DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2019.3.3

УДК 517.956
ББК 22.161

Дата поступления статьи: 13.03.2019
Дата принятия статьи: 05.07.2019

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Серик Амурзаевич Алдашев

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики
и математического моделирования,
Казахский национальный педагогический университет им. Абая
aldash51@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-8223-6900
ул. Толе би, 86, 0500012 г. Алматы, Казахстан

Аннотация. Известно, что при математическом моделировании электромагнитных полей в пространстве, характер электромагнитного процесса определяется свойствами среды. Если среда непроводящая, то получаем многомерные гиперболические уравнения. Если же среда обладает большой проводимостью, то приходим к многомерному параболическому уравнению. Следовательно, анализ электромагнитных полей в сложных средах (например, если проводимость среды меняется) сводится к многомерному гиперболо-параболическому уравнению.

Известно также, что колебания упругих мембран в пространстве по принципу Гамильтона можно моделировать многомерными гиперболическими уравнениями. Изучение процесса распространения тепла в среде, заполненной массой, приводит к многомерным параболическим уравнениям.

Следовательно, исследуя математическое моделирование процесса распространения тепла в колеблющихся упругих мембранах, также приходим к многомерным гиперболо- параболическим уравнениям. При изучении этих приложений, возникает необходимость получения явного представления решений исследуемых задач.

В данной работе приводится многомерная область, в которой однозначно разрешима задача Дирихле для гиперболо-параболического уравнения и получен явный вид его классического решения.

Ключевые слова: многомерная область, задача Дирихле, однозначная разрешимость, сферические функции, функция Бесселя.

Введение

Известно, что при математическом моделировании электромагнитных полей в пространстве характер электромагнитного процесса определяется свойствам среды. Если среда непроводящая, то получаем многомерное гиперболическое уравнение. Если же среда обладает большой проводимостью, то приходим к многомерному параболическому уравнению.

Следовательно, анализ электромагнитных полей в сложных средах (например, если проводимость среды меняется) сводится к многомерному гиперболо-параболическому уравнению [10].

Известно, также что колебания упругих мембран в прстранстве моделируются уравнениями в частных производных.

Если прогиб мембраны считать функцией $u(x,t)$, $x=(x_1,...,x_m,)$, $m\geq 2$, то по принципу Гамильтона приходим к многомерному гиперболическому уравнению. Изучение процесса распространения тепла в среде, заполненной массой приводит к многомерному параболическому уравнению.

Следовательно, исследуя математическое моделирование процесса распространения тепла в колеблющихся упругих мембранах также приходим к многомерному гиперболо-параболическому уравнению [4].

При изучении этих приложений, возникает необходимость получения явного препредставления решений исследуемых задач.

Теория краевых задач для гиперболо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучена [9]. Многомерные аналоги этих задач в обобщенных пространствах исследованы в [5; 7].

В [1] задача Дирихле изучена для многомерных гиперболо-параболических уравнений и показано, что корректность этой задачи существенно зависит от высоты гиперболической части рассматриваемой цилиндрической области.

Естественно возникает вопрос: имеются ли другие области, где задача Дирихле является корректной?

В данной работе найдена многомерная область в которой однозначно разрешима задача Дирихле для модельного гиперболо-параболического уравнения и приводится явный вид его классического решения.

1. Постановка задачи и результат

Пусть Ω_α — область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,\ \ldots,\ x_m,t)$, ограниченная при $t>0$ конической поверхностью

$$K:\, t=\varphi(r),\, \varphi(0)=\varphi(1)=0,\, \varphi(r)\in C^1([0,1])\cap C^2((0,1)),\, |\varphi'(r)|<1,$$

а при $t<0$ цилиндром $\Gamma_\alpha=\{(x,t):|x|=1\}$, и плоскостью $t=\alpha<0$, где $r=|x|$ — длина вектора $x=(x_1,...,x_m)$.

Обозначим через Ω^+ и Ω_α^- части области Ω_α, лежащие в полупространствах $t>0$ и $t<0$; σ_α — нижнее основание области Ω_α^-.

Пусть далее S — общая часть границ областей Ω^+ и Ω_α^- представляющая множество $\{t=0,\, 0<|x|<1\}$ в E_m.

В области Ω_α рассмотрим многомерное гиперболо-параболическое уравнение

$$0 = \begin{cases} \Delta_x u - u_{tt},\ t > 0, \\ \Delta_x u - u_t,\ t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, $m \geq 2$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m$, t к сферическим r, $\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$, t, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, ..., m-1$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$.

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области Ω_α при $t \neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega^+ \cup \Omega_\alpha^-)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_K = \varphi_1(r, \theta), \tag{2}$$

$$u\Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi(t, \theta), \qquad u\Big|_{\sigma_\alpha} = \varphi_2(r, \theta). \tag{3}$$

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S)$, $l = 0, 1, ...$ — пространства Соболева.

Имеют место утверждения (см. [8]).

Лемма 1. *Пусть $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$. Если $l \geq m-1$, то ряд*

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно, при этом

$$f_n^k(r) = \int_H f(r, \theta) Y_{n,m}^k(\theta) dH,$$

где H — единичная сфера в E_m.

Лемма 2. *Для того, чтобы $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда* (4) *удовлетворяли неравенствам*

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \qquad c_1,\ c_2 = \text{const}.$$

Через $\bar{\varphi}_n^k(r)$, $\bar{\varphi}_{2n}^k(r)$, $\psi_n^k(t)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (4) функций $\varphi_1(r, \theta)$, $\varphi_2(r, \theta)$, $\psi(t, \theta)$ соответственно.

Пусть $\varphi_1(r, \theta) = r^3 \varphi_1^*(r, \theta)$, $\varphi_2(r, \theta) = r^3 \varphi_2^*(r, \theta)$, $\varphi_1^*(r, \theta), \varphi_2^*(r, \theta) \in W_2^l(S)$, $\psi(t, \theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha)$, $l > \frac{3m}{2} + 4$.

Тогда справедлива теорема.

Теорема 1. *Задача 1 однозначно разрешима.*

2. Доказательство теоремы 1

В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_α имеет вид

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_t = 0, \tag{5}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(sin^{m-j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),\quad g_1 = 1,\quad g_j = (sin\theta_1 ... sin\theta_{j-1})^2,\quad j > 1.$$

Известно (см. [8]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, ...$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y^k_{n,m}(\theta)$.

Так как искомое решение задачи 1 в области Ω^-_α принадлежит классу $C(\overline{\Omega^-_\alpha}) \cap C^2(\Omega^-_\alpha)$, то его можно искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}^k_n(r,t)Y^k_{n,m}(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{u}^k_n(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5) и используя ортогональность сферических функций $Y^k_{n,m}(\theta)$ (см. [8]), будем иметь

$$\bar{u}^k_{nrr} + \frac{m-1}{r}\bar{u}^k_{nr} - \bar{u}^k_{nt} - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}^k_n = 0,\quad k = \overline{1, k_n},\quad n = 0, 1, \ldots, \tag{7}$$

при этом краевое условие (3), с учетом леммы 1, соответственно запишется в виде

$$\bar{u}^k_n(1,t) = \psi^k_{2n}(t),\quad \bar{u}^k_n(r,\alpha) = \bar{\varphi}^k_{2n}(r),\quad k = \overline{1,k_n},\quad n = 0, 1, \ldots \tag{8}$$

В (7), (8), произведя замену $\bar{\upsilon}^k_n(r,t) = \overline{u}^k_n(r,t) - \psi^k_{2n}(t)$ получим

$$\bar{\upsilon}^k_{nrr} + \frac{m-1}{r}\bar{\upsilon}^k_{nr} - \bar{\upsilon}^k_{nt} - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\upsilon}^k_n = \overline{f}^k_n(r,t), \tag{9}$$

$$\bar{\upsilon}^k_n(1,t) = 0,\quad \bar{\upsilon}^k_n(r,\alpha) = \varphi^k_{2n}(r),\quad k = \overline{1,k_n},\quad n = 0, 1, \ldots, \tag{10}$$

$$\overline{f}^k_n(r,t) = \psi^k_{nt} + \frac{\lambda_n g(t)}{r^2}\psi^k_n(t),\qquad \varphi^k_{2n}(r) = \overline{\varphi}^k_{2n}(r) - \psi^k_n(\alpha).$$

Произведя замену переменной $\bar{\upsilon}^k_n(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}}\upsilon^k_n(r,t)$ задачу (9), (10) приведем к следующей задаче

$$L\upsilon^k_n \equiv \upsilon^k_{nrr} - \upsilon^k_{nt} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\upsilon^k_n = f^k_n(r,t), \tag{11}$$

$$\upsilon^k_n(1,t) = 0,\qquad \upsilon^k_n(r,\alpha) = \widetilde{\varphi}^k_{2n}(r), \tag{12}$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{((m-1)(3-m) - 4\lambda_n)}{4},\quad f^k_n(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\overline{f}^k_n(r,t),\quad \widetilde{\varphi}^k_{2n}(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\varphi^k_{2n}(r).$$

Решение задачи (11), (12) ищем в виде

$$\upsilon^k_n(r,t) = \upsilon^k_{1n}(r,t) + \upsilon^k_{2n}(r,t),$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{1n}^k = f_n^k(r,t), \tag{13}$$

$$\upsilon_{1n}^k(1,t) = 0,\ \upsilon_{1n}^k(r,\alpha) = 0; \tag{14}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{2n}^k = 0, \tag{15}$$

$$\upsilon_{2n}^k(1,t) = 0,\ \upsilon_{2n}^k(r,\alpha) = \widetilde{\varphi}_{2n}^k(r). \tag{16}$$

Решение задач (13),(14) и (15),(16) рассмотрим в виде

$$\upsilon_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r)T_s(t), \tag{17}$$

при этом пусть

$$f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t)R_s(r), \qquad \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}R_s(r). \tag{18}$$

Подставляя (17) в (13), (14), с учетом (18), получим

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}R_s + \mu R_s = 0, \qquad 0 < r < 1, \tag{19}$$

$$R_s(1) = 0, \qquad \left|R_s(0)\right| < \infty, \tag{20}$$

$$T_{st} + \mu T_s(t) = -a_{s,n}(t), \qquad \alpha < t < 0, \tag{21}$$

$$T_s(\alpha) = 0. \tag{22}$$

Ограниченным решением задачи (19), (20) является (см. [6])

$$R_s(r) = \sqrt{r}J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{23}$$

где $\nu = \frac{n+(m-2)}{2}$, $\mu_{s,n}$ — положительные нули функции Бесселя первого рода $J_\nu(z)$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Решением задачи (21), (22) является

$$T_{s,n}(t) = \left(\exp\left(-\mu_{s,n}^2 t\right)\right)\int_t^\alpha a_{s,n}(t)\left(\exp \mu_{s,n}^2\xi\right)d\xi. \tag{24}$$

Подставляя (23) в (22) получим

$$r^{-\frac{1}{2}}f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r), \quad r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}J_\nu(\mu_{s,n}r), \quad 0 < r < 1. \tag{25}$$

Ряды (25) являются разложениями в ряды Фурье — Бесселя (см. [3]), если

$$a_{s,n}(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int_0^1 \sqrt{\xi}f_n^k(\xi,t)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \tag{26}$$

$$b_{s,n}=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1\sqrt{\xi}\tilde{\varphi}_{2n}^k(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \tag{27}$$

где $\mu_{s,n}$, $s=1,2,\ldots$ — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (17), (23), (24) получим решение задачи (13), (14)

$$\upsilon_{1n}^k(r,t)=\sum_{s=1}^\infty\sqrt{r}\left((\exp\left(-\mu_{s,n}^2t\right)\right)\int\limits_t^\alpha a_{s,n}(\xi)\left(\exp\mu_{s,n}^2\xi\right)d\xi)J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{28}$$

где $a_{s,n}(t)$ определяются из (26).

Далее, подставляя (17) в (15), (16), с учетом (18), будем иметь уравнение

$$T_{st}+\mu_{s,n}^2T_s=0,\qquad \alpha<t<0,\qquad T_s(\alpha)=b_{s,n},$$

решением которого является

$$T_{s,n}(t)=b_{s,n}\exp\mu_{s,n}^2(\alpha-t). \tag{29}$$

Из (23), (29) получим

$$\upsilon_{2n}^k(r,t)=\sum_{s=1}^\infty b_{s,n}\sqrt{r}\left(\exp\mu_{s,n}^2(\alpha-t)\right)J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{30}$$

где $b_{s,n}$ находятся из (27).

Следовательно, из (6) вытекает, что единственным решением задачи (1), (3) в области Ω_α^- является функция

$$\begin{aligned}u(r,\theta,t)&=\sum_{n=0}^\infty\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta)=\sum_{n=0}^\infty\sum_{k=1}^{k_n}[\psi_{2n}^k(t)+\bar{\upsilon}_n^k(r,t)]Y_{n,m}^k(\theta)=\\&=\sum_{n=0}^\infty\sum_{k=1}^{k_n}[\psi_{2n}^k(t)+r^{\frac{(1-m)}{2}}\upsilon_n^k(r,t)]Y_{n,m}^k(\theta)=\\&=\sum_{n=0}^\infty\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\psi_{2n}^k(t)+r^{\frac{(1-m)}{2}}\left[\upsilon_{1n}^k(r,t)+\upsilon_{2n}^k(r,t)\right]\right\}Y_{n,m}^k(\theta)\end{aligned} \tag{31}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (28) и (30).

Учитывая формулы (см. [3; 10])

$$2J_\nu'(z)=J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z),$$

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)+0\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right),\quad \nu\geq0,$$

а также оценки [8]

$$|k_n|\leq c_1n^{m-2},\qquad\left|\frac{\partial^q}{\partial\theta_j^q}Y_{n,m}^k(\theta)\right|\leq c_2n^{\frac{m}{2}-1+q},\qquad j=\overline{1,m-1},\quad q=0,1,\ldots,$$

а также леммы, ограничения на заданные функции $\psi(t,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)$, как в [6], можно доказать, что полученное решение (31) принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\alpha^-)\cap C^2(\Omega_\alpha^-)$.

Далее, из (28), (30), (31) при $t\to -0$ имеем

$$u(r,\theta,0)=\tau(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\tau_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{32}$$

где

$$\tau_n^k(r)=\psi_{2n}^k(0)+\sum_{s=1}^{\infty}r^{\frac{(2-m)}{2}}\left[\int_0^\alpha a_{s,n}(\xi)\left(\exp\mu_{s,n}^2\xi\right)d\xi+b_{s,n}(\exp\mu_{s,n}^2\alpha)\right]J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n}r).$$

Из (26)–(30),а также из лемм и граничных условий вытекает, что

$$\tau(r,\theta)=r^3\tau^*(r,\theta),\quad \tau^*(r,\theta)\in W_2^l(S),\quad l>\frac{3m}{2}+4.$$

Таким образом, учитывая краевые условия (2) и (32), приходим в области Ω^+ к задаче Дирихле для многомерного волнового уравнения

$$\Delta_x u-u_{tt}=0 \tag{33}$$

с данными

$$u\Big|_K=\psi_1(r,\theta)\quad u\Big|_S=\tau(r,\theta), \tag{34}$$

которое имеет единственное решение ([2]).

Так как в ([2]) получен явный вид решения задачи (33), (34), то можно записать явное представление решения и для задачи 1.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алдашев, С. А. Корректность задачи Дирихле для одного класса многомерных гипербо-параболических уравнений / С. А. Алдашев // Укр. матем. Вестник. — 2013. — Т. 10, № 2. — С. 147–157.

2. Алдашев, С. А. Корректность задачи Дирихле и Пуанкаре в многомерной области для волнового уравнения / С. А. Алдашев // Укр. матем. журнал. — 2014. — Vol. 66, № 10. — P. 1414–1419.

3. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М. : Наука, 1974. — Т. 2. — 297 с.

4. Бицадзе, А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А. В. Бицадзе. — М. : Наука, 1981. — 448 с.

5. Врагов, В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики / В. Н. Врагов. — Новосибирск : НГУ, 1983. — 84 с.

6. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. — М. : Наука, 1965. — 703 с.

7. Каратопраклиев, Г. Д. Краевые задачи для уравнения смешанного типа в многомерных областях / Г. Д. Каратопраклиев // Частные дифференциальные уравнения. — Warsaw, 1983. — Т. 10. — С. 261–269.

8. Михлин, С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения / С. Г. Михлин. — М. : Физматгиз, 1962. — 254 с.

9. Нахушев, А. М. Задача со смещением для уравнения в частных производных / А. М. Нахушев. — М. : Наука, 2006. — 287 с.

10. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1966. — 724 с.

REFERENCES

1. Aldashev S.A. Korrektnost zadachi Dirikhle dlya odnogo klassa mnogomernykh giperbo-parabolicheskikh uravneniy [The Correctness of the Dirichlet Problem for a Class of Multidimensional Hyperbolic-Parabolic Equations]. *Ukr. matem. Vestnik* [Ukr. Math Bulletin], 2013, vol. 10, no. 2, pp. 147-157.

2. Aldashev S.A. Корректность задачи Дирихле и Пуанкаре в многомерной области для волнового уравнения. *Укр. матем. журнал*, 2014, vol. 66, no. 10, pp. 1414-1419.

3. Bateman G., Erdelyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii* [Higher Transcendental Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1974, vol. 2. 297 p.

4. Bitsadze A.V. *Nekotorye klassy uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [Some Classes of Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 448 p.

5. Vragov V.N. *Kraevye zadachi dlya neklassicheskikh uravneniy matematicheskoy fiziki* [Boundary Value Problems for Non-Classical Equations of Mathematical Physics]. Novosibirsk, NGU Publ., 1983. 84 p.

6. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsialnym uravneniyam* [Reference Book on Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 703 p.

7. Karatoprakliev G.D. Kraevye zadachi dlya uravneniya smeshannogo tipa v mnogomernykh oblastyakh [Boundary Value Problems for the Mixed Type Equation in Multidimensional Domains]. *Chastnye differentsialnye uravneniya* [Partial Differential Equations] Warsaw, 1983, vol. 10, pp. 261-269.

8. Mikhlin S.G. *Mnogomernye singulyarnye integraly i integralnye uravneniya* [Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962. 254 p.

9. Nakhushev A.M. *Zadacha so smeshcheniem dlya uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [A Problem with an Offset for the Partial Differential Equation]. Moscow, Nauka Publ., 2006. 287 p.

10. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 724 p.

WELL-POSEDNESS OF THE DIRICHLET PROBLEM IN A MULTIDIMENSIONAL DOMAIN FOR A HYPERBOLIC-PARABOLIC EQUATION

Serik Aymurzaevich Aldashev

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Department of Mathematics and Mathematical Modeling,
Abay Kazakh National Pedagogical University
aldash51@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-8223-6900
Tole bi St., 86, 0500012 Almaty, Republic of Kazakhstan

Abstract. It is known that in the mathematical modeling of electromagnetic fields in space, the nature of the electromagnetic process is determined by the properties of the medium. If the medium is nonconducting, then we obtain multidimensional hyperbolic equations. If the medium has a large conductivity, then we get a multidimensional parabolic equation. Consequently, the analysis of electromagnetic fields in complex media (for example, if the conductivity of the medium changes) reduces to a multidimensional hyperbolic-parabolic equation.

It is also known that the vibrations of elastic membranes in space by the Hamiltonian principle can be modeled by multidimensional hyperbolic equations. The study of the process of heat propagation in a medium filled with mass leads to multidimensional parabolic equations.

Consequently, by investigating the mathematical modeling of the process of heat propagation in oscillating elastic membranes, we also arrive at multidimensional hyperbolic-parabolic equations. When studying these applications, it becomes necessary of obtaining an explicit representation of the solutions of the investigated problems.

In this paper we give a multidimensional domain where the Dirichlet problem for a hyperbolic-parabolic equation is uniquely solvable and an explicit form of its classical solution is obtained.

Key words: multidimensional domain, Dirichlet problem, unique solvability, spherical functions, Bessel function.