по теореме Рисса

$$\Phi(v) = \int\limits_G \left(\sum_{i=1}^n \tilde{g}_i v_i \right) dx,$$

где $\tilde{g} = (\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_n)$ — некоторая функция из $\mathcal{L}^p_n(G)$. Это дает представление $F(u)$ в виде

$$F(u) = \int\limits_G \left(\sum_{i=1}^n \tilde{g}_i \tilde{w}^{\frac{1}{q}} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx = \int\limits_G \left(\sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx,$$

где $g = (g_1, \ldots, g_n) = (\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_n) \tilde{w}^{\frac{1}{q}}$, и, значит, $\tilde{w}^{-\frac{1}{q}} g \in \mathcal{L}^p_n(G)$. Тем самым лемма доказана.

Обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное произведение в R^n.

Лемма 2. *Если K — компакт в ограниченном открытом множестве $G \subset R^n$, то $C_{q,\tilde{w}}(K) < \infty$ и существует экстремальная функция $u_0 \in \overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G)$ для $C_{q,\tilde{w}}(K)$ (относительно G), удовлетворяющая следующему вариационному условию:*

$$\int\limits_G |\nabla u_0|^{q-2} \langle \nabla u_0, \nabla h \rangle\, \tilde{w} dx = 0, \tag{6}$$

где h — произвольная пробная функция для $C_{q,\tilde{w}}(K)$.

Доказательство. Известно (см. [8, лемма 1], где все w, p нужно заменить на $\tilde{w}, q$), что $(q, \tilde{w})$-емкость конденсатора (F_0, F_1, G) удовлетворяет неравенству $C_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G) < < \infty$. Положим $F_0 = \partial G$, $F_1 = K$. Из определения $C_{q,\tilde{w}}(K)$ следует, что $C_{q,\tilde{w}}(K) \le \le C_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G)$. Это дает нужную оценку $C_{q,\tilde{w}}(K) < \infty$.

Существование экстремальной функции и соотношение, аналогичное (6), для емкости $C_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G)$, получено в [8, теоремы 1,2] (см. также [24]). Для $C_{q,\tilde{w}}(K)$ доказательство повторяет доказательства теорем 1 и 2 из [8] и поэтому его здесь опускаем.

Замечание 3. Применяя срезки вида $\min(1,h)$ и $\max(0,h)$ к допустимым функциям h в определении $C_{q,\tilde{w}}(K)$ и затем аппроксимируя эти срезки гладкими функциями, можно показать, что экстремальная функция u_0 в лемме 2 удовлетворяет условию $0 \le u_0 \le 1$ на G.

Лемма 3. *Пусть K_1 и K_2 — компакты в ограниченном открытом множестве Ω и такие, что $C_{q,\tilde{w}}(K_1) = C_{q,\tilde{w}}(K_2) = 0$. Тогда $C_{q,\tilde{w}}(K_1 \cup K_2) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, u_i — допустимая функция для $C_{q,\tilde{w}}(K_i)$ относительно Ω и

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u_i|^q \tilde{w} dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда $u_1 + u_2 \ge 1$ на $K_1 \cup K_2$ и $u_1 + u_2 \in C_0^\infty(\Omega)$. Как известно [21, theorem 4.1.4], срезка $v = \min(1, u_1 + u_2) \in L^1_{q,\tilde{w}}(\Omega)$ и $\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^q \tilde{w} dx \le \int\limits_{\Omega} |\nabla (u_1 + u_2)|^q \tilde{w} dx$, $v = 1$ в окрестности $K_1 \cup K_2$, $\operatorname{supp} v$ лежит в Ω. Проводя стандартное усреднение с переменным шагом относительно Ω [6, теорема 5], найдем допустимую функцию v_1 для $C_{q,\tilde{w}}(K_1 \cup K_2)$ относительно Ω, такую, что $\int\limits_{\Omega} |\nabla v_1|^q \tilde{w} dx = \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^q \tilde{w} dx + o(1)$, где $o(1) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда

$$C_{q,\tilde{w}}(K_1 \cup K_2) \le \int\limits_{\Omega} |\nabla v_1|^q \tilde{w} dx \le 2^q \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u_1|^q \tilde{w} dx + \int\limits_{\Omega} |\nabla u_2|^q \tilde{w} dx \right) + o(1),$$

что и завершает доказательство леммы.

3. Критерии устранимых множеств для $\mathbf{HD^{p,w}(G)}$

Теорема 1. *Пусть E — компакт в ограниченном открытом множестве $G \subset R^n$. Для того чтобы компакт E был устранимым множеством для $HD^{p,w}(G)$, необходимо и достаточно, чтобы $C_0^\infty(G \setminus E)$ было плотным в $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G)$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть E — устранимое множество для $HD^{p,w}(G)$ и пусть $C_0^\infty(G \setminus E)$ не является плотным в $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G)$. Если $\mathcal{L}_n(E) > 0$, то $C_0^\infty(G \setminus E)$ заведомо не является плотным в $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G)$ (см. доказательство условия достаточности в теореме). Это позволяет считать E всюду разрывным компактом в G.

Действительно, пусть X_1 — семейство всех $(n-1)$-мерных гиперплоскостей, ортогональных координатной x_1-оси. Индексируем каждую гиперплоскость $H \in X_1$ индексом a_1, где a_1 — точка пересечения этой гиперплоскости с x_1-осью.

Положим $\tau = \{a_1 : \mathcal{L}_{n-1}(H_{a_1} \cap E) > 0\}$. В силу $\mathcal{L}_n(E) > 0$ имеем по теореме Фубини оценку $\mathcal{L}_1(\tau) > 0$. Пусть τ' — компакт в τ такой, что $\mathcal{L}_1(\tau') > 0$. Если τ' — всюду разрывный компакт, то положим $\tau_1 = \tau'$. В противном случае τ' содержит невырожденный отрезок $[c,d]$ и положим тогда в качестве $\tau_1 \subset [c,d]$ канторово всюду разрывное множество положительной длины.

Положим $E_1 = \left(\bigcup\limits_{a_1 \in \tau_1} H_{a_1} \right) \cap E$. Тогда $\mathcal{L}_n(E_1) > 0$.

Пусть теперь $(n-1)$-мерная гиперплоскость ортогональна координатной x_2-оси и a_2 — точка пересечения этой гиперплоскости с осью x_2. Положим $H_{a_2} = H$. Заменяя в приведенных выше рассуждениях E на E_1, координатную ось x_1 на x_2-ось, гиперплоскости H_{a_1} на H_{a_2}, получим всюду разрывный компакт τ_2 такой, что $\tau_2 \subset \{a_2 : \mathcal{L}_{n-1}(H_{a_2} \cap \cap E_1) > 0\}$.

Положим $E_2 = \left(\bigcup\limits_{a_2 \in \tau_2} H_{a_2}\right) \cap E_1$. По построению $\mathcal{L}_n(E_2) > 0$.

Продолжая этот процесс дальше, получим последовательность $E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset \supset E_n$, где $\mathcal{L}_n(E_n) > 0$ и ортогональная проекция компакта E_n на каждую x_i-ось, $i = = 1, 2, \ldots, n$, есть всюду разрывный компакт положительной длины. Компакт E_n также будет устранимым для $HD^{p,w}(G)$ и $C_0^\infty(G \setminus E_n)$ не является плотным в $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G)$.

Поэтому ниже считаем, что E — всюду разрывный компакт в случае $\mathcal{L}_n(E) > 0$. Тогда существует элемент $v_0 \in \overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G \setminus E)$ такой, что расстояние между v_0 и $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G)$ положительно. В силу известной леммы об аннуляторе [10, с. 180] существует ненулевое распределение T на $C_0^\infty(G)$ с $\operatorname{supp} T \subset E$, непрерывное на $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G)$.

Введем распределение $S = T * |x|^{2-n}$.

Тогда для $\varphi \in C_0^\infty(G)$ справедливо равенство (см. [2, с. 82]) $(\Delta S, \varphi) = C(T, \varphi)$, где постоянная $C \neq 0$. Поскольку $(T, \varphi) = 0$ для всех $\varphi \in C_0^\infty(G \setminus E)$, то по одной из теорем Л. Шварца [22, с. 136] обобщенная гармоническая функция S в $G \setminus E$ будет гармонической на $G \setminus E$ в обычном смысле. С другой стороны, поскольку T — ненулевое распределение на $C_0^\infty(G)$, S не является гармонической функцией на G.

Покажем, что $\dfrac{\partial S}{\partial x_j} \tilde{w}^{-\frac{1}{q}} \in \mathcal{L}^p(G)$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$. В силу леммы 1 T как линейный непрерывный функционал на $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G)$ можно записать для $\varphi \in C_0^\infty(G)$ в виде

$$(T, \varphi) = \int\limits_G \left(\sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) dx.$$

Это дает равенство

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_j}, \varphi\right) = -\left(S, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = -\int\limits_G \left(\sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} (\varphi * |x|^{2-n})\right) dx.$$

В силу (3)

$$\left\| \tilde{w}^{\frac{1}{q}} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} (\varphi * |x|^{2-n}) \right\|_{\mathcal{L}^q(G)} \leq C \|\tilde{w}^{\frac{1}{q}} \varphi\|_{\mathcal{L}^q(G)}.$$

Отсюда

$$\left| \left(\frac{\partial S}{\partial x_j}, \varphi\right) \right| \leq C \|\tilde{w}^{-\frac{1}{q}} g\|_{\mathcal{L}^p_n(G)} \|\tilde{w}^{\frac{1}{q}} \varphi\|_{\mathcal{L}^q(G)}. \tag{7}$$

Введем линейный ограниченный функционал на $C_0^\infty(G)$

$$\Phi(v) = \left(\frac{\partial S}{\partial x_j}, \varphi\right) = \int\limits_G \left(\sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} (\varphi * |x|^{2-n})\right) dx,$$

где $v = \tilde{w}^{\frac{1}{q}} \varphi \in \mathcal{L}^q(G), \varphi \in C_0^\infty(G)$. По теореме Хана-Банаха в силу (7) продолжим $\Phi(v)$ на $\mathcal{L}^q(G)$ до линейного ограниченного функционала с сохранением нормы.

Из общего вида линейного ограниченного функционала на $\mathcal{L}^q(G)$ [9, теорема 6.2.1] получим аналогично доказательству леммы 1, что $\dfrac{\partial S}{\partial x_j}\tilde{w}^{-\frac{1}{q}} \in \mathcal{L}^p(G)$. Иначе говоря,

$$\int\limits_G \left|\frac{\partial S}{\partial x_j}\right|^p w dx < \infty, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Это влечет $S \in L^1_{p,w}(G)$. Выше было отмечено, что $S \in HD^{p,w}(G \setminus E)$.

Покажем, что S не продолжается до функции $\tilde{S} \in HD^{p,w}(G)$.

Действительно, пусть $\tilde{S} \in HD^{p,w}(G)$ — продолжение S и $\mathcal{L}_n(E) > 0$. Напомним, что E — всюду разрывный компакт. Как известно [21, Theorem 4.1.3, Corollary 4.3.3], $L^1_{p,w}(G) = ACL_{p,w}(G)$, где $ACL_{p,w}(G)$ — класс функций u, абсолютно непрерывных в G на $\mathcal{L}_{n-1}$-почти всех отрезках, параллельных координатной x_i-оси, $i = 1, 2, \ldots, n$, $w^{\frac{1}{p}}\nabla u \in \mathcal{L}^p_n(G)$. Отсюда для $\mathcal{L}_n$-почти всех $x_0 \in E$ $S(x_0) = \tilde{S}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} S(x)$, где $x \in G \setminus E$, $x \to x_0$ вдоль прямой, проходящей через точку x_0 параллельно x_i-оси, $i = 1, 2, \ldots, n$. Это влечет $S = \tilde{S}$ $\mathcal{L}_n$-почти везде на G, и, значит, $0 = (\Delta S, \varphi) = (\Delta \tilde{S}, \varphi)$ на $C_0^\infty(G)$.

Тем самым, S — гармоническая функция на G, что противоречит определению распределения T.

В случае $\mathcal{L}_n(E) = 0$ те же рассуждения дают противоречие с определением T. Значит, E не является устранимым для $HD^{p,w}(G)$. Из полученного противоречия следует, что $C_0^\infty(G \setminus E)$ является плотным в $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G)$.

Достаточность. Пусть $C_0^\infty(G \backslash E)$ плотно в $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G)$. Покажем сначала, что $\mathcal{L}_n(E) = 0$. Действительно, предположим, что $\mathcal{L}_n(E) > 0$. Выберем открытые множества Ω_1, Ω_2 такими, что $E \subset \Omega_1 \subset \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2 \subset \overline{\Omega_2} \subset G$. Пусть $v(x) \in C_0^\infty(R^n)$, $v = 1$ на $\overline{\Omega_1}$ и $\operatorname{supp} v \subset \Omega_2$. Тогда $v \in C_0^\infty(G)$. В силу плотности $C_0^\infty(G \setminus E)$ в $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G)$ найдется последовательность $v_k \in C_0^\infty(G \setminus E)$, для которой $\lim\limits_{k \to \infty} v_k = v$ в $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G)$. Положив в (2) $u = v_k - v$, $\Omega = G$, получим

$$\lim_{k \to \infty} \int\limits_G |v_k - v|^q \tilde{w} dx = \lim_{k \to \infty} \int\limits_G |v_k \tilde{w}^{\frac{1}{q}} - v\tilde{w}^{\frac{1}{q}}|^q \, dx = 0.$$

В силу известного свойства $\mathcal{L}^q(G)$ найдется подпоследовательность v_{k_l} такая, что $v_{k_l}\tilde{w}^{\frac{1}{q}} \to$ $\to v_{k_l}\tilde{w}^{\frac{1}{q}}$ $\mathcal{L}_n$-почти везде на E. Это противоречит тому, что $v = 1$ на E, $v_{k_l} = 0$ на E для всех $l \geq 1$. Следовательно, $\mathcal{L}_n(E) = 0$.

Пусть теперь u — произвольная функция из $HD^{p,w}(G \setminus E)$ и $\varphi \in C_0^\infty(G \setminus E)$. Из формулы Грина имеем

$$\int\limits_{G \setminus E} u \Delta \varphi \, dx = -\int\limits_G \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \, dx = \int\limits_{G \setminus E} \varphi \Delta u \, dx = 0.$$

Поскольку $\mathcal{L}_n(E) = 0$ и $C_0^\infty(G \setminus E)$ плотно в $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G)$, то

$$\int\limits_G u \Delta \varphi \, dx = -\int\limits_G \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \, dx = 0.$$

По одной из теорем Л. Шварца [22, с. 136] u — гармоническая функция в G и поэтому принадлежит $HD^{p,w}(G)$, что и завершает доказательство теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть G — открытое ограниченное множество в R^n и E — компакт в G. E — устранимое множество для $HD^{p,w}(G)$ тогда и только тогда, когда $C_{q,\tilde{w}}(E) = 0$ относительно G.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть E — устранимое множество для $HD^{p,w}(G)$ и предположим, что $C_{q,\tilde{w}}(E) > 0$ относительно G. Пусть u_0 — экстремальная функция для $C_{q,\tilde{w}}(E)$ из леммы 2. Рассмотрим соответствующий линейный функционал на $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G)$:

$$L(u) = \int\limits_G |\nabla u_0|^{q-2}\langle\nabla u_0, \nabla u\rangle\, \tilde{w}dx.$$

В силу леммы 2 $L(u_0) = C_{q,\tilde{w}}(E) > 0$, $L(u) = 0$ на $C_0^\infty(G \setminus E)$,

$$|L(u)| \leq \left(\int\limits_G |\nabla u_0|^q \tilde{w}dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_G |\nabla u|^q \tilde{w}dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Другими словами, $L(u)$ — ограниченный ненулевой линейный функционал на $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G)$. Тем самым функционал $L(u)$ порождает ненулевое распределение T с носителем на E. Проводя дальше рассуждения, аналогичные доказательству условия необходимости в теореме 1, построим гармоническую функцию v, которая не продолжается до гармонической функции на G. Следовательно, $C_{q,\tilde{w}}(E) = 0$.

Достаточность. В силу теоремы 1 достаточно показать, что каждую функцию $\varphi \in C_0^\infty(G)$ можно аппроксимировать в $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G)$ функциями из $C_0^\infty(G \setminus E)$.

Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем допустимую функцию $v_0 \in C_0^\infty(G)$ такую, что $v_0 = 1$ в окрестности E и $\int\limits_G |\nabla v_0|^q \tilde{w}dx < \varepsilon$. Тогда $u_0 = \varphi(1 - v_0) \in C_0^\infty(G \setminus E)$ и

$$\int\limits_G |\nabla(\varphi v_0)|^q \tilde{w}dx = \int\limits_G |\varphi\nabla v_0 + v_0\nabla\varphi|^q \tilde{w}dx \leq$$

$$\leq 2^q \max|\varphi|^q \cdot \varepsilon + 2^q \max|\nabla\varphi|^q \int\limits_G |v_0|^q \tilde{w}dx \leq \mathrm{const} \cdot \varepsilon.$$

в силу оценки (2).

Следовательно, $\int\limits_G |\nabla(\varphi - u_0)|^q \tilde{w}dx \leq \mathrm{const} \cdot \varepsilon$, что влечет плотность $C_0^\infty(G \setminus E)$ в классе $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G)$. По теореме 1 компакт E — устранимое множество для $HD^{p,w}(G)$.

Следствие 1. *Пусть G — ограниченное открытое множество в R^n и E — компакт в G. Если E — устранимое множество для $HD^{p,w}(G)$, то E — устранимое множество для $HD^{p,w}(G_1)$, где G_1 — произвольное открытое множество в R^n.*

Из леммы 3 получим еще одно утверждение.

Следствие 2. *Пусть G — ограниченное открытое множество в R^n и E — компакт в G. E — устранимое множество для $HD^{p,w}(G)$ тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in E$ существует замкнутая окрестность $\overline{B(x,r)}$ такая, что $\overline{B(x,r)} \cap E$ — устранимое множество для $HD^{p,w}(G)$.*

Ниже каждую функцию $u \in C_0^\infty(G)$ положим равной 0 вне G.

Теорема 3. *Пусть G — открытое множество в R^n. Если $C_{q,\tilde{w}}(R^n \setminus G) = 0$, то $C_0^\infty(G)$ плотно в $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(R^n)$.*

Доказательство. Пусть $C_{q,\tilde{w}}(R^n \setminus G) = 0$. Тогда достаточно установить аппроксимацию каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$ функциями из $\varphi \in C_0^\infty(G)$ в $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(R^n)$.

Для заданной функции $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$ и $\varepsilon > 0$ найдем ограниченное открытое множество Ω, для которого $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$. Положим $E = (\operatorname{supp}\varphi) \cap (R^n \setminus G)$.

Из равенства $C_{q,\tilde{w}}(R^n \setminus G) = 0$ следует, что $C_{q,\tilde{w}}(E) = 0$.

Тогда найдется допустимая функция v_0 для $C_{q,\tilde{w}}(E)$ относительно Ω, $\operatorname{supp} v_0 \subset \Omega$, для которой $\int\limits_\Omega |\nabla v_0|^q \tilde{w} dx < \varepsilon$. Очевидно, что $u_0 = \varphi(1 - v_0) \in C_0^\infty(G)$ и имеет место оценка (см. доказательство теоремы 2)

$$\int\limits_{R^n} |\nabla(\varphi - u_0)|^q \tilde{w} dx = \int\limits_\Omega |\nabla(\varphi - u_0)|^q \tilde{w} dx \leq \mathrm{const} \cdot \varepsilon.$$

Тем самым теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асеев, В. В. О множествах, устранимых для пространственных квазиконформных отображений / В. В. Асеев, А. В. Сычев // Сиб. мат. журн. — 1974. — Т. 15, № 6. — С. 1213–1227.

2. Владимиров, В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. — М. : Наука, 1976. — 280 с.

3. Водопьянов, С. К. Критерий устранимости множеств для пространств L_p^1, квазиконформных и квазиизометрических отображений / С. К. Водопьянов, В. М. Гольдштейн // Сиб. мат. журн. — 1977. — Т. 18, № 1. — С. 49–68.

4. Гольдштейн, В. М. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения / В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк. — М. : Наука, 1983. — 284 с.

5. Демшин, И. Н. Критерии устранимых множеств для весовых пространств гармонических функций / И. Н. Демшин, В. А. Шлык // Зап. науч. семинара ПОМИ. — 2002. — Т. 286. — С. 62–73.

6. Дымченко, Ю. В. Достаточность семейства ломаных в методе модулей и устранимые множества / Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык // Сиб. мат. журн. — 2010. — Т. 51, № 6. — С. 1298–1315.

7. Дымченко, Ю. В. Об одной задаче Дубинина для емкости конденсатора с конечным числом пластин / Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык // Мат. заметки. — 2018. — Т. 103, № 6. — С. 841–852.

8. Дымченко, Ю. В. Соотношение между весовой емкостью конденсатора и весовым модулем семейства разделяющих поверхностей / Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык // Дальневосточный мат. сб. — 1996. — № 2. — С. 72–80.

9. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М. : Наука, 1977. — 744 с.

10. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1989. — 544 с.

11. Копылов, А. П. Об устранимости плоских множеств в классе трехмерных квазиконформных отображений / А. П. Копылов // Метрические вопросы теории функций и отображений. — 1964. — № 1. — С. 21–23.

12. Мазья, В. Г. Классы областей, мер и емкостей в теории пространств дифференцируемых функций / В. Г. Мазья // Современные проблемы. Фундаментальные направления. — 1988. — Т. 26. — С. 159–228.

13. Миклюков, В. М. Об устранимых особенностях квазиконформных отображений в пространстве / В. М. Миклюков // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 188, № 3. — С. 525–527.

14. Стейн, И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / И. Стейн. — М. : Мир, 1973. — 342 с.

15. Шабат, Б. В. К теории квазиконформных отображений в пространстве / Б. В. Шабат // Докл. АН СССР. — 1960. — Т. 132, № 5. — С. 1045–1048.

16. Ahlfors, L. V. Conformal invariants and functions-theoretic null-sets / L. V. Ahlfors, A. Beurling // Acta Math. — 1950. — Vol. 83, № 1-2. — P. 101–129.

17. Calderon, A. P. On the existence of certain singular integrals / A. P. Calderon, A. Zygmund // Acta Math. — 1952. — Vol. 88. — P. 85–139.

18. Coifman, R. R. Weighted norm inequalities integrals / R. R. Coifman, C. Fefferman // Studia Math. — 1974. — Vol. 51. — P. 241–250.

19. Hedberg, L. I. Removable singularities and condenser capacities / L. I. Hedberg // Arkiv. Math. — 1974. — Vol. 12, № 2. — P. 101–129.

20. Muckenhoupt, B. The equivalence of two conditions for weight functions / B. Muckenhoupt // Studia Math. — 1974. — Vol. 49. — P. 101–106.

21. Ohtsuka, M. Extremal length and precise functions / M. Ohtsuka // Gakuto international Series. — 2003. — Vol. 19. — P. 1–343.

22. Schwartz, L. Therie des distributions / L. Schwartz. — Paris : Hermann, 1950. — Vol. 1. — 148 p.

23. Väisälä, J. Removable sets for quasiconformal mappings / J. Väisälä // J. Math. Mech. — 1969. — Vol. 19, № 1. — P. 49–51.

24. Ziemer, W. P. Extremal length and conformal capacity / W. P. Ziemer // Trans. Amer. Math Soc. — 1967. — Vol. 126, № 3. — P. 460–473.

REFERENCES

1. Aseev V.V., Sychev A.V. O mnozhestvakh, ustranimykh dlya prostranstvennykh kvazikonformnykh otobrazheniy [On the Removable Sets for Space Quasiconformal Mappings]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal], 1974, vol. 15, no. 6, pp. 1213-1227.

2. Vladimirov V.S. *Obobshchennye funktsii v matematicheskoy fizike* [Generalized Finctions in Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 280 p.

3. Vodopyanov S.K., Goldshteyn V.M. Kriteriy ustranimosti mnozhestv dlya prostranstv L^1_p, kvazikonformnykh i kvaziizometricheskikh otobrazheniy [Criteria of Removability of Sets for the Spaces L^1_p, Quasiconformal and Quasiisometric Mappings]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal], 1977, vol. 18, no. 1, pp. 49-68.

4. Goldshteyn V.M., Reshetnyak Yu.G. *Vvedenie v teoriyu funktsiy s obobshchennymi proizvodnymi i kvazikonformnye otobrazheniya* [Introduction in the Theory with Generalized Derivatives and Quasiconformal Mappings]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 284 p.

5. Demshin I.N., Shlyk V.A. Kriterii ustranimykh mnozhestv dlya vesovykh prostranstv garmonicheskikh funktsiy [Criteria of Removable Sets for the Weight Spaces of Harmonic Functions]. *Zap. nauch. seminara POMI* [J. of Math. Sciences], 2002, vol. 286, pp. 62-73.

6. Dymchenko Yu.V., Shlyk V.A. Dostatochnost semeystva lomanykh v metode moduley i ustranimye mnozhestva [The Sufficiency of Families of Polygonal Curves and Removable Sets]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal], 2010, vol. 51, no. 6, pp. 1298-1315.

7. Dymchenko Yu.V., Shlyk V.A. Ob odnoy zadache Dubinina dlya emkosti kondensatora s konechnym chislom plastin [On a Dubinin's Problem for the Capacity of a Condenser with a Finite Number of Plates]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes], 2018, vol. 103, no. 6, pp. 841-852.

8. Dymchenko Yu.V., Shlyk V.A. Sootnoshenie mezhdu vesovoy emkostyu kondensatora i vesovym modulem semeystva razdelyayushchikh poverkhnostey [A Relation Between Weight Capacity of a Condenser and Weight Module of Family of Separating Sets]. *Dalnevostochnyy mat. sb.* [Far Eastern Mathematical Sbornik], 1996, no. 2, pp. 72-80.

9. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsionalnyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 744 p.

10. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsionalnogo analiza* [Elements of Function Theory and Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 544 p.

11. Kopylov A.P. Ob ustranimosti ploskikh mnozhestv v klasse trekhmernykh kvazikonformnykh otobrazheniy [On Removable Plane Sets in the Class of the Spaces Quasiconformal Mappings]. *Metricheskie voprosy teorii funktsiy i otobrazheniy* [Metrical questions of function theory and mappings], 1964, no. 1, pp. 21-23.

12. Mazya V.G. Klassy oblastey, mer i emkostey v teorii prostranstv differentsiruemykh funktsiy [Classes of Domains, Measures and Capacities in the Theory of Differetiable Functions' Spaces]. *Sovremennye problemy. Fundamentalnye napravleniya*, 1988, vol. 26, pp. 159-228.

13. Miklyukov V.M. Ob ustranimykh osobennostyakh kvazikonformnykh otobrazheniy v prostranstve [On the Removable Sungularities of Quasiconformal Mappings in the Space]. *Dokl. AN SSSR* [Doklady Mathematics], 1969, vol. 188, no. 3, pp. 525-527.

14. Steyn I. *Singulyarnye integraly i differentsialnye svoystva funktsiy* [Singular Integrals and Differetniability Properties]. Moscow, Mir Publ., 1973. 342 p.

15. Šabat B.V. K teorii kvazikonformnykh otobrazheniy v prostranstve [To the Theory of Quasiconformal Mappings in the Space]. *Dokl. AN SSSR* [Doklady Mathematics], 1960, vol. 132, no. 5, pp. 1045-1048.

16. Ahlfors L.V., Beurling A. Conformal Invariants and Functions-Theoretic Null-Sets. *Acta Math.*, 1950, vol. 83, no. 1-2, pp. 101-129.

17. Calderon A.P., Zygmund A. On the Existence of Certain Singular Integrals. *Acta Math.*, 1952, vol. 88, pp. 85-139.

18. Coifman R.R., Fefferman C. Weighted Norm Inequalities Integrals. *Studia Math.*, 1974, vol. 51, pp. 241-250.

19. Hedberg L.I. Removable Singularities and Condenser Capacities. *Arkiv. Math.*, 1974, vol. 12, no. 2, pp. 101-129.

20. Muckenhoupt B. The Equivalence of Two Conditions for Weight Functions. *Studia Math.*, 1974, vol. 49, pp. 101-106.

21. Ohtsuka M. Extremal Length and Precise Functions. *Gakuto international Series*, 2003, vol. 19, pp. 1-343.

22. Schwartz L. *Therie des distributions*, vol. 1. Paris, Hermann, 1950. 148 p.

23. Väisälä J. Removable Sets for Quasiconformal Mappings. *J. Math. Mech.*, 1969, vol. 19, no. 1, pp. 49-51.

24. Ziemer W.P. Extremal Length and Conformal Capacity. *Trans. Amer. Math Soc.*, 1967, vol. 126, no. 3, pp. 460-473.

CRITERIA OF REMOVABLE SETS FOR HARMONIC FUNCTIONS IN THE SOBOLEV SPACES $\mathrm{L}^1_{\mathrm{p,w}}$

Vladimir Alekseevich Shlyk

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Department of Informatics and Informatical Customs Technologies,
Vladivostok Branch of Russian Customs Academy
shlykva@yandex.ru
Strelkovaya St., 16v, 690034 Vladivostok, Russian Federation

Abstract. Ahlfors and Beurling [16] proved that set E is removable for class AD^2 of analytic functions with the finite Dirichlet integral if and only if E does not change extremal distances. Their proof uses the conformal invariance of class AD^2, so it does not immediately generalize to $p \neq 2$ and to the relevant classes of harmonic functions in the space. In 1974 Hedberg [19] proposed new approaches to the problem of describing removable singularities in the function theory. In particular he gave the exact functional capacitive conditions for a set to be removable for class $HD^p(G)$. Here $HD^p(G)$ is the class of real-valued harmonic functions u in a bounded open set $G \subset R^n$, $n \geq 2$, and such that

$$\int\limits_G |\nabla u|^p \, dx < \infty, \quad p > 1.$$

In this paper we extend Hedberg's results on class $HD^{p,w}(G)$ of harmonic functions u in G and such that

$$\int\limits_G |\nabla u|^p \, w dx < \infty.$$

Here a locally integrable function $w : R^n \to (0, +\infty)$ satisfies the Muckenhoupt condition [20]

$$\sup \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w dx \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w^{1-q} dx \right)^{p-1} < \infty,$$

where the supremum is taking over all coordinate cubes $Q \subset R^n$, $q \in (1, +\infty)$ and $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; by $\mathcal{L}_n(Q) = |Q|$ we denote the n-dimensional Lebesgue measure of Q.

We denote by $L^1_{q,\tilde{w}}(G)$ the Sobolev space of locally integrable functions F on G, whose generalized gradient in G are such that

$$\|f\|_{L^1_{q,\tilde{w}}(G)} = \left(\int\limits_G |\nabla f|^q \, \tilde{w} dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \text{ where } \tilde{w} = w^{1-q}.$$

The closure of $C_0^\infty(G)$ in $\| \cdot \|_{L^1_{q,\tilde{w}}(G)}$ is denoted by $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G)$.

For compact set $K \subset G$ $(q, \tilde{w})$-capacity regarding G is defined by

$$C_{q,\tilde{w}}(K) = \inf_v \int_G |\nabla v|^q \, \tilde{w} dx,$$

where the infimum is taken over all $v \in C_0^\infty(G)$ such that $v = 1$ in some neighbourhood of K.

Note that $C_{q,\tilde{w}}(K) = 0$ is independent from the choice of bounded set $G \subset R^n$. We set $C_{q,\tilde{w}}(F) = 0$ for arbitrary $F \subset R^n$ if for every compact $K \subset F$ there exists a bounded open set G such that $C_{q,\tilde{w}}(K) = 0$ regarding G.

To conclude, we formulate the main results.

Theorem 1. *Compact $E \subset G$ is removable for $HD^{p,w}(G)$ if and only if $C_0^\infty(G \setminus E)$ is dense in $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(G)$.*

Theorem 2. *Compact $E \subset G$ is removable for $HD^{p,w}(G)$ if and only if $C_{q,\tilde{w}}(E) = 0$.*

Corollary. *The property of being removable for $HD^{p,w}(G)$ is local, i.e. compact $E \subset G$ is removable if and only if every $x \in E$ has a compact neighbourhood, whose intersection with G is removable.*

Theorem 3. *If G is an open set in R^n and $C_{q,\tilde{w}}(R^n \setminus G) = 0$. Then $C_0^\infty(G)$ is dense in $\overset{\circ}{\mathrm{L}}{}^1_{q,\tilde{w}}(R^n)$.*

Key words: Sobolev spaces, harmonic function, Schwartz distribution,capacity of set.