DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2020.1.3

УДК 519.65
ББК 22.161.5

Дата поступления статьи: 10.10.2019
Дата принятия статьи: 13.01.2020

ИСКАЖЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ИЗОПЕРИМЕТРИЧНОСТИ ТРЕУГОЛЬНИКА ПРИ КВАЗИКОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ

Диана Васильевна Шуркаева
Старший преподаватель кафедры безопасности и информационных технологий,
Национальный исследовательский университет
«Московский энергетический институт»
Diana-547@yandex.ru, ShurkayevaDV@mpei.ru
ул. Красноказарменная, 14, 111250 г. Москва, Российская Федерация

Аннотация. В настоящей работе приводится оценка искажения коэффициента изопериметричности симлекса при произвольном гомеоморфном отображении через характеристики отображения и исходного симплекса. Как следствие, получена оценка искажения коэффициента изопериметричности треугольника при квазиконформном и конформном отображениях.

Ключевые слова: коэффициент изопериметричности треугольника, симплекс, триангуляция, изопериметрическое неравенство, квазиконформное отображение, гомеоморфизм, квазиизометрическое отображение, определитель Кэли — Менгера.

Введение

При решении задач математического моделирования весьма широкое распространение получили треугольные и тетраэдральные расчетные сетки [5; 7; 14]. При этом возникает необходимость оценки погрешности полученного решения, которая зависит от степени невырожденности треугольников триангуляции. Когда ячейки триангуляции сильно деформированы, то есть сильно отличаются от правильных, точность выполняемых расчетов резко снижается. Поэтому, независимо от применяемого численного метода, основной целью при построении треугольной сетки на плоскости является сокращение в ней количества ячеек с углами, близкими к 0 и 180°. Для оценки качества треугольной ячейки обычно вводят какой-нибудь числовой показатель, характеризующий степень отклонения ячейки от правильного треугольника, например, величина минимального угла треугольника, радиус описанной окружности и другие. В работе [13] обсуждаются и сравниваются между собой способы оценки качества ячейки, встречающиеся в литературе по построению сеток.

Определение 1. *Пусть $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^n$ такой набор точек, что векторы $P_1 - P_0, \dots, P_n - P_0$ линейно независимы. Симплексом Δ с вершинами в этих точках мы назовем выпуклую оболочку множества $\{P_0, \dots, P_n\}$.*

Определение 2. *Коэффициентом изопериметричности n-мерного симплекса Δ [10] будем называть отношение*

$$\sigma(\Delta) = \frac{|\partial\Delta|^{\frac{n}{n-1}}}{|\Delta|},$$

соответственно, для треугольника Δ

$$\sigma(\Delta) = \frac{\Pi^2}{S},$$

где Π — периметр Δ, S — площадь Δ.

Величина $\sigma(\Delta)$ характеризует отклонение произвольного симплекса Δ от правильного, поскольку минимальное значение достигается на правильном симплексе в силу изопериметрического неравенства.

Построение расчетных сеток в областях сложной конфигурации часто осуществляется отображением некоторой стандартной сетки на заданную область различными классами отображений. При этом необходимо контролировать искажение ячеек во избежание появления вырожденных ячеек в расчетной области. В этом направлении получены интересные результаты в работах [1; 3; 4; 9; 11; 12].

Определение 3. *Отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется квазиизометрическим, если существуют постоянные $0 < l \leqslant L$ такие, что для любых двух точек $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ выполнено*

$$l|x_1 - x_2| \leqslant |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|.$$

Определение 4. *Пусть $\{\rho_{ij} : 0 \leqslant i < j \leqslant n\}$ — совокупность $n(n+1)/2$ переменных. Рассмотрим квадратную $(n+2) \times (n+2)$-матрицу (см. [10])*

$$CM_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \rho_{01}^2 & \rho_{02}^2 & \dots & \rho_{0n}^2 \\ 1 & \rho_{01}^2 & 0 & \rho_{12}^2 & \dots & \rho_{1n}^2 \\ 1 & \rho_{02}^2 & \rho_{01}^2 & 0 & \dots & \rho_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \rho_{0n}^2 & \rho_{1n}^2 & \rho_{2n}^2 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Многочлен от многих переменных $\Gamma_n := \det(CM_n)$, $\rho_{ij} : 0 \leqslant i < j \leqslant n$ называется определителем Кэли — Менгера.

Определитель Кэли — Менгера дает формулу для вычисления n-мерного объема V симплекса Δ в терминах евклидовых расстояний $\{\rho_{ij} := |P_i - P_j| : 0 \leqslant i < j \leqslant n\}$ между рассматриваемыми точками:

$$V^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n (n!)^2} \Gamma_n(\rho_{01}, \rho_{02}, \dots, \rho_{(n-1)n}). \tag{1}$$

Поскольку определитель матрицы n-го порядка представляет собой сумму $n!$ слагаемых, записываемых в виде

$$\det A_n = \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} a_{1i_1} a_{2i_2} ... a_{ni_n},$$

которая берется по всем возможным подстановкам вида

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

то справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть A_n — квадратная матрица n-го порядка, содержащая n нулевых элементов так, что никакие два из них не принадлежат одной строке или столбцу, B_n — квадратная матрица n-го порядка, содержащая $n-1$ нулевых элементов, никакие два из которых не принадлежат одной строке или столбцу, функция $g : M_n \to \mathbb{N}$ сопоставляет квадратной матрице M_n количество нулевых коэффициентов в многочлене определителя (1), тогда значения функции $g(A_n)$ при $n \geq 4$ можно вычислить по рекуррентной формуле*

$$g(A_n) = (n-1)! + (n-1)g(B_{n-1}),$$
$$\text{где } g(B_{n-1}) = g(A_{n-2}) + (n-2)g(B_{n-2})$$
$$\text{и } g(A_2) = g(B_2) = 1, g(A_3) = 4.$$

Для многочлена объема симплекса справедливо утверждение.

Следствие 1. *Количество равных нулю коэффициентов в многочлене объема $\det(CM_n)$ составляет $g(CM_n) = g(A_{n+2})$, количество положительных коэффициентов*

$$p_n = \frac{1}{2}\left((n+2)! - g(CM_n) + (n+1)\right),$$

а отрицательных

$$q_n = \frac{1}{2}\left((n+2)! - g(CM_n) - (n+1)\right).$$

Приведем значения $g(A_n)$ и $g(B_n)$ для нескольких значений n.

n	$g(A_n)$	$g(B_n)$
2	1	1
3	4	3
4	15	13
5	76	67
6	455	411

И несколько первых значений p_n и q_n.

n	p_n	q_n
1	2	0
2	6	3
3	24	20
4	135	130
5	930	924
6	7420	7413

При квазиизометрическом отображении симплекса в работе [10] автором получен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы симплекс Δ, максимальное расстояние между вершинами которого равно ρ_{max}, минимальное — ρ_{min}, а площадь наименьшей $(n-1)$-мерной грани равна S, и квазиизометрическое отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ с константами $\frac{L}{l} = k < \sqrt[2n]{1 + \frac{2n\rho_{min}^{2n-2}\rho_{max}^2 - (n-1)\rho_{min}^{2n}}{q_n\rho_{max}^{2n}}}$, тогда для отношения коэффициентов изопериметричности симплекса образа и симплекса прообраза справедливо неравенство*

$$\frac{\sqrt[2(n-1)]{\left(1 - (k^{2(n-1)} - 1)\theta_{n-1}\right)^n}}{k^n\sqrt{1 + (1 - k^{-2n})\,\theta_n}} \leqslant \frac{\sigma'}{\sigma} \leqslant k^n \frac{\sqrt[2(n-1)]{\left(1 + (1 - k^{-2(n-1)})\theta_{n-1}\right)^n}}{\sqrt{1 - (k^{2n} - 1)\,\theta_n}}, \tag{2}$$

где $\theta_{n-1} = \dfrac{q_{n-1}\rho_{max}^{2(n-1)}}{r_{n-1}S^2}, \quad \theta_n = \dfrac{q_n\rho_{max}^{2n}}{r_nV^2}, \quad r_n = 2^n(n!)^2.$

1. Гомеоморфное отображение

Пусть отображение $f : D \to D'$ $(D, D' \subset \mathbb{R}^n)$ гомеоморфно и дифференцируемо почти всюду. Обозначим через λ, Λ – наименьшее и наибольшее собственные числа оператора $(d_{x_0}f)^T(d_{x_0}f)$ соответственно. Для некоторой внутренней точки $x_0 \in \Delta$, в которой отображение f дифференцируемо, обозначим

$$B = B(x_0, f, \Delta) = \max_{k=\overline{0,n}} \frac{|H_k|}{|P_k - x_0|},$$

где

$$H_k = H(x_0, P_k) = f(P_k) - f(x_0) - d_{x_0}f(P_k - x_0).$$

Для пары вершин P_i и P_j симплекса введем обозначение

$$d_{ij} = |P_i - x_0| + |P_j - x_0|, \quad 0 \leqslant i < j \leqslant n.$$

Лемма 2. *Пусть заданы область $D \subset \mathbb{R}^n$ и симплекс $\Delta P_0P_1...P_n \subset D$ с минимальной и максимальной длинами ребра ρ_{min} и ρ_{max} соответственно, гомеоморфное и дифференцируемое почти всюду отображение $f : D \to D'$ $(D' \subset \mathbb{R}^n)$ этой области и некоторая внутренняя точка симплекса $x_0 \in \Delta$, в которой отображение f дифференцируемо. Тогда отношение коэффициентов изопериметричности симплекса образа и симплекса прообраза оценивается по формуле (2) с коэффициентом $k = \left(\sqrt{\Lambda} + B\tau\right) / \left(\sqrt{\lambda} - B\tau\right)$, если $k < \sqrt[2n]{1 + \dfrac{2n\rho_{min}^{2n-2}\rho_{max}^2 - (n-1)\rho_{min}^{2n}}{q_n\rho_{max}^{2n}}}$, где* $\tau = \tau(\Delta, x_0) = \max\limits_{0\leqslant i<j\leqslant n} \dfrac{d_{ij}}{\rho_{ij}}$.

Доказательство. Для вершин симплекса-образа имеем

$$f(P_j) - f(P_i) = P'_j - P'_i = (d_{x_0}f)(P_j - P_i) + H_j - H_i, \ 0 \leqslant i < j \leqslant n.$$

Так как $|d_{x_0}f(\xi)|^2 = \langle d_{x_0}f(\xi), d_{x_0}f(\xi)\rangle = \left\langle (d_{x_0}f)^T(d_{x_0}f)(\xi), \xi\right\rangle$ для некоторого вектора ξ, тогда $\sqrt{\lambda}|\xi| \leqslant |d_{x_0}f(\xi)| \leqslant \sqrt{\Lambda}|\xi|$. Заметим, что все собственные числа симметрического оператора $(d_{x_0}f)^T(d_{x_0}f)$ положительны.

Тогда при всех $0 \leqslant i < j \leqslant n$ длины ребер симплекса

$$\begin{aligned}\rho'_{ij} &= |P'_j - P'_i| = |(d_{x_0}f)(P_j - P_i) + H_j - H_i| \leqslant |(d_{x_0}f)(P_j - P_i)| + |H_j - H_i| \leqslant \\ &\leqslant \sqrt{\Lambda}|P_j - P_i| + B\dot{(}|P_j - x_0| + |P_i - x_0|) = \sqrt{\Lambda}\rho_{ij} + Bd_{ij} = \rho_{ij}\left(\sqrt{\Lambda} + B\frac{d_{ij}}{\rho_{ij}}\right)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\rho'_{ij} &= |P'_j - P'_i| = |(d_{x_0}f)(P_j - P_i) + H_j - H_i| \geqslant |(d_{x_0}f)(P_j - P_i)| - |H_j - H_i| \geqslant \\ &\geqslant \sqrt{\lambda}|P_j - P_i| - B\dot{(}|P_j - x_0| + |P_i - x_0|) = \sqrt{\lambda}\rho_{ij} + Bd_{ij} = \rho_{ij}\left(\sqrt{\lambda} - B\frac{d_{ij}}{\rho_{ij}}\right).\end{aligned}$$

Таким образом получены константы квазиизометрии для гомеоморфизма

$$\rho_{ij}\left(\sqrt{\lambda}-B\frac{d_{ij}}{\rho_{ij}}\right)\leqslant\rho'_{ij}\leqslant\rho_{ij}\left(\sqrt{\Lambda}+B\frac{d_{ij}}{\rho_{ij}}\right),\ 0\leqslant i<j\leqslant n.$$

Выбирая наибольшее из отношений $\dfrac{d_{ij}}{\rho_{ij}}$, получим желаемое.

Для гомеоморфного отображения на плоскости получим следующую оценку.

Следствие 2. *Пусть заданы область $D\subset\mathbb{R}^2$ и треугольник $\Delta\subset D$ с длинами сторон $a\geqslant b\geqslant c$, гомеоморфное и дифференцируемое почти всюду отображение $f:D\to D'$ $(D'\subset\mathbb{R}^2)$ этой области и некоторая внутренняя точка треугольника $x_0\in\Delta$, в которой отображение f дифференцируемо и для коэффициента $k=\left(\sqrt{\Lambda}+B\tau\right)/\left(\sqrt{\lambda}-B\tau\right)$ в этой точке выполняется $k<\sqrt[4]{1+\dfrac{4c^2a^2-c^4}{3a^4}}$, где $\tau=\tau(\Delta,x_0)=\max\limits_{0\leqslant i<j\leqslant n}\dfrac{d_{ij}}{\rho_{ij}}$. Тогда отношение коэффициентов изопериметричности треугольника образа и треугольника прообраза оценивается по формуле*

$$\frac{1}{k^2\sqrt{1+\theta\left(1-k^{-4}\right)}}\leqslant\frac{\sigma'}{\sigma}\leqslant\frac{k^2}{\sqrt{1-\theta(k^4-1)}},\tag{3}$$

где $\theta=\dfrac{3a^4}{16S^2}$.

2. Квазиконформное отображение

Определение 5. *Норма Фробениуса, или евклидова норма [8] матрицы A размера $m\times n$ представляет собой частный случай p-нормы для $p=2$:*

$$\|A\|_F=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2}.$$

Напомним, что дифференцируемое квазиконформное отображение $f(x,y)=u(x,y)+$ $+\,iv(x,y)$ удовлетворяет условию

$$\begin{cases}\alpha u_x+\beta u_y=v_y,\\ \beta u_x+\gamma u_y=-v_x,\\ \alpha\gamma-\beta^2=1,\end{cases}$$

которое является обобщением условия Коши — Римана [6].

В случае квазиконформного отображения имеет место следующий результат.

Теорема 2. *Пусть D, D' — области $\mathbb{C}$, треугольник $\Delta P_0P_1P_2\subset D$ с длинами сторон $a\geqslant b\geqslant c$, а $(\cdot)z_0$ — центр вписанной в него окружности, $f:D\to D'$ — дифференцируемое квазиконформное отображение этих областей. Тогда отношение коэффициентов изопериметричности треугольника образа и треугольника прообраза оценивается по формуле (3) с коэффициентом*

$$k=\frac{\|d_{z_0}f\|_F^2\cdot\sqrt{1+\mu}+\sqrt{2}B\tau}{\|d_{z_0}f\|_F^2\cdot\sqrt{1-\mu}-\sqrt{2}B\tau},\quad \text{если } k<\sqrt[4]{1+\frac{4c^2a^2-c^4}{3a^4}},$$

при

$$\mu = \mu(f) = \sqrt{1 - \frac{4J_f^2(z_0)}{\|d_{z_0}f\|^4}}, \quad \tau = \tau(\Delta) = \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{b}}\left(\frac{\sqrt{c(p-a)}}{a} + \frac{\sqrt{a(p-c)}}{c}\right),$$

где p — полупериметр треугольника, а $J_f(z_0)$ — якобиан отображения f в точке z_0.

Доказательство. Пронумеруем вершины треугольника $P_0,\ P_1,\ P_2$ так, чтобы они находились напротив сторон a, b, c соответственно.

Расстояние от вершин $P_0,\ P_1,\ P_2$ до точки z_0 по формуле длины биссектрисы и свойству биссектрис делиться точкой пересечения в отношении суммы прилежащих к вершине сторон к противолежащей вычисляется

$$|P_0 - z_0| = \frac{b+c}{a}\frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c} = \frac{2}{a}\sqrt{bcp(p-a)},$$

$$|P_1 - z_0| = \frac{2}{b}\sqrt{acp(p-b)},$$

$$|P_2 - z_0| = \frac{2}{c}\sqrt{abp(p-c)}.$$

Рассмотрим $\dfrac{d_{ij}}{\rho_{ij}}(\,0 \leqslant i < j \leqslant 2)$:

$$\frac{d_{21}}{\rho_{21}} = \frac{|P_1 - z_0| + |P_2 - z_0|}{|P_2 - P_1|} = \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{a}}\left(\frac{\sqrt{c(p-b)}}{b} + \frac{\sqrt{b(p-c)}}{c}\right),$$

$$\frac{d_{20}}{\rho_{20}} = \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{b}}\left(\frac{\sqrt{c(p-a)}}{a} + \frac{\sqrt{a(p-c)}}{c}\right); \quad \frac{d_{10}}{\rho_{10}} = \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{c}}\left(\frac{\sqrt{a(p-b)}}{b} + \frac{\sqrt{b(p-a)}}{a}\right).$$

Наибольшим среди рассматриваемых величин является $\dfrac{d_{20}}{\rho_{20}}$, которое возьмем за τ.

Матрица дифференциала отображения f в точке z_0 имеет вид

$$(d_{z_0}f) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -\beta u_x - \gamma u_y & \alpha u_x + \beta u_y \end{pmatrix}.$$

Собственные числа находим из уравнения

$$\begin{vmatrix} u_x^2 + u_y^2 - \lambda & -\beta u_x^2 - \gamma u_x u_y + \alpha u_x u_y + \beta u_y^2 \\ -\beta u_x^2 - \gamma u_x u_y + \alpha u_x u_y + \beta u_y^2 & \beta^2 u_x^2 + 2\beta\gamma u_x u_y + \gamma^2 u_y^2 + \alpha^2 u_x^2 + 2\alpha\beta u_x u_y + \beta^2 u_y^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Квадратное уравнение относительно λ запишется в виде:

$$\lambda^2 - \|d_{z_0}f\|_F^2 \lambda + J_f^2(z_0) = 0.$$

Тогда собственные числа

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\|d_{z_0}f\|_F^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\|d_{z_0}f\|_F^4 - 4J_f^2(z_0)} = \frac{1}{2}\|d_{z_0}f\|_F^2 \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4J_f^2(z_0)}{\|d_{z_0}f\|_F^4}}\right).$$

Подставив найденные значения в формулу для вычисления коэффициента k, получим утверждение теоремы.

Следствие 3. *Пусть D, D' — области в $\mathbb{C}$, треугольник $\Delta P_0P_1P_2 \subset D$ с длинами сторон $a \geqslant b \geqslant c$, а $(\cdot)z_0$ — центр вписанной в него окружности, $f : D \to D'$ — конформное отображение этих областей. Тогда отношение коэффициентов изопериметричности треугольника образа и треугольника прообраза оценивается по формуле (3) с коэффициентом $k = \dfrac{\sqrt{J_f(z_0)} + B\tau}{\sqrt{J_f(z_0)} - B\tau}$, если $k < \sqrt[4]{1 + \dfrac{4c^2a^2 - c^4}{3a^4}}$, при $\tau = \tau(\Delta) = \dfrac{2\sqrt{p}}{\sqrt{b}}\left(\dfrac{\sqrt{c(p-a)}}{a} + \dfrac{\sqrt{a(p-c)}}{c}\right)$, где p — полупериметр треугольника, а $J_f(z_0)$ — якобиан отображения f в точке z_0.*

Доказательство следует из того, что при конформном отображении $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ выполняется

$$\lambda = \Lambda = J_f(z_0) = u_x^2 + u_y^2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азаренок, Б. Н. О построении подвижных адаптивных пространственных сеток / Б. Н. Азаренок. — М. : Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, 2007. — 50 с.
2. Берже, М. Геометрия / М. Берже. — М. : Мир, 1984. — Т. 1. — 560 с.
3. Бобылев, Н. А. О кусочно-гладких гомеоморфных отображениях ограниченных областей и их приложениях к теории сеток / Н. А. Бобылев, С. А. Иваненко, А. В. Казунин // Журн. вычисл. мат. и математ. физ. — 2003. — Т. 43, № 6. — С. 808–817.
4. Болучевская, А. В. Сохранение ориентации симплекса при квазиизометричном отображении / А. В. Болучевская // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, № 1 (2). — С. 20–23.
5. Веричев, А. В. Система встраивания цифровых водяных знаков на триангуляционной сетке опорных точек изображения / А. В. Веричев, В. А. Федосеев // Компьютерная оптика. — 2014. — Т. 38, № 3. — С. 555–563.
6. Волковыский, Л. И. Квазиконформные отображения / Л. И. Волковыский. — Львов : Изд-во Львов. ун-та, 1954. — 156 с.
7. Елизарова, Т. Г. Численное решение квазигидродинамических уравнений на неструктурированных треугольных сетках / Т. Г. Елизарова, А. В. Жериков, И. С. Калачинская // Компьютерные исследования и моделирование. — 2009. — Т. 1, № 2. — С. 181–188.
8. Ильин, В. А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / В. А. Ильин, Г. Д. Ким. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1998. — 320 с.
9. Клячин, В. А. О гомеоморфизмах, сохраняющих триангуляцию / В. А. Клячин // Записки семинара «Сверхмедленные процессы». — Волгоград, 2009. — С. 169–182.
10. Клячин, В. А. Коэффициент изопериметричности симплекса в задаче аппроксимации производных / В. А. Клячин, Д. В. Шуркаева // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2015. — Т. 15, № 2. — С. 151–160. — DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-151-160.
11. Миклюков, В. М. Геометрический анализ. Дифференциальные формы, почти-решения, почти-квазиконформные отображения / В. М. Миклюков. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2007. — 532 с.
12. Ушакова, О. В. Условия невырожденности трехмерных ячеек. Формула для объема ячеек / О. В. Ушакова // Журн. вычисл. мат. и математ. физ. — 2001. — Т. 41, № 6. — С. 881–894.
13. Baker, T. J. A Comparison of Triangle Quality Measures / T. J. Baker, P. P. Ревау // Proc. 10$^{\text{th}}$ Intern. Meshing Roundtable. — Newport Beach, California, 2001. — P. 327–340.

14. Bolotova, Yu. A. A Review of Algorithms for Text Detection in Images and Videos / Yu. A. Bolotova, V. G. Spitsyn, P. M. Osina // Computer Optics. — 2017. — Vol. 41, № 3. — P. 441–452.

REFERENCES

1. Azarenok B.N. *O postroenii podvizhnykh adaptivnykh prostranstvennykh setok* [On Generation of Dynamically Adaptive Spatial Grids]. Moscow, Vychislitelnyy tsentr im. A.A. Dorodnitsyna RAN, 2007. 50 p.

2. Berzhe M. *Geometriya* [Geometry]. Moscow, Mir Publ., 1984, vol. 1. 560 p.

3. Bobylev N.A., Ivanenko S.A., Kazunin A.V. O kusochno-gladkikh gomeomorfnykh otobrazheniyakh ogranichennykh oblastey i ikh prilozheniyakh k teorii setok [On Piecewise-Smooth Homeomorphic Mappings of Bounded Domains and Their Applications to the Theory of Grids]. *Zhurn. vychisl. mat. i matemat. fiz.* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2003, vol. 43, no. 6, pp. 808-817.

4. Boluchevskaya A.V. Sokhranenie orientatsii simpleksa pri kvaziizometrichnom otobrazhenii [On the Quasiisometric Mapping Preserving Simplex Orientation]. *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2013, vol. 13, no. 1 (2), pp. 20-23.

5. Verichev A.V., Fedoseev V.A. Sistema vstraivaniya tsifrovykh vodyanykh znakov na triangulyatsionnoy setke opornykh tochek izobrazheniya [Digital Image Watermarking on Triangle Grid of Feature Points]. *Kompyuternaya optika* [Computer Optics], 2014, vol. 38, no. 3, pp. 555-563.

6. Volkovyskiy L.I. *Kvazikonformnye otobrazheniya* [Quasiconformal Mappings]. Lviv, Izd-vo Lvovskogo universiteta, 1954. 156 p.

7. Elizarova T.G., Zherikov A.V., Kalachinskaya I.S. Chislennoe reshenie kvazigidrodinamicheskikh uravneniy na nestrukturirovannykh treugolnykh setkakh [Numerical Solution of Quasi-Hydrodynamic Equations on Non-Structured Triangle Mesh]. *Kompyuternye issledovaniya i modelirovanie* [Computer Research and Modeling], 2009, vol. 1, no. 2, pp. 181-188.

8. Ilin V.A., Kim G.D. *Lineynaya algebra i analiticheskaya geometriya* [Linear Algebra and Analytical Geometry]. Moscow, Izd-vo Moskovskogo universiteta, 1998. 320 p.

9. Klyachin V.A. O gomeomorfizmakh, sokhranyayushchikh triangulyatsiyu [On Homeomorphisms Preserving Triangulation]. *Zapiski seminara «Sverkhmedlennye protsessy»*. Volgograd, 2009, pp. 169-182.

10. Klyachin V.A., Shurkaeva D.V. Koeffitsient izoperimetrichnosti simpleksa v zadache approksimatsii proizvodnykh [Isoperimetry Coefficient for Simplex in the Problem of Approximation of Derivatives]. *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2015, vol. 15, no. 2, pp. 151-160. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-151-160.

11. Miklyukov V.M. *Geometricheskiy analiz. Differentsialnye formy, pochti-resheniya, pochti-kvazikonformnye otobrazheniya* [Geometric Analysis. Differential Forms, Almost-Solutions, Almost-Quasiconformal Mappings]. Volgograd, Izd-vo VolGU, 2007. 532 p.

12. Ushakova O.V. Usloviya nevyrozhdennosti trekhmernykh yacheek. Formula dlya obyema yacheek [Nondegeneracy Conditions for Threedimensional Cells and a Formula for the Cell's Volume]. *Zhurn. vychisl. mat. i matemat. fiz.* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2001, vol. 41, no. 6, pp. 881-894.

13. Baker T.J., Revay P.P. A Comparison of Triangle Quality Measures. *Proc. 10th Intern. Meshing Roundtable*. Newport Beach, California, 2001, pp. 327-340.

14. Bolotova Yu.A., Spitsyn V.G., Osina P.M. A Review of Algorithms for Text Detection in Images and Videos. *Computer Optics*, 2017, vol. 41, no. 3, pp. 441-452.

DISTORTION OF THE TRIANGLE ISOPERIMETRICITY COEFFICIENT UNDER QUASICONFORMAL MAPPING

Diana V. Shurkaeva

Senior Lecturer, Department of Safety and Information Technology,
National Research University "Moscow Power Engineering Institute"
Diana-547@yandex.ru, ShurkayevaDV@mpei.ru
Krasnokazarmennaya St., 14, 111250 Moscow, Russian Federation

Abstract. When solving problems of mathematical modeling on triangular and terahedral computational grids, it becomes necessary to estimate the error of the obtained solution, which depends on the degree of non-degeneracy of triangulation triangles. Therefore, long and narrow ("splinter") triangles are avoided. We introduce the ratio

$$\sigma(\Delta) = \frac{|\partial\Delta|^{\frac{n}{n-1}}}{|\Delta|},$$

called isoperimetricity coefficient of an n-dimensional simplex Δ. The value $\sigma(\Delta)$ characterizes the deviation of an arbitrary simplex Δ from the regular simplex, since the minimum value is reached on the regular simplex based on isoperimetric inequality.

Let the mapping $f : D \to D$ $(D, D \subset \mathbb{R}^n)$ is homeomorphic and differentiable almost everywhere. Denoted by λ, Λ are the smallest and largest eigenvalues of the operator $(d_{x_0}f)^T(d_{x_0}f)$, respectively. For some interior point $x_0 \in \Delta$ at which the mapping f is differentiable, we denote

$$B = B(x_0, f, \Delta) = \max_{k=\overline{0,n}} \frac{|H_k|}{|P_k - x_0|},$$

where

$$H_k = H(x_0, P_k) = f(P_k) - f(x_0) - d_{x_0}f(P_k - x_0).$$

For a pair of simplex vertices P_i and P_j, we introduce the notation

$$d_{ij} = |P_i - x_0| + |P_j - x_0|, \quad 0 \leqslant i < j \leqslant n.$$

Lemma. *Let the domain $D \subset \mathbb{R}^n$ and the simplex $\Delta P_0 P_1 ... P_n \subset D$ with the minimum and maximum edge lengths ρ_{min} and ρ_{max} respectively and the minimum face area is S, a homeomorphic and differentiable almost everywhere mapping $f : D \to D'$ $(D' \subset \mathbb{R}^n)$ and some interior point of the simplex $x_0 \in \Delta$, in which the mapping f is differentiable with coefficient $k = \dfrac{\sqrt{\Lambda} + B\tau}{\sqrt{\lambda} - B\tau}$. Then if the condition $k < \sqrt[2n]{1 + \dfrac{2n\rho_{min}^{2n-2}\rho_{max}^2 - (n-1)\rho_{min}^{2n}}{q_n \rho_{max}^{2n}}}$ is satisfied, the ratio of the isoperimetricity coefficients of the image simplex and the inverse image simplex is estimated by the formula*

$$\frac{\sqrt[2(n-1)]{\left(1 - (k^{2(n-1)} - 1)\theta_{n-1}\right)^n}}{k^n \sqrt{1 + (1 - k^{-2n})\,\theta_n}} \leqslant \frac{\sigma'}{\sigma} \leqslant k^n \frac{\sqrt[2(n-1)]{\left(1 + (1 - k^{-2(n-1)})\theta_{n-1}\right)^n}}{\sqrt{1 - (k^{2n} - 1)\,\theta_n}},$$

where $\tau = \tau(\Delta, x_0) = \max\limits_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \dfrac{d_{ij}}{\rho_{ij}}$, $\theta_{n-1} = \dfrac{q_{n-1}\rho_{max}^{2(n-1)}}{r_{n-1}S^2}$, $\theta_n = \dfrac{q_n \rho_{max}^{2n}}{r_n V^2}$, $r_n = 2^n (n!)^2$.

In the case of quasiconformal mapping we obtain the following result.

Theorem. *Let* D, D' *are the regions of the complex plane* $\mathbb{C}$, *triangle* $\Delta P_0 P_1 P_2 \subset D$ *with side lengths* $a \geqslant b \geqslant c$ *and the area of the triangle is* S, *and* $(\cdot) z_0$ *is the incenter of* Δ, $f : D \to D'$ *is a differentiable quasiconformal mapping with the coefficient* $k = \dfrac{\|d_{z_0} f\|_F^2 \cdot \sqrt{1+\mu} + \sqrt{2} B\tau}{\|d_{z_0} f\|_F^2 \cdot \sqrt{1-\mu} - \sqrt{2} B\tau}$. *Then if* $k < \sqrt[4]{1 + \dfrac{4c^2a^2 - c^4}{3a^4}}$, *the ratio of the isoperimetricity coefficients of the image triangle and the inverse image triangle is estimated by the formula*

$$\frac{1}{k^2\sqrt{1+\theta\,(1-k^{-4})}} \leqslant \frac{\sigma'}{\sigma} \leqslant \frac{k^2}{\sqrt{1-\theta(k^4-1)}},$$

for $\mu = \mu(f) = \sqrt{1 - \dfrac{4J_f^2(z_0)}{\|d_{z_0} f\|^4}}$, $\tau = \tau(\Delta) = \dfrac{2\sqrt{p}}{\sqrt{b}} \left(\dfrac{\sqrt{c(p-a)}}{a} + \dfrac{\sqrt{a(p-c)}}{c} \right)$, *and* $\theta = \dfrac{3a^4}{16S^2}$, *where* p *is the semiperimeter of the triangle, and* $J_f(z_0)$ *is the Jacobian of the mapping* f *at the point* z_0.

Key words: triangle isoperimetricity coefficient, simplex, triangulation, isoperimetric inequality, quasiconformal mapping, gomeomorphism, quasi-isometric mapping, Keli — Menger determinant.