DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2020.2.2

УДК 519.632.4 Дата поступления статьи: 27.03.2020
ББК 22.19 Дата принятия статьи: 11.05.2020

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ ПРИ КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ [1]

Алексей Александрович Клячин

Доктор физико-математических наук,
заведующий кафедрой математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
Aleksey.klyachin@volsu.ru, klyachin-aa@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-3293-9066
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Алиса Геннадьевна Панченко

Ассистент кафедры математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
Panchenkoag@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В настоящей работе дается оценка погрешности, с которой может быть подсчитан заданный интегральный функционал, если в качестве приближений взять класс кусочно-полиномиальных функций, построенных на треугольных сетках. Показывается, что при некоторых геометрических условиях на триангуляцию степень погрешности будет порядка $O(h^{m+1})$, где h — максимальная сторона треугольников триангуляции и m — степень используемых полиномов.

Ключевые слова: кусочно-полиномиальная функция, площадь поверхности, аппроксимация функционала, триангуляция, минимальная поверхность.

Введение

При исследовании вопросов равномерной сходимости приближенных решений краевых задач для уравнений с частными производными одной из ключевых задач является задача определения погрешности аппроксимации уравнения и краевых условий. Если при этом используется вариационный метод, то требуется знать, с какой точностью аппроксимируется соответствующий функционал. Например, при решении задачи Дирихле для уравнения минимальной поверхности часто применяется вариационный метод, в котором ищется поверхность минимальной площади в классе кусочно-линейных поверхностей [3]. В этой работе для прямоугольной области было установлено, что площадь графика достаточно гладкой функции вычисляется с погрешностью порядка $O(h^2)$, где h — максимальная сторона треугольников, на которые разбивается прямоугольник. Этот факт был применен авторами для доказательства сходимости кусочно-линейных решений равнения минимальной поверхности.

В настоящей работе мы изучаем вопрос о степени точности вычисления функционала площади достаточно гладкой функции при ее аппроксимации кусочно-полиномиальными функциями, заданными на произвольной треугольной сетке. Отметим, что при наличии краевых условий и некоторой модификации вариационного метода задача об оценке погрешности может быть сформулирована следующим образом. Пусть в многоугольной области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ заданы достаточно гладкие функции f и φ такие, что $f|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}$. Зафиксируем некоторое разбиение области Ω на треугольники и через h обозначим максимальную сторону всех этих треугольников. Рассмотрим кусочно-полиномиальную функцию u, которая совпадает с $f - \varphi$ в узлах сетки. Требуется оценить разность площадей графиков функции f и $\varphi + u$.

Отметим также, что в работах [1], [5] получены оценки погрешности вычисления площади поверхностей для триангуляции частного вида, построенной по прямоугольной сетке.

1. Основные результаты

Рассмотрим функционал, задаваемый интегралом

$$I(f) = \iint\limits_{\Omega} G(x, f, \nabla f) dx_1 dx_2, \tag{1}$$

который определен для функций $f \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$. Отметим, что уравнение Эйлера — Лагранжа вариационной задачи для этого функционала имеет вид:

$$Q[f] \equiv \sum_{i=1}^{n} (G'_{\xi_i}(x, f, \nabla f))'_{x_i} - G'_f(x, f, \nabla f) = 0. \tag{2}$$

Если подынтегральное выражение $G(x, f, \nabla f)$ равно $\sqrt{1 + |\nabla f|^2}$, уравнением (2) является уравнение минимальной поверхности

$$\sum_{i=0}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f_{x_i}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 0.$$

Пусть задана многоугольная ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Рассмотрим разбиение этого многоугольника на треугольники. $T_1, T_2, ..., T_N$. И пусть $M_1, M_2, ..., M_q$ — все вершины этих треугольников. Будем предполагать, что ни одна из точек M_i не является внутренней точкой ни одной из сторон треугольников. Через Γ_s будем обозначать стороны всех треугольников, $s = 1, 2, ...L$, а максимальный диаметр всех треугольников обозначим через h, то есть $h = \max\limits_{1 \le k \le N} \mathrm{diam T_k}$, где $\mathrm{diam} F = \sup\left(|x - y| : x, y \in F\right)$, α_k — минимальный угол в треугольнике T_k, $\alpha = \min\limits_{k} \alpha_k > 0$.

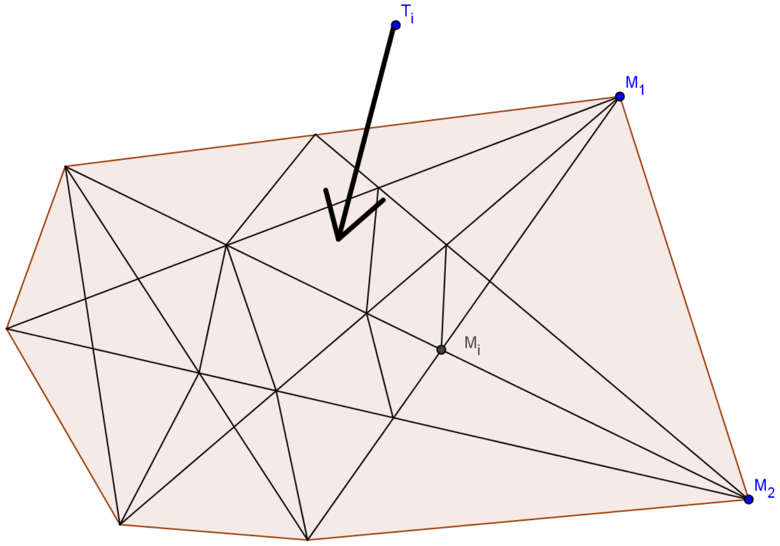

Рис. 1. Триангуляция области Ω

Для построения кусочно-полиномиальной функции степени m нужно к имеющимся вершинам треугольников $M_1, M_2, ..., M_q$ добавить дополнительные точки следующим образом. Для произвольного треугольника T_k, каждая сторона которого разбита на $m-1$ равных частей, и через точки разбиения проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Стороны треугольников также будем относить к множеству этих прямых. Обозначим через $\mathcal{A}_k$ множество, состоящее из точек пересечения этих прямых, лежащих в замкнутом треугольнике T_k. Получаем набор точек $A_1, A_2, ..., A_r$, который содержит и вершины всех треугольников T_k. Далее зададим значения $u_1, u_2, ...u_r$ и построим в каждом треугольнике многочлен степени m так, чтобы его значения в точках A_i совпадали бы с u_i. Получившуюся кусочно-полиномиальную функцию будем обозначать через u. Данная функция будет непрерывной в Ω.

Нам далее понадобится оценка погрешности приближения производных функции производными интерполяционного многочлена. Пусть $f \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$ и $u_i = f(A_i), i = 1, ..., r$. В работе [6] доказывается, что для всех $(x_1, x_2) \in T_k$ выполнено неравенство

$$\left|\frac{\partial^s(f(x_1,x_2)-u(x_1,x_2))}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}\right| \le K(\sin\theta)^{-s}Mh^{m-s+1}, \quad 0 \le s \le m, \quad k_1+k_2=s, \tag{3}$$

где θ — максимальный угол триангуляции, $|\frac{\partial^{m+1}f}{\partial x_1^q \partial x_2^{m+1-q}}| \le M$, $q = 0, ..., m+1$, и постоянная K не зависит от разбиения $\{T_k\}_{k=1}^N$, области Ω и f.

Пусть $\varphi \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$, $f|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}$ и обозначим через u кусочно-полиномиальную функцию, построенную по значениям функции $f - \varphi$. Положим $f^P = \varphi + u$ и пусть $g^t = f^P + t(f - f^P)$. Для каждой стороны треугольников выберем нормаль ν так, что для $\partial\Omega$ она будет внешней. По аналогии с работами [2] и [4] доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$I(f)-I(f^P)=\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{T_k}(z-u)\int\limits_{0}^{1}Q[g^t]dt\,dx+\int\limits_{\partial\Omega}(z-u)\sum_{i=1}^{2}\nu_i\int\limits_{0}^{1}G'_{\xi_i}(x,g^t,\nabla g^t)dtdS+$$

$$+\sum_{\textit{внутр.}\Gamma}\int_{\Gamma_\ell}(z-u)\sum_{i=1}^{2}\nu_i\int\limits_{0}^{1}G_{\xi_i}(x,g_+^t,\nabla g_+^t)-G_{\xi_i}(x,g_-^t,\nabla g_-^t)dtdS, \qquad (4)$$

где $z=f-\phi$, g_+^t,g_-^t *— функция* g^t*, рассматриваемая в двух треугольниках с общей стороной* Γ_ℓ*, причем* g_+^t *соответствует тому треугольнику, для которого нормаль* ν *является внешней.*

Доказательство. Заметим, что

$$I(f)-I(f^P)=\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{T_k}(G(x,f,\nabla f)-G(x,f^P,\nabla f^P))=\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{T_k}\int\limits_{0}^{1}\frac{d}{dt}(G(x,g^t,\nabla g^t))dtdx=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{T_k}\int\limits_{0}^{1}\left[\frac{\partial G}{\partial u}(z-u)+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial G}{\partial\xi_i}(z-u)'_{x_i}\right]dxdt=\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{T_k}\int\limits_{0}^{1}\frac{\partial G}{\partial u}(z-u)dxdt+$$

$$+\int\limits_{0}^{1}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{T_k}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial G}{\partial\xi_i}(z-u)'_{x_i}dxdt.$$

Рассмотрим отдельно интеграл

$$\int\limits_{T_k}\frac{\partial G}{\partial\xi_i}(z-u)'_{x_i}dx.$$

Распишем его, воспользовавшись формулой Гаусса — Остроградского

$$\int\limits_{T_k}\frac{\partial G}{\partial\xi_i}(z-u)'_{x_i}dx=-\int\limits_{T_k}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial G}{\partial\xi_i}(x,g^t(x),\nabla g^t(x))\right)(z-u)dx+\int\limits_{\partial T_k}\frac{\partial G}{\partial\xi_i}(z-u)\nu_i ds.$$

Тогда

$$I(f)-I(f^P)=\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{T_k}(z-u)\left(\int\limits_{0}^{1}\frac{\partial G}{\partial u}dxdt-\int\limits_{0}^{1}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\frac{\partial G}{\partial x_i}(x,g^t(x),\nabla g^t(x))\right)dxdt\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{\partial T_k}(z-u)\sum_{i=1}^{2}\nu_i\int\limits_{0}^{1}\frac{\partial G}{\partial\xi_i}dtds.$$

Распишем отдельно интеграл по границе

$$\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{\partial T_k}(z-u)\sum_{i=1}^{2}\nu_i\int\limits_0^1\frac{\partial G}{\partial\xi_i}dtds=\int\limits_{\partial\Omega}(z-u)\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^1\frac{\partial G}{\partial\xi_i}dtds+$$

$$+\sum_{\text{внутр.}\Gamma_s}\int\limits_{\Gamma_s}(z-u)\sum_{i=1}^{2}\nu_i\int\limits_0^1\left(\frac{\partial G}{\partial\xi_i}(x,g^t_+,\nabla g^t_+)-\frac{\partial G}{\partial\xi_i}(x,g^t_-,\nabla g^t_-)\right)dtds,$$

где g^t_+, g^t_- — функции g^t, рассматриваемые в треугольниках с общей гранью Γ_ℓ, причем g^t_+ соответствует тому треугольнику, для которого нормаль ν является внешней.

Таким образом, окончательно приходим к равенству

$$I(f)-I(f^P)=\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{T_k}(z-u)\int\limits_0^1 Q[g^t]dtdx+\int\limits_{\partial\Omega}(z-u)\sum_{i=1}^{2}\nu_i\int\limits_0^1 G'_{\xi_i}(x,g^t,\nabla g^t)dtdS+$$

$$+\sum_{\text{внутр.}\Gamma}\int_{\Gamma_\ell}(z-u)\sum_{i=1}^{2}\nu_i\int\limits_0^1 G_{\xi_i}(x,g^t_+,\nabla g^t_+)-G_{\xi_i}(x,g^t_-,\nabla g^t_-)dtdS.$$

Применим доказанное равенство для оценки погрешности вычисления графика функции

$$I(f)=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+f^2_{x_1}+f^2_{x_2}}dx_1\,dx_2$$

в случае плоской области $\Omega\subset\mathbf{R}^2$. Пусть $f\in C^{m+1}(\overline{\Omega})$. Положим $M_1^f=\max\limits_{1\le i\le 2}\max\limits_{\overline{\Omega}}|f_{x_i}(x)|$, $M_2^f=\max\limits_{1\le i,j\le 2}\max\limits_{\overline{\Omega}}|f_{x_ix_j}(x)|$. Получим оценку

$$Q[g^t]=\sum_{i=1}^{2}(G'_{\xi_i}(x,g^t,\nabla g^t))_{x_i}-G'_f(x,g^t,\nabla g^t).$$

Ясно, что

$$G'_f(x,g^t,\nabla g^t)=0,$$

так как G зависит только от ∇g^t. Тогда

$$\frac{\partial G}{\partial\xi_i}=\frac{g^t_{x_i}}{\sqrt{1+|\nabla g^t|^2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial G}{\partial\xi_i}\right)=\frac{g^t_{x_ix_i}\cdot\sqrt{1+|\nabla g^t|^2}-g^t_{x_i}\cdot\frac{g^t_{x_i}\cdot\ g^t_{x_ix_i}+g^t_{x_j}\cdot\ g^t_{x_ix_j}}{\sqrt{1+|\nabla g^t|^2}}}{1+|\nabla g^t|^2}=$$

$$=\frac{g^t_{x_ix_i}\cdot(1+|\nabla g^t|^2)-g^t_{x_i}\sum\limits_{j=1}^{2}g^t_{x_j}\cdot\ g^t_{x_ix_j}}{(1+|\nabla g^t|^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

В силу того, что

$$g^t_{x_i} = f^P_{x_i} + t(f_{x_i} - f^P_{x_i}) = \varphi_{x_i} + u_{x_i} + t(f_{x_i} - \varphi_{x_i} - u_{x_i})$$

из неравенства (3) следует, что

$$|g^t_{x_i}| = |\varphi_{x_i} + u_{x_i} + t(f_{x_i} - \varphi_{x_i} - u_{x_i})| \le$$

$$\le M_1^{\varphi} + 2M_1^{f-\varphi} + K(\sin\theta)^{-1} M h^m \equiv \overline{M}_1.$$

Аналогично

$$|g^t_{x_i x_j}| \le M_2^{\varphi} + 2M_2^{f-\varphi} + K(\sin\theta)^{-2} M h^{m-1} \equiv \overline{M}_2.$$

Таким образом,

$$|Q[g^t]| \le \sum_{i,j=1}^{2} \left| g^t_{x_i x_i} \cdot \left(\frac{(1+|\nabla g^t|^2)\delta_{ij} - g^t_{x_i} g^t_{x_j}}{(1+|\nabla g^t|^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \right| \le$$

$$\le \sum_{i,j=1}^{2} |g^t_{x_i x_j}| \cdot \Big((1+|\nabla g^t|^2) + |g^t_{x_i} g^t_{x_j}| \Big) \le 4M_2(1 + 2M_1^2 + M_1^2) = 4\overline{M}_2(1 + 3\overline{M}_1^2).$$

Далее ясно, что

$$\left| \sum_{i=1}^{2} \nu_i \int_0^1 \frac{g^t_{x_i} dt}{\sqrt{(1+|\nabla g^t|^2)}} \right| \le |\nu| \cdot \left| \frac{\nabla g^t}{\sqrt{(1+|\nabla g^t|^2)}} \right| \le 1.$$

Зафиксируем внутреннее ребро Γ_s. Обозначим через T_+ и T_- треугольники, соприкасающиеся по этому ребру. Тогда на Γ_s выполнено $\nabla g^t_+ - \nabla g^t_- = t(\nabla f^P)|_{T_+} - (\nabla f^P)|_{T_-}$. Заметим, что для произвольных векторов $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$ выполнено неравенство $\left| \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} - \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} \right| \le$ $\le 2|\xi - \eta|$ Действительно,

$$\left| \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} - \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} \right| = \left| \frac{\xi + \eta - \eta}{\sqrt{1+\xi^2}} - \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} \right| \le$$

$$\le \left| \frac{\xi - \eta}{\sqrt{1+\xi^2}} \right| + |\eta| \left(\left| \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} \right| \right).$$

Оценим отдельно второе слагаемое

$$|\eta| \left(\left| \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} \right| \right) = |\eta| \left| \left(\frac{\sqrt{1+\eta^2} - \sqrt{1+\xi^2}}{\sqrt{1+\eta^2}\sqrt{1+\xi^2}} \right) \right| =$$

$$= \frac{|\eta||\eta^2 - \xi^2|}{(\sqrt{1+\xi^2} + \sqrt{1+\eta^2}) \cdot \sqrt{1+\eta^2}\sqrt{1+\xi^2}} \le \frac{|\eta||\xi - \eta||\eta + \xi|}{(|\eta| + |\xi|)\sqrt{1+\eta^2}\sqrt{1+\xi^2}} \le \frac{|\xi - \eta|}{\sqrt{1+\xi^2}}.$$

Тогда

$$\left| \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} - \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} \right| \le \left| \frac{\xi - \eta}{\sqrt{1+\xi^2}} \right| + \frac{|\xi - \eta|}{\sqrt{1+\xi^2}} \le 2|\xi - \eta|.$$

Поэтому

$$\left(\left|\frac{\nabla g_+^t}{\sqrt{1+|\nabla g_+^t|^2}}-\frac{\nabla g_-^t}{\sqrt{1+|\nabla g_-^t|^2}}\right|\right)\le 2|\nabla g_+^t-g_-^t|=2|(\nabla f^P)|_{T_+}-(\nabla f^P)|_{T_-}|.$$

Теперь воспользуемся соотношением (3) для оценки модуля разности градиентов f и f^P

$$|\nabla f-\nabla f^P|\le K(\sin\theta)^{-1}Mh^m.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\left|\frac{\nabla(g_+^t)_{x_i}}{\sqrt{1+|\nabla g_+^t|^2}}-\frac{\nabla(g_-^t)_{x_i}}{\sqrt{1+|\nabla g_-^t|^2}}\right|\right)\le 4K(\sin\theta)^{-1}Mh^m.$$

Положим $4K(\sin\theta)^{-1}M=C_1$. Теперь применим все доказанные выше неравенства к равенству (4), получим

$$|I(f^P)-I(f)|\le\max_{\Omega}|z-u|\left(4\overline{M}_2(1+\overline{M}_1^2)|\Omega|+|\partial\Omega|+C_1h^m\sum_{\text{внутр.}\Gamma_s}|\Gamma_s|\right),$$

где $|\Omega|$ — площадь фигуры Ω, а $|\partial\Omega|$ — ее периметр. Мы можем предположить, что триангуляция обладает таким свойством, что существует постоянная C_2, которая не зависит от h и для которой выполнено $h\cdot\sum\limits_{\text{внутр.}\Gamma_s}|\Gamma_s|\le C_2$. Таким образом, мы пришли к неравенству

$$|I(f^P)-I(f)|\le C_3\max_{\Omega}|z-u|,$$

где

$$C_3=\left(4\overline{M}_2(1+\overline{M}_1^2)|\Omega|+|\partial\Omega|+C_1C_2h^{m-1}\right).$$

Далее несложно убедиться, что из оценки (3) следует, что $|z-u|\le KMh^{m+1}$. Таким образом, окончательно приходим к следующей оценке

$$|I(f^P)-I(f)|\le C_3KMh^{m+1}.$$

Заключение

В данной работе рассматривался вопрос об оценке точности кусочно-полиномиальной аппроксимации функционала площади C^{m+1}-гладкой поверхности. В результате была получена оценка степени приближения $|I(f^P)-I(f)|\le C_3MKh^{m+1}$.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке; соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2019-1613.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гацунаев, М. А. Приближенное вычисление площади поверхности / М. А. Гацунаев // Материалы Научной сессии, 26–30 апр. 2010 г. Вып. 6. Математика и информационные технологии. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2010. — С. 66–70.

2. Клячин, А. А. Моделирование минимальных триангулированных поверхностей: оценка погрешности вычисления площади при проектировании сооружений / А. А. Клячин, А. Г. Панченко // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2016. — № 3 (34). — С. 73–83.

3. Клячин, А. А. О равномерной сходимости кусочно-линейных решений уравнения минимальной поверхности / А. А. Клячин, М. А. Гацунаев // Уфимский математический журнал. — 2014. — № 6 (3). — С. 3–16.

4. Клячин, А. А. Оценка погрешности вычисления интегральных функционалов с помощью кусочно-линейных функций / А. А. Клячин // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2015. — № 1 (26). — С. 6–12.

5. Rasmussen, A. F. Extrapolation methods for approximating arc length and surface area / A. F. Rasmussen, M. S. Floater // Numerical Algorithms. — 2007. — № 44 (3). — P. 235–248.

6. Subbotin, Yu. N. The dependence of estimates of a multidimensional piecewise-polynomial approximation on the geometric characteristics of a triangulation / Yu. N. Subbotin, M. S. Floater // Proc. Steklov Inst. Math. — 1990. — № 189. — P. 135–159.

REFERENCES

1. Gatsunaev M.A. Priblizhennoe vychislenie ploshchadi poverkhnosti [Approximate Calculation of the Surface Area]. *Materialy Nauchnoy sessii, 26–30 apr. 2010 g. Vyp. 6. Matematika i informatsionnye tekhnologii.* Volgograd, Izd-vo VolGU Publ., 2010, pp. 66-70.

2. Klyachin A.A., Panchenko A.G. Modelirovanie minimalnykh triangulirovannykh poverkhnostey: otsenka pogreshnosti vychisleniya ploshchadi pri proektirovanii sooruzheniy [Modeling Minimum Triangulated Sufcaces: Error Estimation Calculating the Area of the Design of Facilities]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2016, no. 3 (34), pp. 73-83.

3. Klyachin A.A., Gatsunaev M.A. O ravnomernoy skhodimosti kusochno-lineynykh resheniy uravneniya minimalnoy poverkhnosti [On Uniform Convergence of Piecewise Linear Solutions of the Minimal Surface Equation]. *Ufimskiy matematicheskiy zhurnal* [Ufa Mathematical Journal], 2014, no. 6 (3), pp. 3-16.

4. Klyachin A.A. Otsenka pogreshnosti vychisleniya integralnykh funktsionalov s pomoshchyu kusochno-lineynykh funktsiy [C^1-Approximation of the Level Surfaces of Functions Defined on Irregular Grids]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2015, no. 1 (26), pp. 6-12.

5. Rasmussen A.F., Floater M.S. Extrapolation Methods for Approximating Arc Length and Surface Area. *Numerical Algorithms*, 2007, no. 44 (3), pp. 235-248.

6. Subbotin Yu.N., Floater M.S. The Dependence of Estimates of a Multidimensional Piecewise-Polynomial Approximation on the Geometric Characteristics of a Triangulation. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1990, no. 189, pp. 135-159.

ERROR ESTIMATION OF AREA CALCULATION FOR PIECEWISE POLYNOMIAL APPROXIMATION

Aleksey A. Klyachin

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Head of the Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
Aleksey.klyachin@volsu.ru, klyachin-aa@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-3293-9066
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Alisa G. Panchenko

Assistant Lecturer, Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
Panchenkoag@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. The paper considers the functional given by the integral

$$I(f) = \int\limits_{\Omega} G(x, f, \nabla f) dx, \tag{1}$$

defined for functions $f \in C^{m+1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. The authors note that the Euler — Lagrange equation of the variational problem for this functional has the form

$$Q[f] \equiv \sum_{i=1}^{2} \left(G'_{\xi_i}(x, f, \nabla f)\right)'_{x_i} - G'_f(x, f, \nabla f) = 0, \tag{2}$$

where $G(x, f, \nabla f) = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$. Equation (2) is the equation of a minimal surface. Another example is the Poisson equation $\Delta f = g(x)$, which corresponds to the function $G(x, f, \nabla f) = |\nabla f|^2 + 2g(x)f(x)$.

Next, the article examines the issue of the degree of approximation of the functional (1) by piecewise polynomial functions. This leads to the convergence of variational methods for some boundary value problems. The authors note that the derivatives of a continuously differentiable function approach derived piecewise polynomial function with an error of the m-order with respect to the diameter of the triangles of the triangulation. The reasechers have found that for functions from $C^{m+1}(\Omega)$ functional (1) is calculated with accuracy $O(h^{m+1})$ in the class of piecewise polynomial functions of degree m.

Key words: piecewise polynomial function, area of a surface, approximation of functional, triangulation, minimal surface.