



www.volsu.ru

DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2019.4.1>

УДК 517.5+514.174

ББК 22.15+22.16

Дата поступления статьи: 14.06.2019

Дата принятия статьи: 23.10.2019

О СТЕПЕНИ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ ТЕТРАЭДРА

Александр Юрьевич Игумнов

Кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры экономической теории, математики и информационных систем, Волжский институт экономики, педагогики и права
IAJu1965@mail.ru
ул. Советская, 6, 404111 г. Волжский, Российская Федерация

Аннотация. В работе предлагается характеристика невырожденности симплекса, определяемая через ρ -расстояние между классами ортогонально эквивалентных семейств точек (пронумерованных наборов вершин симплекса). Данная характеристика может быть использована, в частности, для составления критериев качества сетки. В работе исследуется задача вычисления ρ -расстояния от заданного тетраэдра (4-вершинного симплекса) до множества вырожденных тетраэдров. Показано, что эта задача сводится к вычислению ρ -расстояния от данного тетраэдра до семейств точек (на плоскости) некоторых трех классов. Для правильного 4-вершинного тетраэдра ρ -расстояние вычислено явно.

Ключевые слова: невырожденность тетраэдра, невырожденность треугольника, триангуляция, сохранение ориентации, качество сетки, генерация сетки, компьютерное моделирование, квазиизометрические отображения.

Введение

Под выражением «степень невырожденности тетраэдра» будем понимать числовую характеристику отличия рассматриваемого тетраэдра (симплекса) от вырожденного, полагая для вырожденного тетраэдра это отличие нулевым. Подобные характеристики естественным образом необходимы в задачах триангуляции плоских и пространственных областей, задачах генерации симплициальных сеток.

Если говорить об отдельных элементах сетки (то есть о каждом симплексе), то они характеризуются как отличием от вырожденных симплексов, так и отличием от некоторого эталонного (например, правильного) симплекса. Соответствующие выражения могут иметь вид функции длин ребер симплекса (сторон треугольника), содержать значения углов (как элементов симплекса), а также дополнительные элементы — значения радиусов вписанных/описанных сфер (окружностей). Например, в работе [8] предлагается мера отличия треугольника от равностороннего

$$Q = \left(\frac{a+b}{c} - 1 \right) \left(\frac{b+c}{a} - 1 \right) \left(\frac{a+c}{b} - 1 \right),$$

где a, b, c — длины сторон рассматриваемого треугольника.

Помимо отмеченного вопроса, в указанных задачах также возникает вопрос определения условий, гарантирующих сохранение ориентации симплекса и сохранение отношения смежности пары симплексов. Касательно первого вопроса классическим результатом является теорема Альфорса о сохранении ориентации треугольника при квазиконформном отображении [1]. Из относительно недавних работ укажем [2; 6; 7], а также [9, раздел 5.2].

И наконец, возникает вопрос о характеристизации сетки в целом — то есть о составлении критерия качества сетки. С краткой сводкой критериев качества сетки можно ознакомиться по работе [10]. С конкретным применением критерия качества сетки при генерации тетраэдральной сетки можно ознакомиться по работе [3].

В работе [4] было введено понятие k -точечных семейств (пронумерованных наборов k точек в \mathbb{R}^n) и показано, что на них можно задать метрику (далее — ρ -расстояние), определяемую через соотношение M/m , где числа M и m характеризуют «размах» искажений расстояний между точками семейства, при котором допускается совмещение семейств с точностью до ортогональных преобразований. В терминах указанной метрики можно определить расстояние между двумя симплексами (полагая семейством точек пронумерованный набор вершин симплекса), а также между данным симплексом и множеством вырожденных симплексов. Там же приведено в явном виде выражение для ρ -расстояния от заданного треугольника до множества вырожденных треугольников (функция длин сторон треугольника) и показано, что равносторонний треугольник является, в сравнении с другими, наиболее отдаленным от множества вырожденных треугольников. В работе [5] как пример применения понятия ρ -расстояния было получено достаточное условие сохранения ориентации треугольника при квазиизометрическом отображении.

Схема составления характеристики сетки с использованием ρ -метрики может быть следующей. Симплициальной сетке соответствует некоторое множество \mathcal{S} в пространстве k -точечных семейств. Например, если сетка состоит только из равносторонних треугольников, то \mathcal{S} — одноточечное множество (точнее, кратная точка). Если сетка состоит из одинаковых неправильных треугольников, то множество \mathcal{S} — это также кратная точка, но смещенная относительно точки, представляющей равносторонний треугольник. Если сетка состоит из разных треугольников, то соответствующее множество есть совокупность точек \mathcal{S} . Определение качества сетки сводится к описанию множества \mathcal{S} и может включать в себя:

- минимальное расстояние между множеством \mathcal{S} и множеством вырожденных семейств;

- расстояние между элементами множества \mathcal{S} и семейством, представляющем равносторонний треугольник;
- характеристику протяженности множества \mathcal{S} (например, его диаметр);
- количество точек-семейств, расположенных слишком близко к вырожденным (близость треугольника к вырожденному влечет необходимость вычислений с повышенной точностью), и др.

Аналогичным образом можно характеризовать сетку из симплексов произвольной размерности.

В настоящей работе исследуется задача вычисления ρ -расстояния от тетраэдра до множества вырожденных тетраэдров. Показано, что эта задача сводится к вычислению ρ -расстояния от семейства точек, определяемого вершинами данного тетраэдра, до семейств точек (на плоскости) некоторых трех классов. Один из классов является двухпараметрическим множеством семейств, два других содержат конечное количество семейств. Для правильного тетраэдра указанное расстояние вычислено явно.

Далее термины класс и множество используются как синонимы.

1. Предварительные сведения

Следуя [4], дадим необходимые определения и изложим схему исследования.

Отображение $F : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $I = \{1, \dots, k\}$, будем называть семейством точек или k -точечным семейством в \mathbb{R}^n . Точки $F(1), \dots, F(k)$ будем называть значениями семейства F .

Семейства F, G ортогонально эквивалентны, если их значения совмещаются некоторым ортогональным преобразованием. На множестве классов ортогонально эквивалентных семейств можно ввести метрику, определяемую следующим образом. Пусть F, G — представители классов эквивалентности. Полагаем

$$\mathcal{A}(F, G) = \left\{ \frac{|G(i)G(j)|}{|F(i)F(j)|}, (i, j) : 1 \leq i < j \leq k, |F(i)F(j)| + |G(i)G(j)| > 0 \right\},$$

здесь $|\dots|$ — евклидова длина отрезка, значение дроби с нулевым знаменателем равно $+\infty$. Положим

$$\rho(F, G) = \begin{cases} 0, & \text{если для всех } i, j \quad |F(i)F(j)| = 0 \text{ и } |G(i)G(j)| = 0; \\ \log \frac{\max \mathcal{A}(F, G)}{\min \mathcal{A}(F, G)}, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (1)$$

полагая основание логарифма большим единицы, $\frac{a}{0} = +\infty$, $\log(+\infty) = +\infty$. Геометрический смысл величины (1) — евклидова длина отрезка $\min \mathcal{A}(F, G) \max \mathcal{A}(F, G)$, отложенного на логарифмической шкале. Для упрощения обозначений и терминологии мы отождествляем обозначение класса эквивалентности и его представителя, и величину (1) будем называть расстоянием между семействами F, G . Везде далее полагаем, что основание логарифма в правой части выражения (1), указанного явно, и основание логарифма, подразумеваемого обозначением $\rho(F, G)$, одно и то же.

Табличное задание отображения F будем записывать как $F = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & k \\ F(1) & F(2) & \dots & F(k) \end{matrix} \right\}$ и подобным же образом с неявной нумерацией столбцов, то есть указанием буквенных

индексов вместо конкретных числовых значений. Отрезок в \mathbb{R}^n , определяемый точками $F(i)$, $F(j)$, будем обозначать $F(i)F(j)$ и называть отрезком $F(i)F(j)$ семейства F . Концы отрезка будем называть также вершинами отрезка.

Если $\sigma : I \rightarrow I$ — некоторая перестановка, то $F \circ \sigma = \left\{ F(\sigma(1)) F(\sigma(2)) \cdots F(\sigma(k)) \right\}$. То есть семейство $F \circ \sigma$ получается из семейства F некоторой перенумерацией значений семейства F . Вообще говоря, $\rho(F \circ \sigma, F) \neq 0$ и $\rho(F \circ \sigma, G) \neq \rho(F, G)$.

Пусть X — некоторое k -точечное семейство, \mathcal{Y} — некоторое множество k -точечных семейств. Расстояние между X и \mathcal{Y} определим обычным образом: $\rho(X, \mathcal{Y}) = \inf_{Y \in \mathcal{Y}} \rho(X, Y)$. Полагаем $\rho(X, \emptyset) = \infty$ для любого семейства X .

Если множество \mathcal{Y} инвариантно относительно перестановок (то есть $\forall Y \in \mathcal{Y} \forall \sigma : I \rightarrow I$ следует $Y \circ \sigma \in \mathcal{Y}$), то $\rho(X, \mathcal{Y}) = \rho(X \circ \sigma, \mathcal{Y})$ для всякой перестановки σ .

Всякое k -точечное семейство определяет некоторый k -симплекс (при $k = 2, 3, 4, \dots$ соответственно: отрезок, треугольник, тетраэдр, \dots). Обратное, всякая нумерация k вершин симплекса определяет k -точечное семейство. То есть, k -симплексу соответствует множество из $k!$ семейств, получаемых перенумерацией значений одного из них.

Пусть T', T'' — k -симплексы; X — семейство, полученное при некоторой нумерации вершин симплекса T' ; \mathcal{Y} — множество всех семейств, определяемых симплексом T'' . Так как \mathcal{Y} σ -инвариантно, то $\rho(X \circ \sigma, \mathcal{Y}) = \rho(X, \mathcal{Y})$. На этом основании величину $\rho(X, \mathcal{Y})$ можно называть расстоянием между симплексами T', T'' . Аналогично, если T — некоторый k -симплекс, X — одно из k -точечных семейств, определяемых симплексом T , \mathcal{Y} — множество семейств, определяемых вырожденными k -симплексами (то есть размерности не более $k - 2$), то величину $\rho(X, \mathcal{Y})$ можно называть расстоянием между симплексом и множеством вырожденных симплексов.

В работе [4] показано, что равносторонний треугольник T является наиболее отдаленным от множества вырожденных треугольников и что $\rho(T, \mathcal{Y}) = \log 2$.

Следуя [4], дадим описание схемы выявления в множестве \mathcal{Y} семейств, ближайших к заданному семейству, несколько ее конкретизировав. Пусть X — четырехточечное семейство с попарно различными значениями, \mathcal{Y} — множество четырехточечных семейств, определяемых вырожденными симплексами. Семейство X порождает разбиение множества \mathcal{Y} на классы $\Xi_p^q(X)$, определяемые следующим образом. Полагаем $Y \in \Xi_p^q(X)$, если числовой набор $\mathcal{A}(X, Y)$ содержит ровно p минимальных и ровно q максимальных значений. Для наглядности выкладок отрезки $Y(i)Y(j)$ семейства Y , для которых величина $\frac{|Y(i)Y(j)|}{|X(i)X(j)|}$ минимальна, будем представлять окрашенными в синий цвет и называть синими; отрезки $Y(i)Y(j)$ семейства Y , для которых величина $\frac{|Y(i)Y(j)|}{|X(i)X(j)|}$ максимальна, будем представлять окрашенными в красный цвет и называть красными; остальные отрезки семейства будем представлять окрашенными в черный цвет и называть черными. Вершину некоторого цветного отрезка (то есть красного или синего) будем называть свободной, если она принадлежит единственному цветному отрезку.

Заметим, что любую наперед выбранную величину $\frac{|Y(i)Y(j)|}{|X(i)X(j)|}$ из числового набора $\mathcal{A}(X, Y)$ можно полагать равной 1 (или несколько величин, если их значения совпадают), применив к Y преобразование подобия с коэффициентом, обратным этой величине.

Величины числового набора $\mathcal{A}(X, Y)$ будем изображать точками на логарифмической шкале, полагая их окрашенными в те же цвета, что и соответствующие отрезки $Y(i)Y(j)$. При этом черные точки изображать не будем. Самую левую точку, определяемую набором $\mathcal{A}(X, Y)$, будем обозначать m , самую правую — M , значения p и q будем

называть кратностями соответствующих концов отрезка tM . Семейства Y будем условно изображать как прямоугольники с диагоналями. Вершины прямоугольника представляют собой значения семейства, стороны и диагонали — отрезки семейства. Каждый класс $\Xi_p^q(X)$ исследуется на предмет возможности указать для семейства $Y \in \Xi_p^q(X)$ семейство Y' такое, что $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$. Семейство Y' ищется посредством смещения каким-либо образом одной из вершин семейства Y с целью укоротить его красные отрезки и/или удлинить синие. Такое смещение (если оно возможно) приводит к изменению положения цветных точек на логарифмической шкале, в результате чего либо отрезок tM укоротится, либо изменится (уменьшится) кратность его концов. В последнем случае получившееся семейство Y^* исследуется на предмет наличия семейства Y' , расположенного ближе к X , чем семейство Y^* . За смещенными концевыми точками отрезка tM будем сохранять их прежнюю раскраску. Смещение вершины семейства полагаем настолько малым, что черные отрезки семейства остаются черными, при этом черные точки на шкале не изображаются.

Изменение длины отрезка tM (или кратностей его концов) будем отслеживать посредством двух логарифмических шкал, расположенных одна под другой: на верхней, обозначенной символом Y , будем указывать величины t, M с учетом кратности, соответствующие исходному семейству Y ; на нижней (обозначенной символом Y' или Y^*) — результат модификации отрезка tM в результате смещения некоторой вершины семейства. Шкалы выровнены по начальному положению величин t, M .

На случай одноцветной печати введем дублирование цветовых обозначений точек и отрезков их размером, формой и толщиной: изображение синей точки на шкале — \bullet ; изображение красной точки на шкале — \blacksquare ; изображение синего отрезка (дуги) — --- ; изображение красного отрезка (дуги) — --- . Помимо сказанного значения семейства будем изображать бесцветными точками — \circ . На некоторых рисунках, где отрезки семейства параллельны и разнесены, в качестве изображения вершины семейства применяется «растянутая» точка — \circ .

Для лучшего прочтения на рисунки нанесена вспомогательная сетка.

В отличие от изложенного в работе [4], исследование возможных смещений вершин семейств более громоздко (поскольку речь идет о точках на плоскости, а не на прямой, как в [4]). В данном случае исследование возможных смещений вершин семейств сводится к исследованию точки пересечения двух цветных окружностей на предмет наличия вблизи нее точки, расположенной внутри/снаружи определяемых окружностями кругов, удовлетворяющей условию: при смещении точки пересечения на место отсутствующей точки радиус красной окружности укорачивается, радиус синей — удлиняется. Необходимые формулировки оформлены как леммы и приводятся без доказательств. Для большей наглядности формулировки лемм сопровождаются рисунками.

1.1. Леммы

Лемма 1. Пусть $A, B \in \mathbb{R}^2$. Тогда сколь угодно близко к точке B найдется точка $B' \in \mathbb{R}^2$ такая, что $|AB'| < |AB|$.

Лемма 2. Пусть $A, B \in \mathbb{R}^2$. Тогда сколь угодно близко к точке B найдется точка $B' \in \mathbb{R}^2$ такая, что $|AB'| > |AB|$.

Лемма 3. Пусть $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ и при этом точка C лежит вне отрезка AB . Тогда найдется точка $C' \in \mathbb{R}^2$, сколь угодно близкая к C , такая, что $|AC'| < |AC|$ и

$|BC'| < |BC|$ (рис. 1).

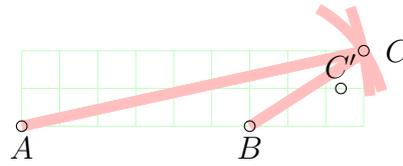


Рис. 1

Лемма 4. Пусть $A, B, C \in \mathbb{R}^2$. Тогда существует точка $C' \in \mathbb{R}^2$, сколь угодно близкая к C , такая что $|AC'| > |AC|$ и $|BC'| > |BC|$ (рис. 2, 3).

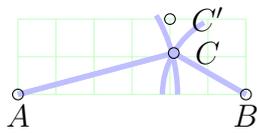


Рис. 2

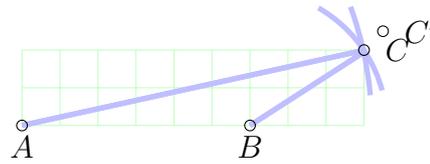


Рис. 3

Лемма 5. Пусть $A, B, C \in \mathbb{R}^2$. Пусть точка C либо лежит вне прямой AB , либо лежит внутри отрезка AB . Тогда сколь угодно близко к C найдется точка C' такая, что $|AC'| > |AC|$ и $|BC'| < |BC|$ (рис. 4, 5).

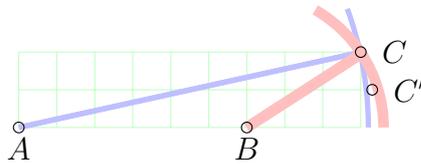


Рис. 4

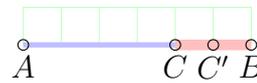


Рис. 5

Лемма 6. Пусть $A, B, C \in \mathbb{R}^2$, точка B расположена внутри отрезка AC . Тогда в сколь угодно малой окрестности точки C существует точка C' такая, что $|AC'| < |AC|$ и $|BC'| > |BC|$ (рис. 6).

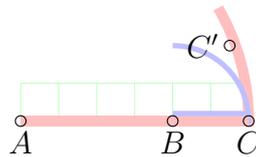


Рис. 6

1.2. Множества, содержащие ближайшие к X семейства

Наконец, для формулировки результатов нам потребуется выделить в множестве \mathcal{U} помимо классов $\Xi_p^q(X)$ еще три класса: $\mathcal{K}^1(X)$, $\mathcal{K}^2(X)$, $\mathcal{K}^3(X)$. Дадим соответствующие определения. Пусть X — четырехточечное семейство с попарно различными значениями. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^2$ — несовпадающие точки, $r, \lambda > 0$ — некоторые числа. Обозначим

$S_a(r)$ — окружность радиуса r с центром в точке a ; $S_{ab}(\lambda)$ — окружность равных отношений, определяемая отрезком ab и числом λ :

$$S_{ab}(\lambda) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \frac{|ax|}{|bx|} = \lambda \right\}.$$

В отношении четырехточечного семейства Y будем употреблять термин «планарное» как синоним указания $Y \in \mathcal{Y}$; семейство Y будем называть коллинеарным, если его значения лежат на одной прямой.

- Класс $\mathcal{K}^1(X)$. Пусть $X(i)X(j)X(k)X(l)$ — некоторая незамкнутая трехзвенная ломаная, составленная из отрезков семейства X . Определим класс $\mathcal{K}_{ijkl}^1(X)$ планарных семейств следующим образом:

$$\mathcal{K}_{ijkl}^1(X) = \{Y \text{ планарные} : Y(j) = X(j), Y(k) = X(k), \\ Y(i) = S_{Y(j)}(|X(j)X(i)|), Y(l) = S_{Y(k)}(|X(k)X(l)|)\}.$$

Класс $\mathcal{K}_{ijkl}^1(X)$ содержит бесконечно много семейств. Обозначим $\mathcal{K}^1(X) = \cup \mathcal{K}_{ijkl}^1(X)$, где объединение берется по всем возможным значениям четверки индексов i, j, k, l .

- Класс $\mathcal{K}^2(X)$. Определим класс $\mathcal{K}_{ijkl}^2(X)$ коллинеарных семейств следующим образом:

$$\mathcal{K}_{ijkl}^2(X) = \{Y \text{ коллинеарные} : |Y(i)Y(j)| = |X(i)X(j)|, \\ |Y(i)Y(k)| = |X(i)X(k)|, |Y(i)Y(l)| = |X(i)X(l)|\}.$$

Множество $\mathcal{K}_{ijkl}^2(X)$ содержит четыре семейства. Обозначим $\mathcal{K}^2(X) = \cup \mathcal{K}_{ijkl}^2(X)$, где объединение берется по всем возможным значениям четверки индексов i, j, k, l .

- Класс $\mathcal{K}^3(X)$. Обозначим: $A = X(i)$, $B = X(j)$, $C = X(k)$, $D = X(l)$, $\lambda_{AB} = \frac{|DA|}{|DB|}$, $\lambda_{BC} = \frac{|DB|}{|DC|}$, $\lambda_{AC} = \frac{|DA|}{|DC|}$. Определим класс $\mathcal{K}_{ijkl}^3(X)$ планарных семейств следующим образом:

$$\mathcal{K}_{ijkl}^3(X) = \{Y \text{ планарные} : Y(i) = X(i), Y(j) = X(j), Y(k) = X(k), \\ Y(l) \in S_{AB}(\lambda_{AB}) \cap S_{BC}(\lambda_{BC}) \cap S_{AC}(\lambda_{AC})\}.$$

Наглядное представление построения семейства Y следующее. В тетраэдре X выбирается грань ABC . Для каждой стороны треугольника ABC в плоскости, определяемой точками A, B, C (если треугольник ABC вырожденный, то в любой плоскости, содержащей точки A, B, C), строится окружность равных отношений, определяемая этой стороной и отношением расстояний от концов этого отрезка-стороны до вершины D . Три точки семейства Y совпадают с вершинами A, B, C треугольника. Четвертая точка является точкой пересечения (если таковая есть) трех окружностей равных отношений. Множество $\mathcal{K}_{ijkl}^3(X)$ содержит не более одного семейства. Обозначим $\mathcal{K}^3(X) = \cup \mathcal{K}_{ijkl}^3(X)$, где объединение берется по всем возможным значениям четверки индексов i, j, k, l .

Везде далее если в обозначении какого-либо класса семейство X не указано, то наличие такого указания подразумевается.

2. Исследование классов Ξ_i^j

В этом и последующем разделах полагаем, что значения семейства X попарно различны. Из определения величины (1) следует, что если при этом в семействе Y есть совпадающие значения, то $\rho(X, Y) = \infty$. Такие семейства мы исключаем из рассмотрения, не обязательно это оговаривая.

Теорема 1. Пусть $Y \in \Xi_1^1$. Тогда существует планарное семейство Y' такое, что $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$.

Доказательство. Очевидно, любой из цветных отрезков семейства Y имеет свободную вершину. Обозначим какой-либо цветной отрезок $Y(i)Y(j)$, полагая при этом свободной вершиной $Y(j)$. Доказательство изложим для каждого варианта раскраски отрезка $Y(i)Y(j)$.

1. Пусть отрезок $Y(i)Y(j)$ красный. Применяя лемму 1, где полагаем $A = Y(i)$, $B = Y(j)$, для семейства $Y' = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ Y(i) & B' & Y(k) & Y(l) \end{matrix} \right\}$ имеем: $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$ (см. рис. 7).
2. Пусть отрезок $Y(i)Y(j)$ синий. Применяя лемму 2, где полагаем $A = Y(i)$, $B = Y(j)$, для семейства $Y' = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ Y(i) & B' & Y(k) & Y(l) \end{matrix} \right\}$ имеем: $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$ (см. рис. 8).

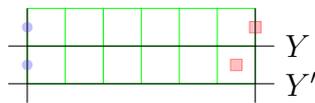


Рис. 7

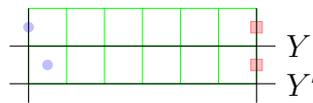


Рис. 8

Класс Ξ_1^2

Теорема 2. Пусть $Y \in \Xi_1^2$. Тогда существует планарное семейство Y' такое, что $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$.

Доказательство. Классифицируем расположение отрезков семейства Y следующим образом:

1. Один из цветных отрезков семейства имеет свободную вершину.
2. Ни один из цветных отрезков семейства не имеет свободной вершины.

Рассмотрим указанные случаи.

1. В этом случае красный отрезок семейства заведомо имеет свободную вершину (см. рис. 9–11).

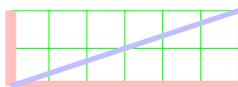


Рис. 9

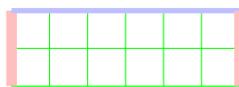


Рис. 10

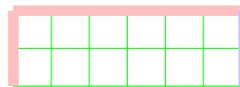


Рис. 11

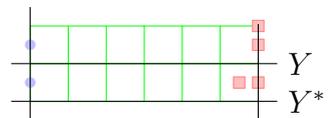


Рис. 12

Обозначим этот отрезок $Y(i)Y(j)$, полагая точку $Y(j)$ свободной вершиной. Повторяя выкладки п. 1 доказательства теоремы 1, получим семейство $Y^* = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ Y(i) & B' & Y(k) & Y(l) \end{matrix} \right\}$, для которого выполнено: $\rho(X, Y^*) = \rho(X, Y)$, $Y^* \in \Xi_1^1$ (рис. 12). Применяя теорему 1, где полагаем $Y = Y^*$, получаем требуемое.

2. В этом случае цветные отрезки семейства образуют треугольник, который будем рассматривать как треугольник с основанием $Y(i)Y(j)$ синего цвета и сторонами $Y(i)Y(k)$ и $Y(j)Y(k)$ красного цвета, то есть $Y(i)$, $Y(j)$ — общие вершины синего и красных отрезков, $Y(k)$ — общая вершина двух красных отрезков (рис. 13).

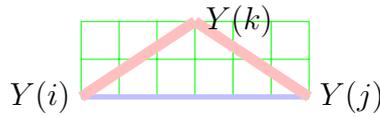


Рис. 13

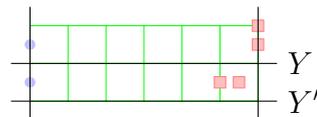


Рис. 14

Покажем, что точка $Y(k)$ не может лежать внутри отрезка $Y(i)Y(j)$. Из определения множества Ξ_1^2 выводим:

$$\frac{|Y(i)Y(j)|}{|X(i)X(j)|} < \frac{|Y(i)Y(k)|}{|X(i)X(k)|} = \frac{|Y(j)Y(k)|}{|X(j)X(k)|}. \tag{2}$$

Полагая общее значение величин в правой части неравенства (2) равным единице, имеем:

$$|Y(i)Y(k)| = |X(i)X(k)|, \tag{3}$$

$$|Y(j)Y(k)| = |X(j)X(k)|, \tag{4}$$

$$|Y(i)Y(j)| < |X(i)X(j)|. \tag{5}$$

С другой стороны, если точка $Y(k)$ лежит внутри отрезка $Y(i)Y(j)$, то в силу соотношений (3) и (4) треугольник $Y(i)Y(j)Y(k)$ можно рассматривать как получающийся из треугольника $X(i)X(j)X(k)$ увеличением угла $X(i)X(k)X(j)$ до развернутого (с сохранением длин сторон $X(i)X(k)$ и $X(j)X(k)$), откуда получаем

$$|Y(i)Y(j)| > |X(i)X(j)|,$$

что противоречит неравенству (5).

Таким образом, точка $Y(k)$ расположена вне отрезка $Y(i)Y(j)$. Применяя теперь лемму 3, где полагаем $A = Y(i)$, $B = Y(j)$, $C = Y(k)$, для семейства $Y' = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ Y(i) & Y(j) & C' & Y(l) \end{matrix} \right\}$ имеем: $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$ (рис. 14).

Класс Ξ_1^3

Теорема 3. Пусть $Y \in \Xi_1^3$. Тогда существует планарное семейство Y' такое, что $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$.

Доказательство. Классифицируем взаимное расположение отрезков семейства Y следующим образом.

1. Среди цветных отрезков семейства Y есть отрезок со свободной вершиной.
2. Среди цветных отрезков семейства Y нет отрезка со свободной вершиной. В этом случае цветные отрезки образуют замкнутую четырехзвенную ломаную, при этом красные отрезки составляют незамкнутую трехзвенную ломаную.

Рассмотрим указанные случаи.

1. Отрезок со свободной вершиной обозначим $Y(i)Y(j)$, полагая $Y(j)$ свободной вершиной.

Если отрезок $Y(i)Y(j)$ красный, то, повторяя выкладки п. 1 доказательства теоремы 1, получим семейство $Y^* = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ Y(i) & B' & Y(k) & Y(l) \end{matrix} \right\}$, для которого выполнено: $\rho(X, Y^*) = \rho(X, Y)$, $Y^* \in \Xi_1^2$ (рис. 15). Применяя теорему 2, где полагаем $Y = Y^*$, получаем требуемое.

Если отрезок $Y(i)Y(j)$ синий, то, повторяя выкладки п. 2 доказательства теоремы 1, получим семейство $Y' = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ Y(i) & B' & Y(k) & Y(l) \end{matrix} \right\}$, для которого выполнено $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$ (рис. 16).

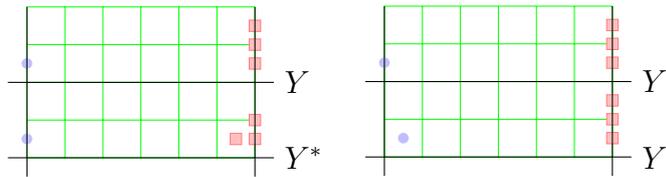


Рис. 15

Рис. 16

2. В этом случае цветные отрезки семейства образуют замкнутую четырехзвенную ломаную. При этом красные отрезки составляют незамкнутую трехзвенную ломаную. На последней выберем начальную и конечную точки и обозначим вершины ломаной в порядке от начальной к конечной: $Y(i), Y(j), Y(k), Y(l)$ (рис. 17).

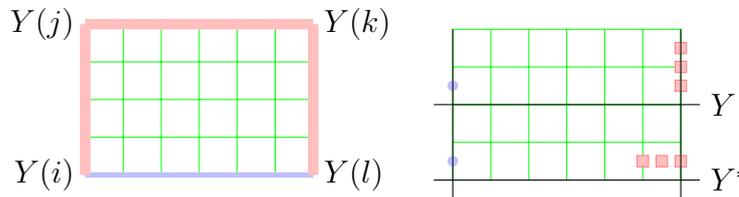


Рис. 17

Рис. 18

Классифицируем взаимное расположение точек семейства Y следующим образом:

- 2.1. Точка $Y(j)$ расположена вне прямой $Y(i)Y(k)$ или точка $Y(k)$ расположена вне прямой $Y(j)Y(l)$.
- 2.2. Точка $Y(j)$ расположена на прямой $Y(i)Y(k)$ и точка $Y(k)$ расположена на прямой $Y(j)Y(l)$. В этом случае все точки семейства Y расположены на одной прямой.

Рассмотрим указанные случаи.

- 2.1. Пусть точка $Y(j)$ ($Y(k)$) расположена вне прямой $Y(i)Y(k)$ ($Y(j)Y(l)$). Применяя лемму 4, где полагаем $A = Y(i)$, $B = Y(k)$, $C = Y(j)$ ($A = Y(j)$, $B = Y(l)$, $C = Y(k)$), получим семейство $Y^* = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ Y(i) & C' & Y(k) & Y(l) \end{matrix} \right\}$ ($Y^* = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ Y(i) & Y(j) & C' & Y(l) \end{matrix} \right\}$), для которого выполнено $\rho(X, Y^*) = \rho(X, Y)$, $Y^* \in \Xi_1^2$ (см. рис. 18). Применяя теорему 2, где полагаем $Y = Y^*$, получаем требуемое.
- 2.2. Пусть вершины ломаной расположены на одной прямой. Тогда объединение всех звеньев четырехзвенной ломаной есть отрезок. Классифицируем взаимное расположение вершин ломаной следующим образом:
- 2.2.1. Хотя бы одна из точек $Y(j)$, $Y(k)$ является концевой точкой указанного отрезка.
- 2.2.2. Ни одна из точек $Y(j)$, $Y(k)$ не является концевой точкой указанного отрезка. Тогда его концевыми точками являются $Y(i)$ и $Y(l)$.

Рассмотрим указанные случаи.

- 2.2.1. Пусть точка $Y(j)$ ($Y(k)$) является концевой точкой отрезка. Применяя лемму 4, где полагаем $A = Y(i)$, $B = Y(k)$, $C = Y(j)$ ($A = Y(j)$, $B = Y(l)$, $C = Y(k)$), получим семейство $Y^* = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ Y(i) & C' & Y(k) & Y(l) \end{matrix} \right\}$ ($Y^* = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ Y(i) & Y(j) & C' & Y(l) \end{matrix} \right\}$), для которого выполнено $\rho(X, Y^*) = \rho(X, Y)$, $Y^* \in \Xi_1^1$ (рис. 18). Применяя теорему 1, где полагаем $Y = Y^*$, получаем требуемое.
- 2.2.2. В этом случае ломаная $Y(i)Y(j)Y(k)Y(l)Y(i)$ имеет вид, показанный на рисунке 19.

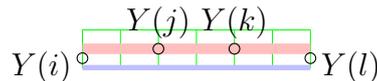


Рис. 19

Применив подходящее ортогональное преобразование, имеем

$$\frac{|Y(i)Y(j)|}{|X(i)X(j)|} = \frac{|Y(j)Y(k)|}{|X(j)X(k)|} = \frac{|Y(k)Y(l)|}{|X(k)X(l)|} = 1.$$

Откуда $|Y(i)Y(j)| = |X(i)X(j)|$, $|Y(j)Y(k)| = |X(j)X(k)|$, $|Y(k)Y(l)| = |X(k)X(l)|$, и в соответствии с видом ломаной (рис. 19)

$$|Y(i)Y(l)| = |X(i)X(j)| + |X(j)X(k)| + |X(k)X(l)|. \tag{6}$$

Поскольку $\frac{|Y(i)Y(l)|}{|X(i)X(l)|} = \min \mathcal{A}(X, Y) < 1$, то $|Y(i)Y(l)| < |X(i)X(l)|$, то есть с учетом (6) $|X(i)X(j)| + |X(j)X(k)| + |X(k)X(l)| < |X(i)X(l)|$, что противоречит обобщенному неравенству треугольника для ломаной $X(i)X(j)X(k)X(k)X(l)X(i)$ (вершины которой не лежат на одной прямой)

$$|X(i)X(j)| + |X(j)X(k)| + |X(k)X(l)| > |X(i)X(l)|.$$

Полученное противоречие означает, что семейство Y не может иметь вид, показанный на рисунке 19.

Класс Ξ_1^4

Теорема 4. Если $Y \in \Xi_1^4$, то $Y \in \mathcal{K}^1(X)$.

Доказательство. При любом взаимном расположении отрезков семейства Y некоторые три красных отрезка составляют незамкнутую трехзвенную ломаную.

Выберем на указанной трехзвенной ломаной начальную и конечную вершины и в направлении от начальной вершины к конечной обозначим вершины: $Y(i)$, $Y(j)$, $Y(k)$, $Y(l)$ (см. рис. 17). В соответствии с раскраской отрезков семейства Y имеем

$$\frac{|Y(i)Y(j)|}{|X(i)X(j)|} = \frac{|Y(j)Y(k)|}{|X(j)X(k)|} = \frac{|Y(k)Y(l)|}{|X(k)X(l)|}. \quad (7)$$

Применив подходящее ортогональное преобразование, можно полагать общее значение величин (7) равным единице. Отсюда имеем

$$|Y(i)Y(j)| = |X(i)X(j)|, \quad |Y(j)Y(k)| = |X(j)X(k)|, \quad |Y(k)Y(l)| = |X(k)X(l)|,$$

что означает $Y \in \mathcal{K}_{ijkl}^1(X)$. То есть $Y \in \mathcal{K}^1(X)$.

Класс Ξ_1^5

Теорема 5. Если $Y \in \Xi_1^5$, то $Y \in \mathcal{K}^1(X)$.

Доказательство. Доказательство дословно совпадает с доказательством теоремы 4.

Класс Ξ_2^1

Теорема 6. Пусть $Y \in \Xi_2^1$. Тогда существует планарное семейство Y' такое, что $\rho(T, Y') < \rho(T, Y)$.

Доказательство. Взаимное расположение отрезков семейства Y классифицируем следующим образом:

1. Некоторый цветной отрезок семейства Y имеет свободную вершину.
2. Ни один из цветных отрезков семейства Y не имеет свободной вершины. В этом случае некоторая точка семейства является общей вершиной ровно двух синих отрезков.

Рассмотрим указанные случаи.

1. Цветной отрезок, имеющий свободную вершину, обозначим $Y(i)Y(j)$, полагая $Y(j)$ свободной вершиной.

Пусть отрезок $Y(i)Y(j)$ красный (синий). Повторяя выкладки п. 1 (п. 2) доказательства теоремы 1, получим семейство $Y' = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ Y(i) & B' & Y(k) & Y(l) \end{matrix} \right\}$, $Y' \in \Xi_2^1$ ($Y^* = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ Y(i) & B' & Y(k) & Y(l) \end{matrix} \right\}$, $Y^* \in \Xi_1^1$), для которого выполнено $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$ (рис. 20) ($\rho(X, Y^*) = \rho(X, Y)$ (рис. 21), после чего, применяя теорему 1, где полагаем $Y = Y^*$, получаем требуемое).

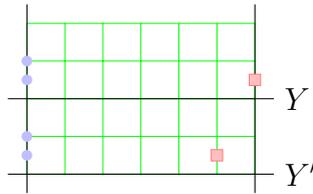


Рис. 20

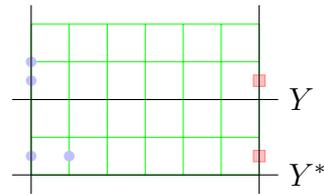


Рис. 21

2. Обозначим: $Y(k)$ — общая вершина ровно двух синих отрезков; $Y(i)$, $Y(j)$ — оставшиеся концы синих отрезков; $Y(l)$ — оставшаяся точка семейства. Применяя лемму 4, где полагаем $A = Y(i)$, $B = Y(j)$, $C = Y(k)$, для семейства $Y' = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ Y(i) & Y(j) & C' & Y(l) \end{matrix} \right\}$ имеем: $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$ (рис. 23).

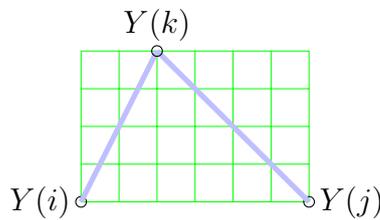


Рис. 22

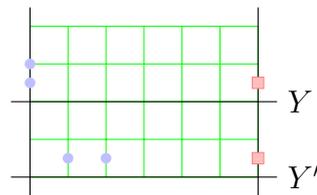


Рис. 23

Класс Ξ_2^2

Теорема 7. Пусть $Y \in \Xi_2^2$. Тогда существует планарное семейство Y' такое, что $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$.

Доказательство. Взаимное расположение отрезков семейства классифицируем следующим образом:

1. Некоторый цветной отрезок семейства Y имеет свободную вершину.
2. Ни один из цветных отрезков семейства не имеет свободной вершины. В этом случае цветные отрезки образуют замкнутую четырехзвенную ломаную. При этом:
 - 2.1. синие отрезки имеют общую вершину;
 - 2.2. синие отрезки не имеют общей вершины.

Рассмотрим указанные случаи.

1. Цветной отрезок, имеющий свободную вершину, обозначим $Y(i)Y(j)$, полагая $Y(j)$ свободной вершиной.

Пусть отрезок $Y(i)Y(j)$ синий (красный). Повторяя выкладки п. 2 (п. 1) доказательства теоремы 1, получим семейство $Y^* = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ Y(i) & B' & Y(k) & Y(l) \end{matrix} \right\}$, для которого выполнено: $\rho(X, Y^*) = \rho(X, Y)$, $Y^* \in \Xi_1^2$, рис. 24 ($Y^* \in \Xi_2^1$, рис. 25). Применяя теорему 2 (теорему 6), где полагаем $Y = Y^*$, получаем требуемое.

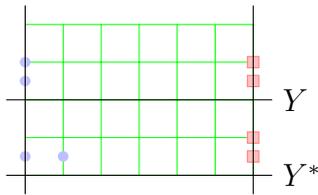


Рис. 24

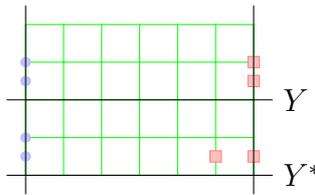


Рис. 25

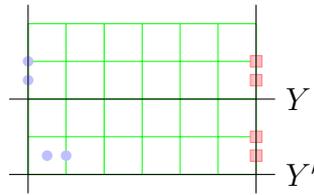


Рис. 26

2. В случае замкнутой ломаной рассмотрим обозначенные выше случаи взаимного расположения окрашенных звеньев.

- 2.1. Повторяя выкладки п. 2 доказательства теоремы 6, получим семейство $Y' = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ Y(i) & Y(j) & C' & Y(l) \end{matrix} \right\}$, $Y' \in \Xi_1^2$, для которого выполнено $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$ (рис. 26).

- 2.2. В этом случае каждая точка семейства является общей вершиной ровно одного красного и ровно одного синего отрезков. Обозначим: $Y(i), Y(j)$ — несмежные вершины ломаной; $Y(k), Y(l)$ — оставшиеся точки семейства (также являющиеся несмежными вершинами ломаной) (рис. 27).

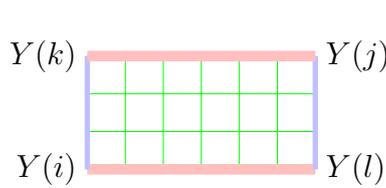


Рис. 27

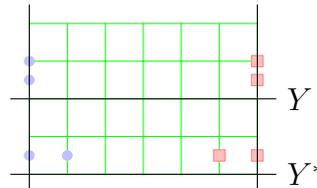


Рис. 28

- 2.2.1. Пусть хотя бы одна из точек $Y(k), Y(l)$ расположена либо вне прямой $Y(i)Y(j)$, либо внутри отрезка $Y(i)Y(j)$. Применяя лемму 5, где полагаем $A = Y(i), B = Y(j), C = Y(k), (C = Y(l))$ для семейства $Y^* = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ Y(i) & Y(j) & C' & Y(l) \end{matrix} \right\}$ ($Y^* = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ Y(i) & Y(j) & Y(k) & C' \end{matrix} \right\}$), имеем: $\rho(X, Y^*) = \rho(X, Y)$, $Y^* \in \Xi_1^1$ (рис. 28). Применяя теорему 1, где полагаем $Y = Y^*$, получаем требуемое.

- 2.2.2. Пусть теперь обе точки $Y(k)$ и $Y(l)$ расположены на прямой $Y(i)Y(j)$ и при этом вне отрезка $Y(i)Y(j)$.

- 2.2.2.1 Если точки $Y(k)$ и $Y(l)$ расположены по одну сторону отрезка $Y(i)Y(j)$ (рис. 29, 30 (с точностью до центральной симметрии

относительно точки $Y(i)$), то, применяя лемму 6, где полагаем: $A = Y(l)$, $B = Y(k)$, $C = Y(i)$ — в случае, если семейство Y имеет вид, показанный на рисунке 29, либо $A = Y(i)$, $B = Y(j)$, $C = Y(l)$ — в случае, если семейство Y имеет вид, показанный на рисунке 30, для семейства $Y^* = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ C' & Y(j) & Y(k) & Y(l) \end{matrix} \right\}$, соответственно — для семейства $Y^* = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ Y(i) & Y(j) & Y(k) & C' \end{matrix} \right\}$, имеем: $\rho(X, Y^*) = \rho(X, Y)$, $Y^* \in \Xi_1^1$ (рис. 28). Применяя теорему 1, где полагаем $Y = Y^*$, получаем требуемое.

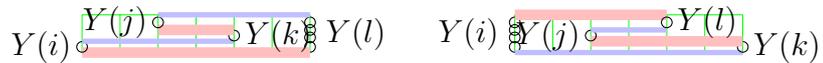


Рис. 29



Рис. 30

2.2.2.2 Если точки $Y(k)$ и $Y(l)$ расположены по разные стороны отрезка $Y(i)Y(j)$ (рис. 31, 32 (с точностью до центральной симметрии относительно точки $Y(i)$)), то, применяя лемму 5, где полагаем $A = Y(l)$, $B = Y(k)$, $C = Y(j)$, для семейства $Y^* = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ Y(i) & C' & Y(k) & Y(l) \end{matrix} \right\}$ имеем: $\rho(X, Y^*) = \rho(X, Y)$, $Y^* \in \Xi_1^1$ (рис. 28). Применяя теорему 1, где полагаем $Y = Y^*$, получаем требуемое.

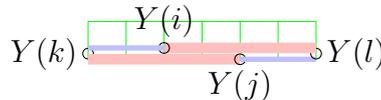


Рис. 31

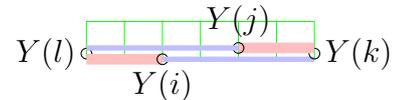


Рис. 32

Класс Ξ_2^3

Теорема 8. Пусть $Y \in \Xi_2^3$ и при этом $Y \notin \mathcal{K}^1(X)$ и $Y \notin \mathcal{K}^2(X)$. Тогда существует планарное семейство Y' такое, что $\rho(X, Y) < \rho(X, Y')$.

Доказательство. Взаимное расположение отрезков семейства Y классифицируем следующим образом:

1. Красные отрезки образуют треугольник.
2. Красные отрезки не образуют треугольник, при этом:
 - 1) Некоторая точка семейства является общей вершиной всех трех красных отрезков.
 - 2) Никакая точка семейства не является общей вершиной трех красных отрезков.

Рассмотрим указанные случаи:

1. В этом случае синие отрезки заведомо имеют общую вершину (рис. 33). Повторяя выкладки п. 2 доказательства теоремы 6, получим семейство $Y' \in \Xi_1^3$, для которого $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$ (рис. 34).

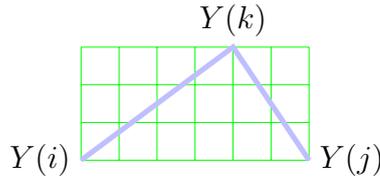


Рис. 33

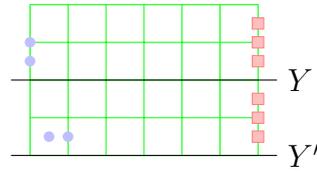


Рис. 34

2. 2.1. Обозначим: $Y(i)$ — общая вершина трех красных отрезков; $Y(j)$, $Y(k)$, $Y(l)$ — оставшиеся вершины красных отрезков, каждая из них является также вершиной синего отрезка (рис. 35).

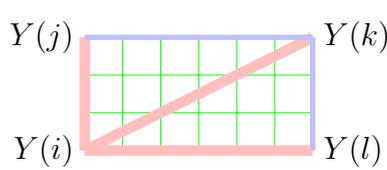


Рис. 35



Рис. 36

- 2.1.1 Пусть хотя бы одна из точек $Y(j)$, $Y(l)$ расположена вне прямой $Y(i)Y(k)$. Применяя лемму 5, где полагаем $A = Y(i)$, $B = Y(k)$, $C = Y(j)$ ($C = Y(l)$), для семейства $Y^* = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ Y(i) & C' & Y(k) & Y(l) \end{matrix} \right\}$ ($Y^* = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ Y(i) & Y(j) & Y(k) & C' \end{matrix} \right\}$) имеем $\rho(X, Y^*) = \rho(X, Y)$, $Y^* \in \Xi_1^2$ (рис. 36). Применяя теорему 2, где полагаем $Y = Y^*$, получаем требуемое.
- 2.1.2 Пусть обе точки $Y(j)$ и $Y(l)$ принадлежат прямой $Y(i)Y(k)$. Тогда семейство Y является коллинеарным. В соответствии с раскраской отрезков семейства Y имеем:

$$\frac{|Y(i)Y(j)|}{|X(i)X(j)|} = \frac{|Y(i)Y(k)|}{|X(i)X(k)|} = \frac{|Y(i)Y(l)|}{|X(i)X(l)|}. \quad (8)$$

Полагая общее значение величин (8) равным единице, имеем $|Y(i)Y(j)| = |X(i)X(j)|$, $|Y(i)Y(k)| = |X(i)X(k)|$, $|Y(i)Y(l)| = |X(i)X(l)|$, что означает $Y \in \mathcal{K}_{ijkl}^2(X)$. То есть $Y \in \mathcal{K}^2(X)$, что исключено условием теоремы.

2.2. Имеем: красные отрезки не образуют треугольник и никакая точка семейства не является общей вершиной трех красных отрезков. В этом случае красные отрезки семейства Y образуют незамкнутую трехзвенную ломаную. Повторяя выкладки доказательства теоремы 4, выделенные, как элемент нумерованного списка, получим $Y \in \mathcal{K}^1(X)$, что исключено условием теоремы.

Класс Ξ_2^4

Теорема 9. Если $Y \in \Xi_2^4$, то $Y \in \mathcal{K}^1(X)$.

Доказательство. Доказательство дословно совпадает с доказательством теоремы 4.

Класс Ξ_3^1

Теорема 10. Пусть $Y \in \Xi_3^1$. Тогда существует планарное семейство Y' такое, что $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$.

Доказательство. Взаимное расположение отрезков семейства Y классифицируем следующим образом:

1. Некоторый цветной отрезок семейства имеет свободную вершину.
2. Ни один из цветных отрезков семейства не имеет свободной вершины.

Рассмотрим указанные случаи.

1. Цветной отрезок, имеющий свободную вершину, обозначим $Y(i)Y(j)$, полагая $Y(j)$ свободной вершиной.

Пусть отрезок $Y(i)Y(j)$ красный. Повторяя выкладки п. 1 доказательства теоремы 1, получим семейство $Y' = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ Y(i) & B' & Y(k) & Y(l) \end{matrix} \right\}$, для которого выполнено: $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$ (рис. 37).

Пусть отрезок $Y(i)Y(j)$ синий. Повторяя выкладки п. 2 доказательства теоремы 1, получим семейство $Y^* = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ Y(i) & B' & Y(k) & Y(l) \end{matrix} \right\}$, для которого выполнено: $\rho(X, Y^*) = \rho(X, Y)$, $Y^* \in \Xi_2^1$ (рис. 38). Применяя теорему 6, где полагаем $Y = Y^*$, получаем требуемое.

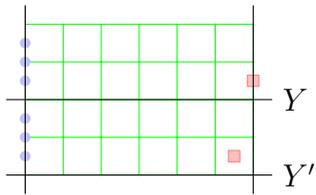


Рис. 37

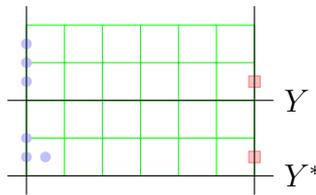


Рис. 38

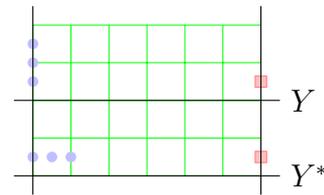


Рис. 39

2. В этом случае некоторая точка семейства является общей вершиной ровно двух синих отрезков. Повторяя выкладки п. 2 доказательства теоремы 6, получим семейство $Y^* = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ Y(i) & Y(j) & C' & Y(l) \end{matrix} \right\}$, для которого выполнено $\rho(X, Y^*) = \rho(X, Y)$, $Y^* \in \Xi_1^1$ (рис. 39). Применяя теорему 1, где полагаем $Y = Y^*$, получаем требуемое.

Класс Ξ_3^2

Теорема 11. Пусть $Y \in \Xi_3^2(X)$ и при этом $Y \notin \mathcal{K}^1(X)$ и $Y \notin \mathcal{K}^2(X)$. Тогда существует планарное семейство Y' такое, что $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$.

Доказательство. Взаимное расположение отрезков семейства Y классифицируем следующим образом:

1. Некоторая точка семейства является общей вершиной ровно двух синих отрезков.

2. Никакая точка семейства Y не является общей вершиной ровно двух синих отрезков. При этом:
- 2.1. некоторая точка семейства является общей вершиной трех синих отрезков;
 - 2.2. никакая точка семейства не является общей вершиной трех синих отрезков.

Рассмотрим указанные случаи.

1. Повторяя выкладки п. 2 доказательства теоремы 6, получим семейство $Y^* = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ Y(i) & Y(j) & C' & Y(l) \end{matrix} \right\}$, для которого выполнено $\rho(X, Y^*) = \rho(X, Y)$, $Y^* \in \Xi_1^2$ (рис. 40). Применяя теорему 2, где полагаем $Y = Y^*$, получаем требуемое.

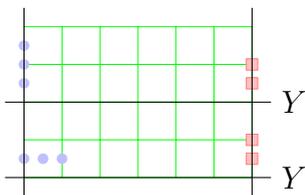


Рис. 40

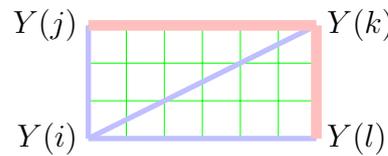


Рис. 41

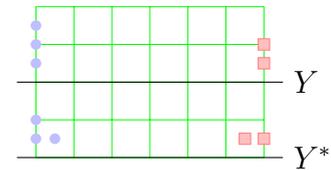


Рис. 42

2. Никакая точка семейства Y не является общей вершиной ровно двух синих отрезков.
- 2.1. Обозначим: $Y(i)$ — общая вершина трех синих отрезков; $Y(j)$, $Y(k)$, $Y(l)$ — оставшиеся вершины синих отрезков (рис. 41).
- 2.1.1. Пусть хотя бы одна из точек $Y(j)$, $Y(l)$ расположена вне прямой $Y(i)Y(k)$. Пусть таковой является точка $Y(j)$ ($Y(l)$). Тогда, применяя лемму 5, где полагаем $A = Y(i)$, $B = Y(k)$, $C = Y(j)$ ($C = Y(l)$), для семейства $Y^* = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ Y(i) & C' & Y(k) & Y(l) \end{matrix} \right\}$ ($Y^* = \left\{ \begin{matrix} i & j & k & l \\ Y(i) & Y(j) & Y(k) & C' \end{matrix} \right\}$) имеем: $\rho(X, Y^*) = \rho(X, Y)$, $Y^* \in \Xi_2^1$ (рис. 42). Применяя теорему 6, где полагаем $Y = Y^*$, получаем требуемое.
- 2.1.2. Пусть обе точки $Y(j)$ и $Y(l)$ принадлежат прямой $Y(i)Y(k)$. Повторяя выкладки п. 2.1.2 доказательства теоремы 8, получим $Y \in \mathcal{K}^2(X)$, что исключено условием теоремы.
- 2.2. В этом случае синие отрезки составляют незамкнутую трехзвенную ломаную. Повторяя выкладки доказательства теоремы 4, оформленные как элемент нумерованного списка, получаем $Y \in \mathcal{K}^1(X)$, что исключено условием теоремы.

Класс Ξ_3^3

Теорема 12. Если $Y \in \Xi_3^3$, то $Y \in \mathcal{K}^1(X)$ или $Y \in \mathcal{K}^3(X)$.

Доказательство. Взаимное расположение отрезков семейства Y классифицируем следующим образом:

1. Одна из троек одноцветных отрезков семейства образует треугольник.
2. Ни одна из троек одноцветных отрезков семейства не образует треугольник. В этом случае каждая из троек одноцветных отрезков семейства образует незамкнутую трехзвенную ломаную.

Рассмотрим указанные случаи.

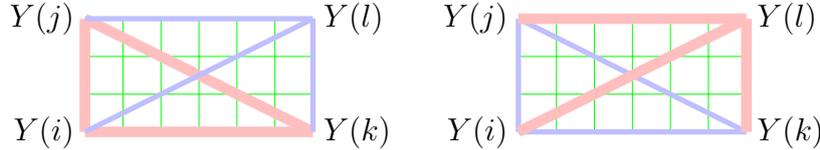


Рис. 43

Рис. 44

1. Обозначим: $Y(i)$, $Y(j)$, $Y(k)$ — вершины треугольника, образованного тройкой одноцветных отрезков семейства; $Y(l)$ — оставшаяся точка семейства (рис. 43, 44). В соответствии с раскраской отрезков семейства Y имеем:

$$\frac{|Y(i)Y(j)|}{|X(i)X(j)|} = \frac{|Y(j)Y(k)|}{|X(j)X(k)|} = \frac{|Y(k)Y(i)|}{|X(k)X(i)|} \tag{9}$$

и

$$\frac{|Y(l)Y(i)|}{|X(l)X(i)|} = \frac{|Y(l)Y(j)|}{|X(l)X(j)|} = \frac{|Y(l)Y(k)|}{|X(l)X(k)|} \tag{10}$$

Полагая общее значение величин (9) равным единице, имеем:

$$|Y(i)Y(j)| = |X(i)X(j)|, \quad |Y(j)Y(k)| = |X(j)X(k)|, \quad |Y(k)Y(i)| = |X(k)X(i)|.$$

То есть треугольник $Y(i)Y(j)Y(k)$ изометричен треугольнику $X(i)X(j)X(k)$, и, не ограничивая общности, можно полагать

$$Y(i) = X(i), \quad Y(j) = X(j), \quad Y(k) = X(k) \tag{11}$$

Далее из (10) выводим:

$$\frac{|Y(l)Y(i)|}{|Y(l)Y(j)|} = \frac{|X(l)X(i)|}{|X(l)X(j)|}, \quad \frac{|Y(l)Y(j)|}{|Y(l)Y(k)|} = \frac{|X(l)X(j)|}{|X(l)X(k)|}, \quad \frac{|Y(l)Y(i)|}{|Y(l)Y(k)|} = \frac{|X(l)X(i)|}{|X(l)X(k)|}.$$

То есть

$$Y(l) \in S_{Y(i)Y(j)}\left(\frac{|X(l)X(i)|}{|X(l)X(j)|}\right), \quad Y(l) \in S_{Y(j)Y(k)}\left(\frac{|X(l)X(j)|}{|X(l)X(k)|}\right), \quad Y(l) \in S_{Y(i)Y(k)}\left(\frac{|X(l)X(i)|}{|X(l)X(k)|}\right) \tag{12}$$

Из (11) и (12) имеем $Y \in \mathcal{K}_{ijkl}^3(X)$, то есть $Y \in \mathcal{K}^3(X)$.

2. Выберем одну из трехзвенных ломаных (рис. 45).

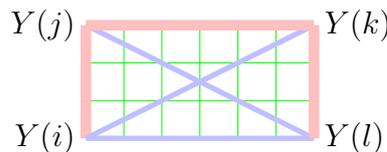


Рис. 45

Повторяя выкладки доказательства теоремы 4, оформленные как элемент нумерованного списка, получаем $Y \in \mathcal{K}^1(X)$, что исключено условием теоремы.

Класс Ξ_4^1

Теорема 13. Если $Y \in \Xi_4^1$, то $Y \in \mathcal{K}^1(X)$.

Доказательство. При любом взаимном расположении отрезков семейства Y некоторые три синих отрезка составляют незамкнутую трехзвенную ломаную. Повторяя выкладки доказательства теоремы 4, оформленные как элемент нумерованного списка, получаем $Y \in \mathcal{K}^1(X)$.

Класс Ξ_4^2

Теорема 14. Если $Y \in \Xi_4^2$, то $Y \in \mathcal{K}^1(X)$.

Доказательство. Доказательство дословно совпадает с доказательством теоремы 13.

Класс Ξ_5^1

Теорема 15. Если $Y \in \Xi_5^1$, то $Y \in \mathcal{K}^1(X)$.

Доказательство. Доказательство дословно совпадает с доказательством теоремы 13.

3. Пример

В рамках примера обозначим множество вырожденных тетраэдров (планарных семейств) как \mathcal{P} . Из теорем 1–15 следует: вычисление величины $\rho(X, \mathcal{P})$ сводится к вычислению расстояний от семейства X до семейств классов $\mathcal{K}^1, \mathcal{K}^2, \mathcal{K}^3$. Вычислим значение $\rho(X, \mathcal{P})$ для правильного (четырёхвершинного) тетраэдра X . Не ограничивая общности, можно полагать, что ребра тетраэдра X единичной длины. Поэтому соотношения вида $\frac{|Y(i)Y(j)|}{|X(i)X(j)|} = \alpha$ принимают вид $|Y(i)Y(j)| = \alpha$, а выражение для $\rho(X, Y)$ принимает вид

$$\rho(X, Y) = \log \frac{\max\{|Y(i)Y(j)|, 1 \leq i < j \leq 4\}}{\min\{|Y(i)Y(j)|, 1 \leq i < j \leq 4\}}.$$

Опять же поскольку в тетраэдре X все ребра единичной длины, то $\rho(X, Y) = \rho(X, Y \circ \sigma)$ для любой перестановки σ . Поэтому достаточно ограничиться вычислением расстояний до семейств классов $\mathcal{K}_{ijkl}^1, \mathcal{K}_{ijkl}^2, \mathcal{K}_{ijkl}^3$ для какого-то фиксированного набора индексов $ijkl$ (мы не будем конкретизировать значения индексов).

1. Найдем расстояния до семейств класса \mathcal{K}_{ijkl}^1 .

В соответствии с определением класса \mathcal{K}_{ijkl}^1 имеем следующее описание составляющих его семейств:

$$|Y(j)Y(k)| = 1, Y(i) \in S_{Y(j)}(1), Y(l) \in S_{Y(k)}(1)$$

(см. пример на рис. 46).

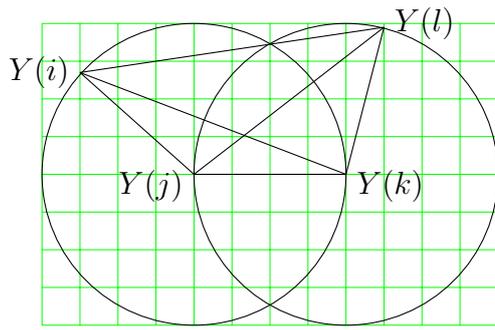


Рис. 46

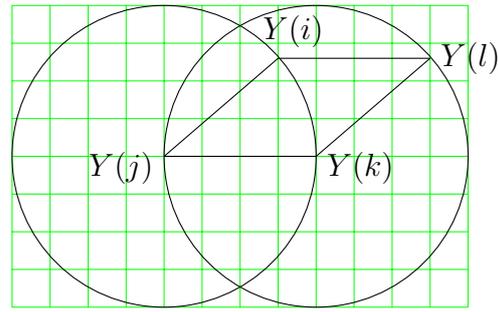


Рис. 47

Требуется рассмотреть пересечения класса \mathcal{K}_{ijkl}^1 с такими множествами Ξ_p^q , которые упомянуты в формулировках теорем, содержащих указание $Y \notin \mathcal{K}^1$ — в посылке теоремы, — или указание $Y \in \mathcal{K}^1$ — в заключении теоремы. Таковыми являются: $\Xi_1^4, \Xi_4^1, \Xi_2^4, \Xi_4^2, \Xi_1^5, \Xi_5^1, \Xi_3^3$.

Разделим класс \mathcal{K}_{ijkl}^1 на подмножества.

1.1. $A = (\mathcal{K}_{ijkl}^1 \cap \Xi_1^5) \cup (\mathcal{K}_{ijkl}^1 \cap \Xi_5^1)$ — семейства, содержащие пять отрезков единичной длины:

$$\begin{aligned} |Y(i)Y(j)| &= |Y(j)Y(k)| = |Y(k)Y(l)| = |Y(l)Y(i)| \\ &= |Y(i)Y(j)| = |Y(j)Y(l)| = 1 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} |Y(i)Y(j)| &= |Y(j)Y(k)| = |Y(k)Y(l)| = |Y(l)Y(i)| \\ &= |Y(i)Y(j)| = |Y(k)Y(i)| = 1 \end{aligned}$$

1.2. B — семейства, содержащие хотя бы четыре отрезка одинаковой длины. При этом:

- 1.2.1. эти отрезки составляют замкнутую четырехзвенную ломаную;
- 1.2.2. некоторые три из этих отрезков составляют треугольник.

Множество B может содержать семейства следующих классов: $\Xi_1^4, \Xi_4^1, \Xi_1^5, \Xi_5^1, \Xi_2^4, \Xi_4^2, \Xi_1^1$. Для единообразия выкладок мы не исключаем семейства $Y \in \Xi_1^1$ из рассмотрения и рассматриваем их по общей приводимой ниже схеме (как будет видно из дальнейшего, это не повлияет на результат).

1.3. C — семейства, в которых тройка отрезков $Y(i)Y(j), Y(j)Y(k), Y(k)Y(l)$ единичной длины составляет незамкнутую трехзвенную ломаную и тройка отрезков $Y(k)Y(i), Y(i)Y(l), Y(l)Y(j)$ одинаковой (не единичной) длины составляет незамкнутую трехзвенную ломаную. Множество C содержит только семейства класса Ξ_3^3 .

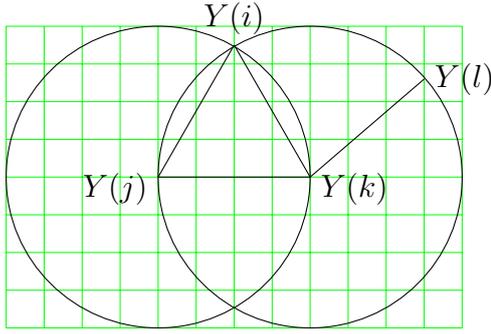


Рис. 48

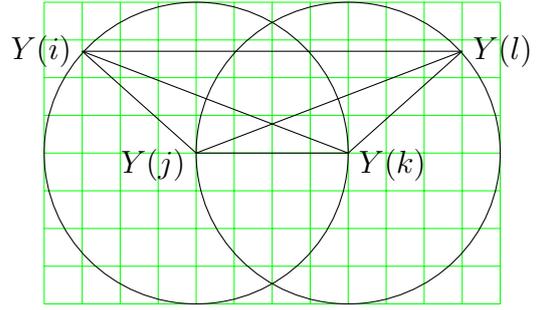


Рис. 49

Рассмотрим указанные случаи:

- 1.1. Исключая из рассмотрения семейства с совпадающими значениями, имеем: значения семейства $Y \in A$ являются вершинами ромба с единичной стороной, составленного из двух правильных треугольников; длина меньшей диагонали ромба равна 1, длина большей — $\sqrt{3}$. Отсюда $M/m = \sqrt{3}/1 = \sqrt{3}$.
- 1.2. Введем следующие обозначения: возрастание (убывание) некоторой величины будем обозначать символом \nearrow (\searrow), возрастание (убывание) некоторой величины от a до b будем обозначать как $a \nearrow b$ ($a \searrow b$).

- 1.2.1. Имеем: значения семейства Y являются вершинами ромба с единичной стороной (рис. 47, диагонали ромба не показаны). Обозначим $\varphi = \widehat{Y(i)Y(j)Y(k)}$, отсчитываемый от $Y(j)Y(k)$ по часовой стрелке. Для φ , убывающего от $\pi/2$ до 0, имеем:

φ	$\pi/2$	$\pi/2 \searrow \pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3 \searrow 0$	0
$ Y(i)Y(k) $	$\sqrt{2}$	\searrow	1	\searrow	0
$ Y(j)Y(l) $	$\sqrt{2}$	\nearrow	$\sqrt{3}$	\nearrow	2
M/m	$\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$		∞

При дальнейшем убывании φ от 0 до $-\pi/2$ величины $|Y(i)Y(k)|$, $|Y(j)Y(l)|$ изменяются в порядке, обратном приведенному в таблице. При возрастании φ от $\pi/2$ до $3\pi/2$ изменение величин $|Y(i)Y(k)|$, $|Y(j)Y(l)|$ аналогично рассмотренному (с переменной ролями диагоналей ромба). Имеем: минимум величины M/m достигается при $\varphi = \pi/2$ (квадрат) и равен $\sqrt{2}$.

- 1.2.2. Пусть треугольник составлен из отрезков $Y(i)Y(j)$, $Y(j)Y(k)$, $Y(k)Y(i)$ (рис. 48, отрезки $Y(i)Y(l)$, $Y(j)Y(l)$ не показаны). Обозначим $\varphi = \widehat{Y(j)Y(k)Y(l)}$, отсчитываемый от $Y(k)Y(j)$ по часовой стрелке. Для φ , возрастающего от 0 до 2π , имеем:

φ	$ Y(j)Y(l) $	$ Y(i)Y(l) $	M/m
0	0	1	∞
$0 \nearrow \pi/6$	\nearrow	\searrow	
$\pi/6$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/6$	$2\sqrt{3}$
$\pi/6 \nearrow \pi/3$	\nearrow	\searrow	
$\pi/3$	1	0	∞
$\pi/3 \nearrow 2\pi/3$	\nearrow	\nearrow	

φ	$ Y(j)Y(l) $	$ Y(i)Y(l) $	M/m
$2\pi/3$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
$2\pi/3 \nearrow \pi$	\nearrow	\nearrow	
π	2	$\sqrt{3}$	2
$\pi \nearrow 7\pi/6$	\searrow	\nearrow	
$7\pi/6$	$\sqrt{2 + \sqrt{3}}$	$\sqrt{2 + \sqrt{3}}$	$\sqrt{2 + \sqrt{3}}$
$7\pi/6 \nearrow 4\pi/3$	\searrow	\nearrow	
$4\pi/3$	$\sqrt{3}$	2	2
$4\pi/3 \nearrow 5\pi/3$	\searrow	\searrow	
$5\pi/3$	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$5\pi/3 \nearrow 2\pi$	\searrow	\searrow	
2π	0	1	∞

Имеем: минимальное значение M/m равно $\sqrt{3}$ и достигается при $\varphi = 2\pi/3$ и $\varphi = 5\pi/3$.

Случай, когда треугольник составлен из отрезков $Y(j)Y(k)$, $Y(k)Y(l)$, $Y(l)Y(j)$ рассматривается аналогично с тем же результатом.

1.3. Из условий, наложенных на звенья ломаных, следует, что значения семейства Y являются вершинами равнобокой трапеции (рис. 49). Обозначим $\varphi = \widehat{Y(i)Y(j)Y(k)}$, отсчитываемый от $Y(j)Y(k)$ против часовой стрелки. Очевидно, достаточно рассмотреть значения $\varphi \in [0, \pi]$. Из элементарных геометрических соображений выводим: $|Y(i)Y(k)|^2 = 2 - 2 \cos \varphi$ (т. косинусов), $|Y(i)Y(l)| = \begin{cases} 1 - 2 \cos \varphi, & \pi/3 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 2 \cos \varphi - 1, & 0 \leq \varphi \leq \pi/3 \end{cases}$. Приравнявая $|Y(i)Y(k)|^2$ и $|Y(i)Y(l)|^2$, получим уравнение

$$2 - 2 \cos \varphi = (1 - 2 \cos \varphi)^2,$$

которое имеет решения: $\cos \varphi = (1 - \sqrt{5})/4$ ($\varphi = 108^\circ$) и $\cos \varphi = (1 + \sqrt{5})/4$ ($\varphi = 36^\circ$).

Для $\varphi = 108^\circ$ имеем: $|Y(i)Y(l)| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{M}{m} = \frac{1+\sqrt{5}}{1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Для $\varphi = 36^\circ$ имеем: $|Y(i)Y(l)| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\frac{M}{m} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Итого: минимальное из значений M/m для рассмотренных семейств Y равно $\min\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}\} = \sqrt{2}$.

2. Найдем расстояния до семейств класса \mathcal{K}_{ijkl}^2 . Из определения названного класса с учетом того, что все ребра тетраэдра X единичные, выводим: в любом семействе $Y \in \mathcal{K}_{ijkl}^2$ совпадают по крайней мере два значения. Следовательно, $M/m = \infty$.
3. Найдем расстояния до семейств класса \mathcal{K}_{ijkl}^3 . Окружности равных отношений, указанные в определении класса, являются серединными перпендикулярами к сторонам правильного треугольника. Они пересекаются в точке, делящей высоту треугольника в отношении 1 : 2. Отсюда

$$\frac{M}{m} = \frac{\max\{1, \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3}\}}{\min\{1, \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3}\}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}.$$

Окончательно имеем: $\rho(X, \mathcal{P}) = \log \sqrt{2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альфорс, Л. Лекции о квазиконформных отображениях / Л. Альфорс. — М. : Мир, 1969. — 154 с.
2. Болучевская, А. В. Сохранение ориентации симплекса при квазиизометричном отображении / А. В. Болучевская // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, № 1 (2). — С. 20–23.
3. Гилева, Л. В. Обоснование асимптотической устойчивости алгоритма триангуляции трехмерной области / Л. В. Гилева, В. В. Шайдунов // Сиб. журн. вычисл. матем. — 2000. — Т. 3, № 2. — С. 123–136.
4. Игумнов, А. Ю. Метризация пространства семейств точек в \mathbb{R}^n и смежные вопросы / А. Ю. Игумнов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2016. — Т. 37, № 6. — С. 40–54.
5. Игумнов, А. Ю. О сохранении ориентации треугольника при квазиизометрическом отображении / А. Ю. Игумнов // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2018. — Т. 21, № 2. — С. 5–12.
6. Клячин, В. А. О гомеоморфизмах, сохраняющих триангуляцию / В. А. Клячин // Записки семинара «Сверхмедленные процессы». — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2009. — Вып. 4. — С. 169–182.
7. Клячин, В. А. О линейных прообразах непрерывных отображений, сохраняющих ориентацию симплексов / В. А. Клячин, Н. А. Чебаненко // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2014. — Т. 22, № 3. — С. 56–60.
8. Лебедев, А. С. Построение неструктурированных треугольных сеток с почти правильными ячейками / А. С. Лебедев // Вычислительные технологии. — 2010. — Т. 15, № 1. — С. 85–97.
9. Миклюков, В. М. Введение в негладкий анализ / В. М. Миклюков. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2008. — 424 с.
10. Суков, С. А. Методы генерации тетраэдральных сеток и их программные реализации / С. А. Суков. — М. : Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2015. — 23 с.

REFERENCES

1. Alfors L. *Lektsii o kvazikonformnykh otobrazheniyakh* [Lectures on Quasiconformal Mappings]. Moscow, Mir Publ., 1969. 154 p.
2. Boluchevskaya A.V. Sokhranenie orientatsii simpleksa pri kvaziizometrichnom otobrazhenii [Preserving of Orientation of a Simplex by Quasi-Isometric Mapping]. *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika* [Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.], 2013, vol. 13, no. 1 (2), pp. 20-23.
3. Gileva L.V., Shaydurov V.V. Obosnovanie asimptoticheskoy ustoychivosti algoritma triangulyatsii trekhmernoy oblasti [Justification of Asymptotic Stability of an Algorithm of a Triangulation of Three-Dimensional Area]. *Sib. zhurn. vychisl. matem.*, 2000, vol. 3, no. 2, pp. 123-136.
4. Igumnov A.Yu. Metrizatsiya prostranstva semeystv tochek v \mathbb{R}^n i smezhnye voprosy [Metriization in Space Families of Points in \mathbb{R}^n and Adjoining Questions]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [The Scien Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2016, vol. 37, no. 6, pp. 40-54.
5. Igumnov A.Yu. O sokhranении orientatsii treugolnika pri kvaziizometricheskom otobrazhenii [On Preserving the Orientation of Triangle under Quasi-Isometric Mappings]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2018, vol. 21, no. 2, pp. 5-12.
6. Klyachin V.A. O gomeomorfizmakh, sokhranyayushchikh triangulyatsiyu [On Homomorphisms Preserving Triangulation]. *Zapiski seminara «Sverkhmedlennyye protsessy»* [Notes of Seminar «Infraslow Processes»] Volgograd, Izd-vo VolGU, 2009, iss. 4, pp. 169-182.

7. Klyachin V.A., Chebanenko N.A. O lineynykh proobrazakh nepreryvnykh otobrazheniy, sokhranyayushchikh orientatsiyu simpleksov [About Linear Prototypes of the Continuous Mappings Preserving Orientation of Simplexes]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [The Scien Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2014, vol. 22, no. 3, pp. 56-60.

8. Lebedev A.S. Postroenie nestruturirovannykh treugolnykh setok s pochni pravilnymi yacheykami [Construction of Unstructured Triangular Grids With Almost Correct Cells]. *Vychislitelnye tekhnologii* [Computational Technologies], 2010, vol. 15, no. 1, pp. 85-97.

9. Miklyukov V.M. *Vvedenie v nekladkiy analiz* [Introduction to Non-Smooth Analysis]. Volgograd, Izd-vo VolGU, 2008. 424 p.

10. Sukov S.A. *Metody generatsii tetraedralnykh setok i ikh programmnye realizatsii* [Methods of Generation of Tetrahedral Grids and Their Program Implementations]. Moscow, Preprinty IPM im. M.V. Keldysha Publ., 2015. 23 p.

ABOUT THE DEGREE OF NONDEGENERACY OF A TETRAHEDRON

Alexander Yu. Igumnov

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Lecturer, Department of the Economic Theory, Mathematics and Information Systems,
Volzhsky Institute of Economics, Pedagogy and Law
IAJu1965@mail.ru
Sovetskaya St., 6, 404111 Volzhsky, Russian Federation

Abstract. The work offers of characteristic nondegeneracy of a simplex defined through the ρ -distance between classes of orthogonally equivalent families of points (numbered sets of simplex tops). This characteristic can be used, in particular, for drawing up criteria of grid quality. The work investigates the problem of calculating ρ -distances from the given tetrahedron (a 4-vertex simplex) to a set of degenerate tetrahedrons. It is shown that the task comes down to calculating the ρ -distance from this tetrahedron to families of points (on the plane) of some three classes. For a regular 4-vertex tetrahedron the ρ -distance is calculated explicitly.

Key words: nondegeneracy of a tetrahedron, nondegeneracy of a triangle, triangulation, orientation saving, quality of a grid, generation of a grid, computer simulation, quasiisometric mappings.