



DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2020.2.1>

УДК 519.632.4

ББК 22.19

Дата поступления статьи: 17.04.2020

Дата принятия статьи: 11.05.2020

## ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ВОЛГОГРАДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ<sup>1</sup>

**Алексей Александрович Клячин**

Доктор физико-математических наук,  
заведующий кафедрой математического анализа и теории функций,  
Волгоградский государственный университет  
[klyachin-aa@yandex.ru](mailto:klyachin-aa@yandex.ru), [matf@volsu.ru](mailto:matf@volsu.ru)  
<https://orcid.org/0000-0003-3293-9066>  
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

**Владимир Александрович Клячин**

Доктор физико-математических наук,  
заведующий кафедрой компьютерных наук и экспериментальной математики,  
Волгоградский государственный университет  
[klchnv@mail.ru](mailto:klchnv@mail.ru), [klyachin.va@volsu.ru](mailto:klyachin.va@volsu.ru)  
<https://orcid.org/0000-0003-1922-7849>  
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

**Аннотация.** В настоящей статье рассмотрены основные направления исследований по геометрическому анализу, которые проводились и проводятся научной математической школой Волгоградского государственного университета. Вкратце изложены результаты основоположника научной школы доктора физико-математических наук, профессора Владимира Михайловича Миклюкова и его учеников. Эти результаты касаются решения ряда задач в области квазиконформных плоских отображений и отображений с ограниченным искажением поверхностей и римановых многообразий, теории минимальных поверхностей и поверхностей предписанной средней кривизны, поверхностей

нулевой средней кривизны в лоренцевых пространствах, а также задач, связанных с исследованием устойчивости такого рода поверхностей. Кроме этого, отмечены результаты изучения различных классов триангуляций — объекта, возникающего на стыке исследований в области геометрического анализа и вычислительной математики. Также в данном обзоре рассматриваются работы, в которых дано применение метода Фурье разложения решений уравнений Лапласа — Бельтрами и стационарного уравнения Шредингера по собственным функциям соответствующих краевых задач. В частности, приведены результаты по нахождению емкостных характеристик, которые позволили впервые сформулировать и доказать критерии выполнения различных теорем типа Лиувилля и разрешимости краевых задач на модельных и квазимодельных римановых многообразиях. Также указывается роль метода эквивалентных функций при исследовании подобных задач на многообразиях достаточно общего вида.

В данной статье помимо этого дается обзор результатов, касающихся оценок погрешности вычисления интегральных функционалов и сходимости кусочно-полиномиальных решений нелинейных уравнений вариационного типа: уравнения минимальной поверхности, уравнения равновесной капиллярной поверхности и уравнения бигармонических функций.

**Ключевые слова:** геометрический анализ, минимальные поверхности, емкость, триангуляция, гармонические функции, интегральный функционал.

### **Введение**

Одним из направлений развития математики в Волгоградском государственном университете стали исследования в области геометрического анализа — области математики, возникшей на стыке геометрии, математического анализа и дифференциальных уравнений. Здесь тесно переплелись методы квазиконформных отображений, задачи геометрического строения минимальных поверхностей и исследования асимптотического поведения решений эллиптических уравнений в неограниченных областях или в окрестности особой точки.

На протяжении последних двух десятилетий рядом сотрудников ИМИТ ВолГУ наработана достаточно мощная и специфическая емкостная техника проведения исследований в теории дифференциальных уравнений на некомпактных римановых многообразиях, получен ряд важных и интересных утверждений. Результаты исследований неоднократно докладывались на международных и всероссийских конференциях. Отметим, что разработанные методы позволили получить решение целого ряда проблем качественной теории однородных линейных и квазилинейных эллиптических уравнений и неравенств на некомпактных римановых многообразиях.

Параллельно с данными исследованиями развивалось направление, связанное с актуальными задачами вычислительной геометрии: изучение различных классов триангуляций, оценки погрешности вычисления производных, дифференциальных операторов, интегральных функционалов на них, изучение вопросов сходимости приближенных кусочно-полиномиальных решений эллиптических уравнений.

## 1. Основные результаты

Самую важную роль в становлении геометрического анализа в ВолГУ сыграли исследования доктора физико-математических наук, профессора Владимира Михайловича Миклюкова. Разработанные им методы нелинейной емкости позволили решить широкий круг задач, связанных с поведением решений нелинейных уравнений в пространстве и на многообразиях [35; 40; 41; 48–52; 54–57]. Также возник новый объем задач, который включал в себя вопросы протяженности минимальных трубок и лент в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах, проблемы конформного типа поверхностей, исследования пространственно подобных трубок и лент нулевой средней кривизны, их устойчивости/неустойчивости при малых деформациях, времени существования, точек ветвлений, связей между точками ветвления и лоренцево инвариантными характеристиками поверхностей [37; 39; 44–47; 53; 58; 59]. Сюда же мы относим изучение теорем типа Фрагмена — Линделефа для дифференциальных форм, теорем типа Альфорса для дифференциальных форм с конечным/бесконечным числом различных асимптотических трактов; теорем типа теоремы Вимана для квазирегулярных отображений многообразий; применение изопериметрических методов в принципе Фрагмена — Линделефа для квазирегулярных отображений многообразий [36; 38; 42; 43; 60].

Под руководством В.М. Миклюкова получила развитие теория минимальных поверхностей и поверхностей нулевой средней кривизны в псевдоевклидовых пространствах благодаря применению таких современных методов математического анализа, как емкостная и модульная техника. Усовершенствованная емкостная и модульная техника позволила ему решить ряд задач нелинейного анализа в его докторской диссертации. В частности, им получены значительные результаты о граничных свойствах непараметрических минимальных поверхностей, был дан новый подход к проблеме Бернштейна для уравнения типа минимальной поверхности. Фундаментальным результатом явился результат о суммарном топологическом индексе критических точек для решений уравнения типа минимальной поверхности.

Исследования В.М. Миклюкова, касающиеся строения трубок и лент нулевой средней кривизны в евклидовом пространстве и в пространстве Минковского, содержат такие результаты, как теоремы типа Фрагмена — Линделефа, теоремы Лиувилля на поверхностях нулевой средней кривизны и их приложения к геометрическому строению этих поверхностей. В этих работах нашло, в частности, развитие теории простых концов на случай поверхностей нулевой средней кривизны в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах. В работах В.М. Миклюкова найдены общие подходы к изучению асимптотического поведения решений нелинейных уравнений эллиптического типа как в окрестности конечной точки, так и в бесконечно удаленной. Разработанными методами им получены различные свойства решений таких уравнений (неравенство Гарнака, принцип Сен-Венана, непрерывность по Гельдеру и др.) В последнее время эти результаты В.М. Миклюковым были распространены на случай почти-решений эллиптических уравнений и систем. В частности, им получено неравенство Гарнака. Найденные им новые подходы к исследованию асимптотического поведения решений эллиптических уравнений были успешно применены его учениками: В.Г. Ткачевым, А.А. Клячиным, В.А. Клячиным — в изучении строения минимальных, максимальных поверхностей и поверхностей предписанной средней кривизны [12–15; 17–19; 22; 23; 26; 62; 63; 67]. В основе применения этих методов лежит простой факт, что координатные функции погруженных поверхностей предписанной средней кривизны удовлетворяют эллиптическим

дифференциальным уравнениям в метрике поверхности. В ряде работ были получены оценки протяженности минимальных трубок не только для случая гиперповерхностей, но и для случая поверхностей произвольной коразмерности. Одним из замечательных следствий такой оценки является тот факт, что верхняя оценка достигается только на поверхностях вращения. В случае поверхностей коразмерности больше 1 также полностью описан класс таких поверхностей. Эти результаты также были распространены на случай максимальных поверхностей в пространстве-времени Минковского. Отметим, что в этом пространстве решения уравнения максимальных поверхностей могут иметь изолированные особые точки. Исследованию вопросов существования и единственности решений с заданными особенностями были посвящены работы [7; 9].

Отметим еще одно направление исследований в рамках геометрического анализа, выполненное В.М. Миклюковым и его учениками в Волгоградском государственном университете. Это направление связано с изучением признаков устойчивости и неустойчивости минимальных поверхностей, поверхностей предписанной средней кривизны и максимальных поверхностей в пространствах Лоренца [11; 16; 21; 24; 25; 34]. Проблема устойчивости такого рода поверхностей вытекает из их вариационного происхождения. Важным моментом здесь является тот факт, что в природе могут существовать только устойчивые решения. В ряде работ были получены признаки и свойства устойчивых не только классов поверхностей указанных выше, но и классов поверхностей, являющихся экстремалами более общих функционалов.

С начала 2000-х гг. в Волгоградском государственном университете начинаются исследования в области вычислительной геометрии, и, в частности, объектом исследования становятся различные классы триангуляций [8; 10; 20; 27]. Метод триангуляций находит широкое применение в различных областях: численные методы, 3D-моделирование и программирование, машинное обучение и многое другое. Одной из задач в методе триангуляций является задача построения триангуляции с наперед заданными геометрическими характеристиками, такими как минимальный угол в треугольнике, максимальный радиус описанной окружности и т. п. Хорошо известен факт, что наилучшие значения указанных величин достигаются на классе триангуляций Делоне. В работах школы геометрического анализа в ВолГУ было дано строгое обоснование использования триангуляции Делоне в задачах аппроксимации дифференцируемых функций, заданных на нерегулярном множестве точек. А также были построены соответствующие примеры, объясняющие, почему эти результаты не могут быть распространены на многомерный случай. Кроме этого, в работах ученых ИМИТ ВолГУ был описан класс функционалов и им соответствующий класс триангуляций, на которых функционалы достигают наименьшего значения. Одним из таких функционалов является сумма площадей охватывающих выпуклых множеств треугольников триангуляций. Доказан следующий результат. Минимальная сумма таких площадей достигается на триангуляции, удовлетворяющей аналогу свойства Делоне: каждое охватывающее множество треугольника триангуляции не содержит точек заданного конечного множества [27]. Это свойство обобщает свойство классической триангуляции Делоне на более широкий класс триангуляций, включающий класс регулярных триангуляций (триангуляций, которые являются проекциями выпуклых многогранников). В настоящее время группа математиков ВолГУ работает над проблемами, связанными с исследованиями структуры множества данного класса триангуляций и решений соответствующих вариационных задач.

Отметим еще одно направление геометрического анализа, в котором работает ряд сотрудников ИМИТ ВолГУ. На протяжении последних двух десятилетий ими разработа-

на достаточно мощная и специфическая емкостная техника проведения исследований в теории дифференциальных уравнений на некомпактных римановых многообразиях, получен ряд важных и интересных утверждений. Результаты исследований неоднократно докладывались на международных и всероссийских конференциях. Отметим, что разработанные методы позволили получить решение целого ряда проблем качественной теории однородных линейных и квазилинейных эллиптических уравнений и неравенств на некомпактных римановых многообразиях. Так, активное применение метода Фурье — разложения решений уравнений Лапласа — Бельтрами и стационарного уравнения Шредингера по собственным функциям соответствующих краевых задач, способствовало нахождению емкостных характеристик, которые позволили впервые сформулировать и доказать критерии выполнения различных теорем типа Лиувилля и разрешимости краевых задач на модельных и квазимодельных многообразиях.

Проблеме разрешимости задачи Дирихле о восстановлении решений уравнений на некомпактных римановых многообразиях по граничным данным на «бесконечности» посвящены работы ряда математиков. Для некоторых римановых многообразий (например, модельных и квазимодельных) существует естественная геометрическая компактификация, позволяющая поставить задачу Дирихле в ее классическом варианте. На таких многообразиях А.Г. Лосевым и Е.А. Мазепой были введены характеристики емкостного типа, которые позволили также впервые найти критерии восстановления на них решений различных эллиптических уравнений по непрерывным граничным данным на «бесконечности». Следует отметить, что на произвольном некомпактном многообразии даже сама постановка задачи Дирихле о восстановлении решений уравнений по граничным данным на «бесконечности» достаточно проблематична. В последние годы в работах Е.А. Мазепы наметился новый подход к постановке краевых задач на произвольных некомпактных римановых многообразиях, основанный на введении понятия классов эквивалентных на многообразии непрерывных ограниченных функций. Удалось получить ряд интересных результатов о взаимосвязи разрешимости краевых и внешне краевых задач, об устойчивости решений при вариациях некоторых коэффициентов для линейных эллиптических уравнений. В дальнейшем Е.А. Мазепой данная методика была успешно применена для изучения решений различных краевых задач для некоторых полулинейных и квазилинейных эллиптических уравнений [30; 31]. Кроме того, были изучены вопросы об устойчивости теорем типа Лиувилля и об устойчивости разрешимости различных краевых задач (в терминах эквивалентных функций) при вариациях нелинейной части рассматриваемых уравнений.

Метод эквивалентных функций оказался тесно связан с аппроксимативным подходом построения обобщенных решений краевых задач для эллиптических уравнений, описанным в ранних работах М.В. Келдыша и Е.М. Ландиса. Данный подход, основанный на методе разметания (Пуанкаре, XIX в.), позволяет рассматривать решения задачи Дирихле без каких-либо ограничений на области, в которых она решается, оставаясь при этом в классических предположениях относительно непрерывности граничных данных. В работах М.В. Келдыша (1941) и Е.М. Ландиса (1971) данный подход был применен для изучения проблемы разрешимости задачи Дирихле и устойчивости ее решения в ограниченных областях, граница которых может иметь сложное геометрическое строение. Аналогичный подход позволил А.Г. Лосеву и В.В. Филатову [28] установить взаимосвязь между существованием нетривиальных ограниченных и положительных решений стационарного уравнения Шредингера с конечным интегралом энергии. Е.А. Мазепой данный подход был распространен для построения обобщенного (по Келдышу)

решения задачи Дирихле и других краевых задач с граничными данными на «бесконечности» для произвольных некомпактных римановых многообразий и доказана теорема единственности для рассматриваемых задач [32]. В последнее десятилетие нашими сотрудниками метод эквивалентных функций стал активно применяться для изучения поведения решений различных краевых задач для однородных линейных уравнений в неограниченных областях многообразий с некомпактным краем. А.В. Светловым в соавторстве был получен ряд результатов об однозначной разрешимости рассматриваемых краевых задач [66].

Другое направление исследований, в котором были получены новые результаты в последнее десятилетие, связано с изучением решений некоторых нелинейных эллиптических неравенств. А.Г. Лосевым и Е.А. Мазепой были получены условия отсутствия нетривиальных решений, а также условия существования и мощность множества положительных решений эллиптических дифференциальных неравенств вида на модельных римановых многообразиях и римановых произведениях [29; 33].

Последние результаты обобщают аналогичные утверждения, полученные ранее в работах Y. Naito. и H. Usami (1997) для евклидова пространства. Аналогичные результаты на модельных и квазимодельных римановых многообразиях были получены А.Г. Лосевым и С.С. Вихаревым для стационарного уравнения Гинзбурга — Ландау и дифференциального неравенства специального вида [3].

Отметим, что изучение различных свойств триангуляций и треугольных сеток областей привело еще к одному типу задач, связанных с оценками вычисления интегральных функционалов и сходимостью кусочно-полиномиальных решений нелинейных уравнений вариационного типа. Некоторые задачи, возникающие при проектировании архитектурных сооружений, сводятся к построению поверхностей минимальной площади. Это достаточно подробно отражено в книге: Михайленко В.Е., Ковалев С.Н. [61], а также в статье [1], где изучается проблема проектирования тентовых тканевых конструкций. Подробный анализ результатов этих работ приводит к задаче разработки эффективных методов для приближенного решения уравнения минимальной поверхности и математическому обоснованию найденных методов в плане устойчивости и сходимости приближенных решений. Основная трудность при исследовании данных вопросов заключается в том, что уравнение минимальной поверхности является нелинейным и поэтому традиционные методы, используемые для линейных уравнений, не пригодны. Похожая ситуация возникает и при исследовании других нелинейных уравнений, например, уравнения равновесной капиллярной поверхности.

Первым шагом решения подобных задач стали результаты, связанные с изучением кусочно-линейных решений уравнения минимальной поверхности над заданной триангуляцией многоугольной области [4]. А именно, было показано, что при определенных условиях градиенты таких функций остаются по модулю ограниченными при стремлении к нулю максимального диаметра треугольников триангуляции. Подчеркивается, что это свойство выполняется, если кусочно-линейные функции приближают значение площади графика гладкой функции с необходимой точностью. Поэтому, в качестве дополнительного результата было показано, что кусочно-линейные функции дают второй порядок точности вычисления площади графика достаточно гладкой функции. Следствием полученных свойств стала равномерная сходимость кусочно-линейных решений к точному решению уравнения минимальной поверхности. Аналогичный подход был применен и для уравнения равновесной капиллярной поверхности [5]. Как оказалось, соответствующий интеграл энергии также приближается с погрешностью  $O(h^2)$ , где

$h$  — мелкость разбиения. И, как следствие этого свойства, в работе была установлена равномерная сходимости кусочно-линейных решений к точному решению уравнения равновесной капиллярной поверхности с краевым условием в виде заданного контактного угла. Еще одним подходом построения приближенных решений является вариационный метод в классе полиномиальных функций. В работе [6] было сформулировано понятие полиномиального приближенного решения задачи Дирихле уравнения минимальной поверхности. Основным результатом стало доказательство равномерной сходимости таких решений при определенных условиях на геометрическое строение области.

Следующим этапом исследования проблем аппроксимации функционалов стало изучение вопроса степени приближения интегралов, зависящих от вторых производных (примером может быть функционал полной свободной энергии деформированной пластинки) [8]. В этом направлении нами доказано следующее свойство. Подобный функционал может быть вычислен с погрешностью порядка  $O(h^{4m+1})$  при мелкости треугольной сетки  $h \rightarrow 0$ , если в качестве приближающих функций рассматривать специальным образом выбранные кусочно-полиномиальные функции степени  $4m+1$  для  $m \geq 1$ . В двумерном случае удастся показать, что кусочно-квадратичная аппроксимация дает второй порядок точности вычисления функционала для специального вида триангуляции.

### Заключение

В данном обзоре были рассмотрены основные направления исследований по геометрическому анализу, которые проводились и проводятся научной математической школой Волгоградского государственного университета. Отметим, что в настоящее время часть вышеприведенных исследований ведутся на базе совместной работы в рамках сотрудничества с Математическим научным центром при Институте математики имени С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

### ПРИМЕЧАНИЕ

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке; соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2019-1613.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдюшев, А. А. Проектирование непологих оболочек минимальной поверхности / А. А. Абдюшев, И. Х. Мифтахутдинов, П. П. Осипов // Известия КазГАСУ. — 2009. — Т. 2, № 12. — С. 86–92.
2. Веденяпин, А. Д. Внешние размеры трубчатых минимальных гиперповерхностей / А. Д. Веденяпин, В. М. Миклюков // Математический сборник. — 1986. — Т. 131, № 6. — С. 240–250.
3. Вихарев, С. С. О некоторых лиувиллевых теоремах для стационарного уравнения Гинзбурга — Ландау на квазимодельных римановых многообразиях / С. С. Вихарев // Известия Саратовского университета. Новая серия. — 2015. — Т. 15, № 2. — С. 127–135.
4. Гацунаев, М. А. О равномерной сходимости кусочно-линейных решений уравнения минимальной поверхности / М. А. Гацунаев, А. А. Клячин // Уфимский математический журнал. — 2014. — Т. 6, № 3. — С. 3–16.

5. Клячин, А. А. О равномерной сходимости кусочно-линейных решений уравнения равновесной капиллярной поверхности / А. А. Клячин // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2015. — Т. 18, № 2. — С. 52–62.

6. Клячин, А. А. О сходимости полиномиальных приближенных решений уравнения минимальной поверхности / А. А. Клячин, И. В. Трухляева // Уфимский математический журнал. — 2016. — Т. 8, № 1. — С. 72–83.

7. Клячин, А. А. Описание множества целых решений с особенностями уравнения максимальных поверхностей / А. А. Клячин // Математический сборник. — 2003. — Т. 194, № 7. — С. 83–104.

8. Клячин, А. А. Оценка погрешности вычисления функционала, содержащего производные второго порядка, на треугольной сетке / А. А. Клячин // Сибирские электронные математические известия. — 2019. — Т. 16. — С. 1856–1867.

9. Клячин, А. А. Существование решений с особенностями уравнения максимальных поверхностей в пространстве Минковского / А. А. Клячин, В. М. Миклюков // Математический сборник. — 1993. — Т. 184, № 9. — С. 103–124.

10. Клячин, В. А. Аппроксимация градиента функции на основе специального класса триангуляций / В. А. Клячин // Изв. РАН. Сер. математическая. — 2018. — Т. 82, № 6. — С. 65–77.

11. Клячин, В. А. О некоторых свойствах устойчивых и неустойчивых поверхностей предписанной средней кривизны / В. А. Клячин // Изв. РАН. Сер. математическая. — 2006. — Т. 70. — С. 77–90.

12. Клячин, В. А. Об асимптотических свойствах максимальных трубок и лент в окрестности изолированной особенности в пространстве Минковского / В. А. Клячин // Сиб. мат. ж. — 2002. — Т. 43, № 1. — С. 76–89.

13. Клячин, В. А. Максимальные трубчатые поверхности произвольной коразмерности в пространстве Минковского / В. А. Клячин // Изв. РАН. Сер. математическая. — 1993. — Т. 57, № 4. — С. 118–131.

14. Клячин, В. А. Новые примеры трубчатых минимальных поверхностей произвольной коразмерности / В. А. Клячин // Математические заметки. — 1997. — Т. 62, № 1. — С. 154–156.

15. Клячин, В. А. Об асимптотических свойствах максимальных трубчатых поверхностей в окрестности изолированной особенности в пространстве Минковского / В. А. Клячин // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2000. — Т. 1, № 5. — С. 34–42.

16. Клячин, В. А. Об устойчивости максимальных поверхностей с изолированной особенностью / В. А. Клячин // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 1999. — Т. 1, № 4. — С. 10–12.

17. Клячин, В. А. Оценка протяженности трубчатых минимальных поверхностей произвольной коразмерности / В. А. Клячин // Сиб. мат. ж. — 1992. — Т. 33, № 5. — С. 201–206.

18. Клячин, В. А. Поверхности нулевой средней кривизны со знакопеременной метрикой / В. А. Клячин // Труды кафедры математического анализа и теории функций Волгоградского государственного университета. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2002. — С. 56–77.

19. Клячин, В. А. Строение поверхностей нулевой средней кривизны в окрестности изолированной особой точки / В. А. Клячин // Доклады академии наук. — 2002. — Т. 383, № 6. — С. 727–730.

20. Клячин, В. А. Описание функционалов, минимизируемых  $\Phi$ -триангуляциями / В. А. Клячин, Е. Г. Григорьева // Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2017. — Т. 139. — С. 9–14.

21. Клячин, В. А. Об устойчивости экстремальных поверхностей некоторых функционалов типа площади / В. А. Клячин, Н. М. Медведева // Сибирские электронные математические известия. — 2007. — Т. 4. — С. 113–132.

22. Клячин, В. А. Геометрическое строение трубок и лент нулевой средней кривизны в пространстве Минковского / В. А. Клячин, В. М. Миклюков // Научные школы ВолГУ.

Геометрический анализ. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 1999. — С. 204–244.

23. Клячин, В. А. Максимальные гиперповерхности трубчатого типа в пространстве Минковского / В. А. Клячин, В. М. Миклюков // Известия АН СССР. Отделение математических и естественных наук. — 1991. — Т. 55, № 1. — С. 206–217.

24. Клячин, В. А. Об одном емкостном признаке неустойчивости минимальных гиперповерхностей / В. А. Клячин, В. М. Миклюков // Доклады академии наук. — 1993. — Т. 330, № 4. — С. 424–426.

25. Клячин, В. А. Признаки неустойчивости поверхностей нулевой средней кривизны в искривленных лоренцевых произведениях / В. А. Клячин, В. М. Миклюков // Математический сборник. — 1996. — Т. 187, № 11. — С. 67–88.

26. Клячин, В. А. Условия конечности времени существования максимальных трубок и лент в искривленных лоренцевых произведениях / В. А. Клячин, В. М. Миклюков // Изв. РАН. Сер. математическая. — 1994. — Т. 58, № 3. — С. 196–210.

27. Клячин, В. А. Экстремальные свойства триангуляции, основанной на условии пустого выпуклого множества / В. А. Клячин // Сибирские электронные математические известия. — 2015. — Т. 12. — С. 991–997.

28. Лосев, А. Г. Теоремы типа Лиувилля для решений стационарного уравнения Шредингера с конечным интегралом Дирихле / А. Г. Лосев, В. В. Филатов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2016. — Т. 1, № 5. — С. 13–23. — DOI: 10.15688/jvolsu1.2016.5.2.

29. Лосев, А. Г. Об асимптотическом поведении положительных решений некоторых квазилинейных неравенств на модельных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Уфимский математический журнал. — 2013. — Вып. 5 (36). — С. 83–89.

30. Мазепа, Е. А. К вопросу о разрешимости краевых задач для полулинейных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2014. — Вып. 4 (23). — С. 36–46. — DOI: 10.15688/jvolsu1.2014.4.3.

31. Мазепа, Е. А. О разрешимости краевых задач для квазилинейных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Сибирские электронные математические известия. — 2016. — Т. 13. — С. 1026–1034.

32. Мазепа, Е. А. Обобщенные решения краевых задач для квазилинейных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Известия вузов. Математика. — 2018. — № 1. — С. 57–66.

33. Мазепа, Е. А. Положительные решения квазилинейных эллиптических неравенств на модельных римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Известия вузов. Математика. — 2015. — № 9. — С. 22–30.

34. Медведева, Н. М. Исследование устойчивости экстремальных поверхностей вращения / Н. М. Медведева // Изв. Сарат. ун-та. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2007. — Т. 7, № 2. — С. 25–32.

35. Миклюков, В. М. Асимптотические тракты субгармонических функций на многообразии и внешнее строение минимальных поверхностей / В. М. Миклюков // Всесоюзная конференция по геометрии и анализу: тез. докл. — Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1989. — С. 54–55.

36. Миклюков, В. М. Введение в негладкий анализ / В. М. Миклюков. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2008. — 750 с.

37. Миклюков, В. М. Геометрический анализ поверхностей нулевой средней кривизны / В. М. Миклюков // Научные школы ВолГУ. Геометрический анализ и его приложения. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 1999. — С. 5–21.

38. Миклюков, В. М. Геометрический анализ. Дифференциальные формы, почти-решения, почти квазиконформные отображения / В. М. Миклюков. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2007. — 530 с.

39. Миклюков, В. М. Граничные свойства решений уравнений типа минимальных поверхностей / В. М. Миклюков // Математический сборник. — 2001. — Т. 192, № 10. —

С. 71–94. — DOI: 10.4213/sm603.

40. Миклюков, В. М. Емкость и обобщенный принцип максимума для решений квазилинейных уравнений эллиптического типа / В. М. Миклюков // Доклады АН СССР. — 1980. — Т. 250, № 6. — С. 1318–1320.

41. Миклюков, В. М. Изотермические координаты на поверхностях с особенностями / В. М. Миклюков // Математический сборник. — 2004. — Т. 195, № 1. — С. 69–88.

42. Миклюков, В. М. Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения / В. М. Миклюков. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2005. — 271 с.

43. Миклюков, В. М. Локальное время, сверхмедленные процессы и зоны стагнации / В. М. Миклюков // Записки семинара «Сверхмедленные процессы». — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2006. — С. 131–137.

44. Миклюков, В. М. Максимальные трубки и ленты в пространстве Минковского / В. М. Миклюков // Математический сборник. — 1992. — Т. 183, № 12. — С. 45–76.

45. Миклюков, В. М. Минимальные ленты типа геликоида / В. М. Миклюков // IX Всесоюз. геометр. конф. — Кишинев : Изд-во Молдав. гос. ун-та, 1988. — С. 213–214.

46. Миклюков, В. М. Множества особенностей решений уравнения максимальных поверхностей в пространстве Минковского / В. М. Миклюков // Сибирский математический журнал. — 1992. — Т. 131, № 6. — С. 131–140.

47. Миклюков, В. М. Некоторые особенности поведения решений уравнений типа минимальной поверхности в неограниченных областях / В. М. Миклюков // Математический сборник. — 1981. — Т. 116, № 1. — С. 72–86.

48. Миклюков, В. М. Некоторые признаки параболичности и гиперболичности граничных множеств поверхностей / В. М. Миклюков // Известия РАН. Серия математическая. — 1996. — Т. 60, № 4. — С. 111–158.

49. Миклюков, В. М. О конформном типе концов максимальных пространственно подобных поверхностей с особенностями / В. М. Миклюков // Актуальные вопросы комплексного анализа : тез. докл. школы-семинара. — Ташкент : Изд-во «Узбекистан», 1989. — С. 79–80.

50. Миклюков, В. М. О конформном типе поверхностей, теореме Лиувилля и теореме Бернштейна / В. М. Миклюков // Доклады АН СССР. — 1978. — Т. 242, № 3. — С. 537–540.

51. Миклюков, В. М. О критических точках решений уравнений типа максимальных поверхностей в пространстве Минковского / В. М. Миклюков // Теория отображения и приближения функций. — Киев : Наукова думка, 1989. — С. 112–125.

52. Миклюков, В. М. О некоторых граничных задачах теории конформных отображений / В. М. Миклюков // Сибирский математический журнал. — 1977. — Т. 18, № 5. — С. 1111–1124.

53. Миклюков, В. М. О некоторых свойствах трубчатых в целом минимальных поверхностей в  $R^n$  / В. М. Миклюков // Доклады АН СССР. — 1979. — Т. 247, № 3. — С. 549–552.

54. Миклюков, В. М. Об асимптотических свойствах субрешений квазилинейных уравнений эллиптического типа и отображений с ограниченным искажением / В. М. Миклюков // Математический сборник. — 1980. — Т. 111, № 1. — С. 42–66.

55. Миклюков, В. М. Об одной оценке модуля семейства кривых на минимальной поверхности и ее применениях / В. М. Миклюков // Успехи мат. наук. — 1979. — Т. 34, № 3. — С. 207–208. — DOI: 10.1070/RM1979v034n03ABEH004005.

56. Миклюков, В. М. Об одном новом подходе к теореме Бернштейна и близким вопросам уравнений типа минимальной поверхности / В. М. Миклюков // Математический сборник. — 1979. — Т. 108, № 2. — С. 268–289.

57. Миклюков, В. М. О существовании и единственности квазиконформных отображений с неограниченными характеристиками / В. М. Миклюков, Г. Д. Суворов // Исследования по теории функций комплексного переменного и ее применения. — Киев : Наукова думка, 1972. — С. 45–53.

58. Миклюков, В. М. Некоторые свойства трубчатых минимальных поверхностей произвольной коразмерности / В. М. Миклюков, В. Г. Ткачев // Математический сборник. — 1989. — Т. 180, № 9. — С. 1278–1295. — DOI: 10.1070%2FMSM1991v068n01ABEH002101.
59. Миклюков, В. М. О строении в целом внешне полных минимальных поверхностей в  $R^n$  / В. М. Миклюков, В. Г. Ткачев // Изв. вузов. Математика. — 1987. — № 7. — С. 30–36.
60. Миклюков, В. М. Функции весовых классов Соболева, анизотропные метрики и вырождающиеся квазиконформные отображения / В. М. Миклюков. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2010. — 304 с.
61. Михайленко, В. Е. Конструирование форм современных архитектурных сооружений / В. Е. Михайленко, С. Н. Ковалев. — Киев : Будівельник, 1978. — 138 с.
62. Ткачев, В. Г. Минимальные трубки с конечной полной кривизной / В. Г. Ткачев // Сибирский математический журнал. — 1998. — Т. 39, № 1. — С. 181–190. — DOI: 10.1007%2FBBF02732370.
63. Ткачев, В. Г. Некоторые оценки средней кривизны графиков над областями в  $R^n$  / В. Г. Ткачев // Доклады АН СССР. — 1990. — Т. 314, № 1. — С. 140–143.
64. Klyachin, V. A. Geometrical structure of tubes and bands of zero mean curvature in Minkowski space / V. A. Klyachin, V. M. Miklyukov // Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Mathematica. — 2003. — № 28. — P. 239–270.
65. Klyachin, V. A. Approximation of the gradient of a function on the basis of a special class of triangulations / V. A. Klyachin // Izvestiya: Mathematics. — 2018. — Vol. 82, № 6. — P. 65–77.
66. Korolkov, S. On solvability of boundary value problems for solutions of the stationary Schrodinger equation on unbounded domains of Riemannian manifolds / S. Korolkov, E. Korolkova, A. Svetlov // International Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2014. — Vol. 97, № 2. — P. 231–240.
67. Tkachev, V. G. Minimal tube and coefficients of holomorphic functions / V. G. Tkachev // Bull. de la Soc. Sci. de Lodz. — 2018. — № XX. — P. 19–26.

## REFERENCES

1. Abdyushev A.A., Miftakhutdinov I.Kh., Osipov P.P. Proektirovanie nepologikh obolochek minimalnoy poverkhnosti [Design of Steep Shells with Minimal Surface]. *Izvestiya KazGASU*, 2009, vol. 2, no. 12, pp. 86-92.
2. Vedenyapin A.D., Miklyukov V.M. Vneshnie razmery trubchatykh minimalnykh giperpoverkhnostey [External Dimensions of Tubular Minimal Hypersurfaces]. *Matematicheskii sbornik* [Sbornik: Mathematics], 1986, vol. 131, no. 6, pp. 240-250.
3. Vikharev S.S. O nekotorykh liuvillevykh teoremakh dlya statsionarnogo uravneniya Ginzburga — Landau na kvazimodelnykh rimanovykh mnogoobraznykh [On Some Liouville Theorems for the Stationary Ginzburg-Landau Equation on Quasimodel Riemannian Manifolds]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya*, 2015, vol. 15, no. 2, pp. 127-135.
4. Gatsunaev M.A., Klyachin A.A. O ravnomernoy skhodimosti kusochno-lineynykh resheniy uravneniya minimalnoy poverkhnosti [On the Uniform Convergence of Piecewise Linear Solutions of the Minimal Surface Equation]. *Ufimskiy matematicheskii zhurnal* [Ufa Mathematical Journal], 2014, vol. 6, no. 3, pp. 3-16.
5. Klyachin A.A. O ravnomernoy skhodimosti kusochno-lineynykh resheniy uravneniya ravnovesnoy kapillyarnoy poverkhnosti [On the Uniform Convergence of Piecewise Linear Solutions of the Equilibrium Capillary Surface Equation]. *Sibirskiy zhurnal industrialnoy matematiki* [Journal of Applied and Industrial Mathematics], 2015, vol. 18, no. 2, pp. 52-62.
6. Klyachin A.A., Trukhlyaeva I.V. O skhodimosti polinomialnykh priblizhennykh resheniy uravneniya minimalnoy poverkhnosti [On the Convergence of Polynomial Approximate Solutions of the Minimal Surface Equation]. *Ufimskiy matematicheskii zhurnal* [Ufa Mathematical Journal], 2016, vol. 8, no. 1, pp. 72-83.
7. Klyachin A.A. Opisaniye mnozhestva tselykh resheniy s osobennostyami uravneniya maksimalnykh poverkhnostey [Description of the Set of Singular Entire Solutions of the

Maximal Surface Equation]. *Matematicheskiiy sbornik* [Sbornik: Mathematics], 2003, vol. 194, no. 7, pp. 83-104.

8. Klyachin A.A. Otsenka pogreshnosti vychisleniya funktsionala, sodержashchego proizvodnye vtorogo poryadka, na treugolnoy setke [Error Estimation for Calculating a Functional Containing Second-Order Derivatives on a Triangular Grid]. *Sibirskie elektronnyye matematicheskie izvestiya*, 2019, vol. 16, pp. 1856-1867.

9. Klyachin A.A., Miklyukov V.M. Sushchestvovanie resheniy s osobennostyami uravneniya maksimalnykh poverkhnostey v prostranstve Minkovskogo [Existence of Solutions with Singularities for the Maximal Surface Equation in Minkowski Space]. *Matematicheskiiy sbornik* [Sbornik: Mathematics], 1993, vol. 184, no. 9, pp. 103-124.

10. Klyachin V.A. Approksimatsiya gradienta funktsii na osnove spetsialnogo klassa triangulyatsiy [Function Gradient Approximation Based on a Special Class of Triangulations]. *Izv. RAN. Ser. matematicheskaya* [Izvestiya: Mathematics], 2018, vol. 82, no. 6, pp. 65-77.

11. Klyachin V.A. O nekotorykh svoystvakh ustoychivyykh i neustoychivyykh poverkhnostey predpisannoy sredney krivizny [On Some Properties of Stable and Unstable Surfaces of Prescribed Average Curvature]. *Izv. RAN. Ser. matematicheskaya* [Izvestiya: Mathematics], 2006, vol. 70, pp. 77-90.

12. Klyachin V.A. Ob asimptoticheskikh svoystvakh maksimalnykh trubok i lent v okrestnosti izolirovannoy osobennosti v prostranstve Minkovskogo [On the Asymptotic Properties of Maximal Tubes and Tapes in a Neighborhood of an Isolated Singularity in Minkowski Space]. *Sib. mat. zh* [Siberian Mathematical Journal], 2002, vol. 43, no. 1, pp. 76-89.

13. Klyachin V.A. Maksimalnye trubchatye poverkhnosti proizvolnoy korazmernosti v prostranstve Minkovskogo [Maximal Tubular Surfaces of Arbitrary Codimension in Minkowski Space]. *Izv. RAN. Ser. matematicheskaya* [Izvestiya: Mathematics], 1993, vol. 57, no. 4, pp. 118-131.

14. Klyachin V.A. Novye primery trubchatykh minimalnykh poverkhnostey proizvolnoy korazmernosti [New Examples of Tubular Minimal Surfaces of Arbitrary Codimension]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 1997, vol. 62, no. 1, pp. 154-156.

15. Klyachin V.A. Ob asimptoticheskikh svoystvakh maksimalnykh trubchatykh poverkhnostey v okrestnosti izolirovannoy osobennosti v prostranstve Minkovskogo [On the Asymptotic Properties of Maximal Tubular Surfaces in a Neighborhood of an Isolated Singularity in Minkowski Space]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [The Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2000, vol. 1, no. 5, pp. 34-42.

16. Klyachin V.A. Ob ustoychivosti maksimalnykh poverkhnostey s izolirovannoy osobennostyu [On the Stability of Maximal Surfaces with an Isolated Singularity]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [The Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 1999, vol. 1, no. 4, pp. 10-12.

17. Klyachin V.A. Otsenka protyazhennosti trubchatykh minimalnykh poverkhnostey proizvolnoy korazmernosti [Estimation of the Length of Tubular Minimal Surfaces of Arbitrary Codimension]. *Sib. mat. zh* [Siberian Mathematical Journal], 1992, vol. 33, no. 5, pp. 201-206.

18. Klyachin V.A. Poverkhnosti nulevoy sredney krivizny so znakoperemennoy metrikoy [Zero Mean Curvature Surfaces with Alternating Metric]. *Trudy kafedry matematicheskogo analiza i teorii funktsiy Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta*. Volgograd, Izd-vo VolGU, 2002, pp. 56-77.

19. Klyachin V.A. Stroenie poverkhnostey nulevoy sredney krivizny v okrestnosti izolirovannoy osoboy tochki [The Structure of Surfaces of Zero Mean Curvature in the Vicinity of an Isolated Singular Point]. *Doklady akademii nauk* [Doklady Mathematics], 2002, vol. 383, no. 6, pp. 727-730.

20. Klyachin V.A., Grigoryeva E.G. Opisanie funktsionalov, minimiziruemykh  $\Phi$ -triangulyatsiyami [Description of Functionals Minimized by  $\Phi$ -Triangulations]. *Itogi nauki i tekhniki. Seriya: Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory*, 2017, vol. 139, pp. 9-14.

21. Klyachin V.A., Medvedeva N.M. Ob ustoychivosti ekstremalnykh poverkhnostey nekotorykh funktsionalov tipa ploshchadi [On the Stability of Extremal Surfaces of Some

Functionals Such as Area]. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya*, 2007, vol. 4, pp. 113-132.

22. Klyachin V.A., Miklyukov V.M. Geometricheskoe stroenie trubok i lent nulevoy sredney krivizny v prostranstve Minkovskogo [The Geometric Structure of Tubes and Tapes of Zero Average Curvature in Minkowski Space]. *Nauchnye shkoly VolGU. Geometricheskii analiz*. Volgograd, Izd-vo VolGU, 1999, pp. 204-244.

23. Klyachin V.A., Miklyukov V.M. Maksimalnye giperpoverkhnosti trubchatogo tipa v prostranstve Minkovskogo [Maximum Tube-Type Hypersurfaces in Minkowski Space]. *Izvestiya AN SSSR. Otdelenie matematicheskikh i estestvoennykh nauk* [Izvestiya: Mathematics], 1991, vol. 55, no. 1, pp. 206-217.

24. Klyachin V.A., Miklyukov V.M. Ob odnom emkostnom priznake neustoychivosti minimalnykh giperpoverkhnostey [On a Capacitive Criterion for Instability of Minimal Hypersurfaces]. *Doklady akademii nauk* [Doklady Mathematics], 1993, vol. 330, no. 4, pp. 424-426.

25. Klyachin V.A., Miklyukov V.M. Priznaki neustoychivosti poverkhnostey nulevoy sredney krivizny v iskrivlennykh lorentsevykh proizvedeniyakh [Signs of Instability of Surfaces of Zero Mean Curvature in Curved Lorentzian Products]. *Matematicheskii sbornik* [Sbornik: Mathematics], 1996, vol. 187, no. 11, pp. 67-88.

26. Klyachin V.A., Miklyukov V.M. Usloviya konechnosti vremeni sushchestvovaniya maksimalnykh trubok i lent v iskrivlennykh lorentsevykh proizvedeniyakh [Conditions for the Finiteness of the Existence Time of Maximal Tubes and Tapes in Curved Lorentzian Products]. *Izv. RAN. Ser. matematicheskaya* [Izvestiya: Mathematics], 1994, vol. 58, no. 3, pp. 196-210.

27. Klyachin V.A. Ekstremalnye svoystva triangulyatsii, osnovannoy na uslovii pustogo vypuklogo mnozhestva [Extreme Properties of a Triangulation Based on the Condition of an Empty Convex Set]. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya*, 2015, vol. 12, pp. 991-997.

28. Losev A.G., Filatov V.V. Teoremy tipa Liuvillya dlya resheniy statsionarnogo uravneniya Shredingera s konechnym integralom Dirikhle [Liouville-Type Theorems for Solutions of the Stationary Schrödinger Equation with Finite Dirichlet Integral]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2016, vol. 1, no. 5, pp. 13-23. DOI: 10.15688/jvolsu1.2016.5.2.

29. Losev A.G., Mazepa E.A. Ob asimptoticheskom povedenii polozhitelnykh resheniy nekotorykh kvazilineynykh neravenstv na modelnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On the Asymptotic Behavior of Positive Solutions of Some Quasilinear Inequalities on Model Riemannian Manifolds]. *Ufimskiy matematicheskii zhurnal* [Ufa Mathematical Journal], 2013, iss. 5 (36), pp. 83-89.

30. Mazepa E.A. K voprosu o razreshimosti kraevykh zadach dlya polulineynykh ellipticheskikh uravneniy na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On the Solvability of Boundary Value Problems for Semilinear Elliptic Equations on Noncompact Riemannian Manifolds]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2014, iss. 4 (23), pp. 36-46. DOI: 10.15688/jvolsu1.2014.4.3.

31. Mazepa E.A. O razreshimosti kraevykh zadach dlya kvazilineynykh ellipticheskikh uravneniy na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On the Solvability of Boundary Value Problems for Quasilinear Elliptic Equations on Noncompact Riemannian Manifolds]. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya*, 2016, vol. 13, pp. 1026-1034.

32. Mazepa E.A. Obobshchennye resheniya kraevykh zadach dlya kvazilineynykh ellipticheskikh uravneniy na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [Generalized Solutions of Boundary Value Problems for Quasilinear Elliptic Equations on Noncompact Riemannian Manifolds]. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2018, no. 1, pp. 57-66.

33. Mazepa E.A. Polozhitelnye resheniya kvazilineynykh ellipticheskikh neravenstv na modelnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [Positive Solutions of Quasilinear Elliptic Inequalities on Model Riemannian Manifolds]. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2015,

no. 9, pp. 22-30.

34. Medvedeva N.M. Issledovanie ustoychivosti ekstremalnykh poverkhnostey vrashcheniya [Investigation of the Stability of Extreme Surfaces of Revolution]. *Izv. Sarat. un-ta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2007, vol. 7, no. 2, pp. 25-32.

35. Miklyukov V.M. Asimptoticheskie trakty subgarmonicheskikh funktsiy na mnogoobrazii i vneshnee stroenie minimalnykh poverkhnostey [Asymptotic Paths of Subharmonic Functions on a Manifold and the External Structure of Minimal Surfaces]. *Vsesoyuznaya konferentsiya po geometrii i analizu: tez. dokl.* Novosibirsk, Nauka. Sib. otd-nie Publ., 1989, pp. 54–55.

36. Miklyukov V.M. *Vvedenie v negladkiy analiz* [Introduction to Nonsmooth Analysis]. Volgograd, Izd-vo VolGU, 2008. 750 p.

37. Miklyukov V.M. Geometricheskii analiz poverkhnostey nulevoy sredney krivizny [Geometric Analysis of Surfaces with Zero Mean Curvature]. *Nauchnye shkoly VolGU. Geometricheskii analiz i ego prilozheniya*. Volgograd, Izd-vo VolGU, 1999, pp. 5-21.

38. Miklyukov V.M. *Geometricheskii analiz. Differentsialnye formy, pochti-resheniya, pochti kvazikonformnye otobrazheniya* [Geometric Analysis. Differential Forms, Almost-Solutions, Almost Quasiconformal Mappings]. Volgograd, Izd-vo VolGU, 2007. 530 p.

39. Miklyukov V.M. Granichnye svoystva resheniy uravneniy tipa minimalnykh poverkhnostey [Boundary Properties of Solutions of Equations of the Type of Minimal Surfaces]. *Matematicheskii sbornik* [Sbornik: Mathematics], 2001, vol. 192, no. 10, pp. 71-94. DOI: 10.4213/sm603.

40. Miklyukov V.M. Emkost i obobshchennyi printsip maksimuma dlya resheniy kvazilineynykh uravneniy ellipticheskogo tipa [Capacity and Generalized Maximum Principle for Solutions of Quasilinear Equations of Elliptic Type]. *Doklady AN SSSR* [Soviet Mathematics], 1980, vol. 250, no. 6, pp. 1318-1320.

41. Miklyukov V.M. Izotermicheskie koordinaty na poverkhnostyakh s osobennostyami [Isothermal Coordinates on Surfaces with Features]. *Matematicheskii sbornik* [Sbornik: Mathematics], 2004, vol. 195, no. 1, pp. 69-88.

42. Miklyukov V.M. *Konformnoe otobrazhenie neregulyarnoy poverkhnosti i ego primeneniya* [Conformal Mapping of an Irregular Surface and Its Application]. Volgograd, Izd-vo VolGU, 2005. 271 p.

43. Miklyukov V.M. Lokalnoe vremya, sverkhmedlennyye protsessy i zony stagnatsii [Local Time, Super Slow Processes and Stagnation Zones]. *Zapiski seminara «Sverkhmedlennyye protsessy»*. Volgograd, Izd-vo VolGU, 2006, pp. 131-137.

44. Miklyukov V.M. Maksimalnye trubki i lenty v prostranstve Minkovskogo [Maximum Tubes and Tapes in Minkowski Space]. *Matematicheskii sbornik* [Sbornik: Mathematics], 1992, vol. 183, no. 12, pp. 45-76.

45. Miklyukov V.M. Minimalnye lenty tipa gelikoida [Minimal Helicoid Type Tapes]. *IX Vsesoyuz. geometr. konf.* Chisinau, Izd-vo moldavskogo gos. un-ta, 1988, pp. 214–214.

46. Miklyukov V.M. Mnozhestva osobennostey resheniy uravneniya maksimalnykh poverkhnostey v prostranstve Minkovskogo [The Set of Singularities of Solutions of the Equation of Maximal Surfaces in Minkowski Space]. *Sibirskiy matematicheskii zhurnal* [Siberian Mathematical Journal], 1992, vol. 131, no. 6, pp. 131-140.

47. Miklyukov V.M. Nekotorye osobennosti povedeniya resheniy uravneniy tipa minimalnoy poverkhnosti v neogranichennykh oblastiakh [Some Features of the Behavior of Solutions of Equations Such as a Minimal Surface in Unbounded Domains]. *Matematicheskii sbornik* [Sbornik: Mathematics], 1981, vol. 116, no. 1, pp. 72-86.

48. Miklyukov V.M. Nekotorye priznaki parabolichnosti i giperbolichnosti granichnykh mnozhestv poverkhnostey [Some Signs of Parabolicity and Hyperbolicity of Boundary Sets of Surfaces]. *Izvestiya RAN. Seriya matematicheskaya* [Izvestiya: Mathematics], 1996, vol. 60, no. 4, pp. 111-158.

49. Miklyukov V.M. O konformnom tipe kontsov maksimalnykh prostranstvenno podobnykh poverkhnostey s osobennostyami [On the Conformal Type of Ends of Maximal Spatially Similar Surfaces with Singularities]. *Aktualnye voprosy kompleksnogo analiza: tez. dokl. shkoly-seminara*. Tashkent, Izd-vo «Uzbekistan» Publ., 1989, pp. 79-80.

50. Miklyukov V.M. O konformnom tipe poverkhnostey, teoreme Liuvillya i teoreme

Bernshyteyna [On the Conformal Type of Surfaces, Liouville's Theorem, and Bernstein's Theorem]. *Doklady AN SSSR* [Soviet Mathematics], 1978, vol. 242, no. 3, pp. 537-540.

51. Miklyukov V.M. O kriticheskikh tochках resheniy uravneniy tipa maksimalnykh poverkhnostey v prostranstve Minkovskogo [On Critical Points of Solutions of Equations of the Type of Maximal Surfaces in Minkowski Space]. *Teoriya otobrazheniya i priblizheniya funktsiy*. Kiev, Naukova dumka Publ., 1989, pp. 112-125.

52. Miklyukov V.M. O nekotorykh granichnykh zadachakh teorii konformnykh otobrazheniy [On Some Boundary Value Problems of the Theory of Conformal Mappings.]. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* [Siberian Mathematical Journal], 1977, vol. 18, no. 5, pp. 1111-1124.

53. Miklyukov V.M. O nekotorykh svoystvakh trubchatykh v tselom minimalnykh poverkhnostey v  $R^n$  [On Some Properties of Tubular Generally Minimal Surfaces in  $R^n$ ]. *Doklady AN SSSR* [Soviet Mathematics], 1979, vol. 247, no. 3, pp. 549-552.

54. Miklyukov V.M. Ob asimptoticheskikh svoystvakh subresheniy kvazilineynykh uravneniy ellipticheskogo tipa i otobrazheniy s ogranichennym iskazheniem [On the Asymptotic Properties of Sub-Solutions of Quasilinear Equations of Elliptic Type and Mappings with Bounded Distortion]. *Matematicheskiy sbornik* [Sbornik: Mathematics], 1980, vol. 111, no. 1, pp. 42-66.

55. Miklyukov V.M. Ob odnoy otsenke modulya semeystva krivykh na minimalnoy poverkhnosti i ee primeneniyyakh [An Estimate of the Modulus of a Family of Curves on a Minimal Surface and Its Applications]. *Uspekhi mat. nauk* [Russian Mathematical Surveys], 1979, vol. 34, no. 3, pp. 207-208. DOI: 10.1070/RM1979v034n03ABEH004005.

56. Miklyukov V.M. Ob odnom novom podkhode k teoreme Bernshyteyna i blizkim voprosam uravneniy tipa minimalnoy poverkhnosti [On a New Approach to Bernstein's Theorem and Related Questions of Equations of the Type of Minimal Surface]. *Matematicheskiy sbornik* [Sbornik: Mathematics], 1979, vol. 108, no. 2, pp. 268-289.

57. Miklyukov V.M., Suvorov G.D. O sushchestvovanii i edinstvennosti kvazikonformnykh otobrazheniy s neogranichennymi kharakteristikami [On the Existence and Uniqueness of Quasiconformal Mappings with Unbounded Characteristics]. *Issledovaniya po teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo i ee primeneniya*. Kiev, Naukova dumka Publ., 1972, pp. 45–53.

58. Miklyukov V.M., Tkachev V.G. Nekotorye svoystva trubchatykh minimalnykh poverkhnostey proizvolnoy korazmernosti [Some Properties of Tubular Minimal Surfaces of Arbitrary Codimension]. *Matematicheskiy sbornik* [Sbornik: Mathematics], 1989, vol. 180, no. 9, pp. 1278-1295. DOI: 10.1070%2FSM1991v068n01ABEH002101.

59. Miklyukov V.M., Tkachev V.G. O stroenii v tselom vneshne polnykh minimalnykh poverkhnostey v  $R^n$  [On the Structure as a Whole of Externally Complete Minimal Surfaces in  $R^n$ ]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 1987, no. 7, pp. 30-36.

60. Miklyukov V.M. *Funktsii vesovykh klassov Soboleva, anizotropnye metriki i vyrozhdaiushchiesya kvazikonformnye otobrazheniya* [Functions of Sobolev Weight Classes, Anisotropic Metrics, and Degenerate Quasiconformal Mappings]. Volgograd, Izd-vo VolGU, 2010. 304 p.

61. Mikhaylenko V.E., Kovalev S.N. *Konstruirovaniye form sovremennykh arkhitekturnykh sooruzheniy* [Designing Forms of Modern Architectural Structures]. Kiev, Budivelnik Publ., 1978. 138 p.

62. Tkachev V.G. Minimalnye trubki s konechnoy polnoy kriviznoy [Minimum Tubes with Finite Total Curvature]. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* [Siberian Mathematical Journal], 1998, vol. 39, no. 1, pp. 181-190. DOI: 10.1007%2FBF02732370.

63. Tkachev V.G. Nekotorye otsenki sredney krivizny grafikov nad oblastyami v  $R^n$  [Some Estimates of the Average Curvature of Graphs over Regions in  $R^n$ ]. *Doklady AN SSSR* [Soviet Mathematics], 1990, vol. 314, no. 1, pp. 140-143.

64. Klyachin V.A., Miklyukov V.M. Geometrical Structure of Tubes and Bands of Zero Mean Curvature in Minkowski Space. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Mathematica*, 2003, no. 28, pp. 239-270.

65. Klyachin V.A. Approximation of the Gradient of a Function on the Basis of a Special Class of Triangulations. *Izvestiya: Mathematics*, 2018, vol. 82, no. 6, pp. 65-77.

66. Korolkov S., Korolkova E., Svetlov A. On Solvability of Boundary Value Problems

for Solutions of the Stationary Schrodinger Equation on Unbounded Domains of Riemannian Manifolds. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2014, vol. 97, no. 2, pp. 231-240.

67. Tkachev V.G. Minimal Tube and Coefficients of Holomorphic Functions. *Bull. de la Soc. Sci. de Lodz*, 2018, no. XX, pp. 19-26.

## **RESEARCH IN THE FIELD OF GEOMETRIC ANALYSIS AT VOLGOGRAD STATE UNIVERSITY**

### **Aleksey A. Klyachin**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,  
Head of the Department of Mathematical Analysis and Function Theory,  
Volgograd State University  
klyachin-aa@yandex.ru, matf@volsu.ru  
<https://orcid.org/0000-0003-3293-9066>  
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

### **Vladimir A. Klyachin**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,  
Head of the Department of Computer Sciences and Experimental Mathematics,  
Volgograd State University  
klehmv@mail.ru, klyachin.va@volsu.ru  
<https://orcid.org/0000-0003-1922-7849>  
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

**Abstract.** This article discusses the main directions of research in geometric analysis, which were conducted and are being carried out by the scientific mathematical school of Volgograd State University. The results of the founder of the scientific school, Doctor of Physics and Mathematics, Professor Vladimir Mikhailovich Miklyukov and his students are summarized. These results concern the solution of a number of problems in the field of quasiconformal flat mappings and mappings with bounded distortion of surfaces and Riemannian manifolds, the theory of minimal surfaces and surfaces of prescribed mean curvature, surfaces of zero mean curvature in Lorentz spaces, as well as problems associated with the study of the stability of such surfaces. In addition, the results of the study of various classes of triangulations — an object that appears at the junction of research in the field of geometric analysis and computational mathematics — are noted. Besides, this review discusses papers that use the Fourier decomposition method for solutions of the Laplace — Beltrami equations and the stationary Schrödinger equation with respect to the eigenfunctions of the corresponding boundary value problems. In particular, the authors give the results on finding capacitive characteristics that allowed for the first time to formulate and prove the criteria for the fulfillment of various theorems of Liouville type and the solvability of boundary value problems on model and quasimodel Riemannian manifolds. The role of the equivalent function method is also indicated in the study of such problems on manifolds of a fairly general form.

In addition to this, the article gives an overview of the results concerning estimates of calculating error integral functionals and convergence of piecewise polynomial solutions of nonlinear variational type equations: minimal surface equations, equilibrium equations capillary surface and equations of biharmonic functions.

**Key words:** geometric analysis, minimal surfaces, capacity, triangulation, harmonic functions, integral functional.