www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2020.4.1

УДК 517.9
ББК 22.162.0

Дата поступления статьи: 04.08.2020
Дата принятия статьи: 17.11.2020

О СХОДИМОСТИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ОБЛАСТЯХ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ВНУТРЕННЕГО КОНУСА

Ирина Владимировна Трухляева

Старший преподаватель кафедры математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
i.v.truhlyaeva@volsu.ru, matf@volsu.ru
https://orcid.org/0000-0002-8764-6132
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В статье исследуется задача о сходимости приближенных полиномиальных решений уравнения минимальной поверхности. Ранее была доказана (см. работу [3]) равномерная сходимость таких решений при достаточно сильных ограничениях на границу области. Эти ограничения исключали, например, области, у которых на границе имелись угловые точки. В данной работе вводится определенная характеристика области и получены ее нижние оценки, которые позволили распространить результаты о равномерной сходимости на области, удовлетворяющие условию внутреннего конуса.

Ключевые слова: уравнение минимальной поверхности, равномерная сходимость, приближенное решение, аппроксимация уравнения, оценка равномерной сходимости.

Введение

В данной работе рассматривается вопрос о равномерной сходимости приближенных полиномиальных решений уравнения минимальной поверхности. Отметим, что в совместной публикации [3] была установлена такая сходимость при условии, что определенная геометрическая характеристика $\Delta(\Omega)$ в области Ω, в которой рассматриваются решения, является положительной. В частности, области с гладкой границей удовлетворяли этому требованию. Однако данная характеристика равна нулю для достаточно широкого класса областей с кусочно-гладкой границей и имеющей достаточно «узкие» участки у границы. Например, таким участком границы является вершина конуса с углом меньше $\pi/2$. В настоящей работе нами представлен другой подход к определению величины $\Delta(\Omega)$, в терминах которой удается распространить результаты работы [3] на области, удовлетворяющей условию внутреннего конуса.

1. Постановка задачи

Мы рассматриваем вопрос о сходимости приближенных полиномиальных решений для уравнения минимальной поверхности

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f_{x_i}}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = 0 \tag{1}$$

в области Ω с краевым условием

$$f|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}, \tag{2}$$

где $\varphi \in C(\overline{\Omega})$. Вообще говоря, данная задача Дирихле для произвольной области (даже с гладкой границей) не всегда имеет решение. Например, для плоских областей необходимым и достаточным условием разрешимости задачи Дирихле для произвольной непрерывной граничной функции $\varphi(x)$ является условие выпуклости этой области. В пространстве размерности больше двух таким условием является неотрицательность средней кривизны границы области относительно внешней нормали (см., например, [5–7; 9–11]). В нашей статье мы не накладываем никаких условий на область Ω, однако предполагаем, что для данной граничной функции $\varphi(x)$ решение задачи (2)–(3) существует. Понятно, что такие функции $\varphi(x)$ имеются для произвольной области Ω.

Мы исследуем вопрос о равномерной сходимости полиномиальных приближенных решений уравнения минимальной поверхности, построенных с помощью алгебраических многочленов.

Предположим, что $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченная выпуклая область такая, что для некоторого многочлена $\psi(x_1,\ldots,x_n)$, степени не более N_0 по каждой переменной, выполнено $\psi(x_1,\ldots,x_n) = 0$ при $(x_1,\ldots,x_n) \in \partial\Omega$ и $\psi(x_1,\ldots,x_n) > 0$ для $(x_1,\ldots,x_n) \in \Omega$. Для натурального N обозначим через L_N множество всех многочленов вида

$$v_N(x_1,\ldots,x_n) = \psi(x_1,\ldots,x_n) \times \sum_{h_1=1}^{N}\ldots\sum_{h_n=1}^{N} c_{h_1,\ldots,h_n} x_1^{h_1},\ldots,x_n^{h_n}.$$

Ясно, что $v_N(x_1,\ldots,x_n) = 0$ для $(x_1,\ldots,x_n) \in \partial\Omega$. Предположим, что $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$. Рассмотрим задачу нахождения такого многочлена v_N^*, на котором достигает своего минимума интеграл площади

$$\sigma(\varphi + v_N) = \int\limits_{\Omega} \sqrt{1+|\nabla\varphi + \nabla v_N|^2}\,dx \to \min, \quad v_N \in L_N. \tag{3}$$

Заметим, что если φ изменить внутри области, то мы получим, вообще говоря, другое решение v_N^* задачи (3). Функцию $f_N^* = \varphi + v_N^*$, $v_N^* \in L_N$, будем называть полиномиальным приближенным решением краевой задачи (2)–(3). Не трудно видеть, что для любого многочлена $v_N \in L_N$ выполнено равенство

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\langle \nabla \varphi + \nabla v_N^*, \nabla v_N \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi + \nabla v_N^*|^2}}\, dx = 0. \tag{4}$$

В работе [3] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Решение задачи* (3) *существует и единственно для фиксированной функции* φ.

Определение 1. *Функцию* $f^* = \varphi + v_N^*$, $v_N^* \in L_N$, *будем называть полиномиальным решением краевой задачи* (2)–(3), *если для любого многочлена* $v_N \in L_N$ *выполнено равенство* (4).

Далее нас будет интересовать вопрос о равномерной сходимости в области Ω последовательности полиномиальных решений $\varphi + v_N^*$ при $N \to \infty$. В первую очередь мы покажем, что при определенных условиях градиенты этих функций остаются ограниченными постоянной, независящей от N. Это свойство позволит далее получить оценку равномерной сходимости к точному решению.

2. Оценка градиента полиномиального решения

Ниже нам понадобится следующая величина

$$\lambda_N(\Omega) = \inf_P \frac{\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla P|^2\, dx\right)^{1/2}}{\sqrt{|\Omega|}\, \sup\limits_{\Omega} |\nabla P|},$$

где точная нижняя грань берется по всем многочленам степени не больше, чем N.

Пусть $f \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ — решение задачи (2)–(3). Будем ниже предполагать, что $\sup\limits_{\Omega} |\nabla f| = P_0 < +\infty$. Положим $g = f - \varphi$.

В работе [3] доказано утверждение.

Теорема 2. *Пусть* f *— решение уравнения* (3), *удовлетворяющее краевому условию* (2). *Тогда, если* $v_N^*(x_1, \ldots, x_n) \in L_N$ *— решение задачи* (3), *то выполнена оценка его градиента*

$$\sup_{\Omega} |\nabla v_N^*| \leq 1 + \sup_{\Omega} |\nabla g_N| + \frac{1 + \sqrt{3(1 + P_0^2)}}{\sqrt{|\Omega|}\, \lambda_N} \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla g - \nabla g_N|^2\, dx\right)^{1/2}, \tag{5}$$

$$g = f - \varphi,$$

и g_N *— некоторый элемент из* L_N, *построение которого будет рассмотрено позже.*

Замечание. Из теоремы 2 следует, что при $N \to \infty$ градиенты приближенных решений $\varphi + v_N^*$ будут равномерно ограничены, если таковой будет величина

$$\frac{1}{\lambda_N} \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla g - \nabla g_N|^2\, dx\right)^{1/2},$$

а также ограниченными будут градиенты функций $g_N(x_1,\ldots,x_n)$. Для выяснения этих вопросов нам нужно оценить степень приближения функции g многочленами g_N, а также выяснить, как себя ведет числовая последовательность λ_N при $N\to\infty$. Для этого нам понадобятся оценки аппроксимации функции и ее производных алгебраическими многочленами.

Пусть Ω — ограниченная область в n-мерном пространстве с границей Γ, k — натуральное число и функция $\psi((x_1,\ldots,x_n)$ удовлетворяет условиям:

1) функция ψ дифференцируема k раз и ее производные k-го порядка удовлетворяют условию Липшица;
2) $\psi(x_1,\ldots,x_n)=0$ при $(x_1,\ldots,x_n)\in\Gamma$ и $\psi(x_1,\ldots,x_n)\neq 0$ при $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n\setminus$ $\setminus\,\Gamma$;
3) $|\nabla\psi(x_1,\ldots,x_n)|>0$ при $(x_1,\ldots,x_n)\in\Gamma$.

Тогда, как доказано в статье [4], для функции $u(x_1,\ldots,x_n)$, непрерывно дифференцируемой k раз в $\overline{\Omega}$ и обращающейся в нуль на Γ, можно указать последовательность многочленов $P_N(x_1,\ldots,x_n)$ степени, не превосходящей N по каждой переменной $x_1,\ldots,x_n$, таких, что

$$||u-\psi P_N||_{C^r(\Omega)}\leq\frac{\delta_N(u)}{N^{k-r}}, r=0,1,\ldots k, \tag{6}$$

где $\delta_N(u)\to 0$ при $N\to\infty$.

Далее будем считать, что $g=f-\varphi\in C^k(\Omega)$. Теперь мы уточняем способ выбора функции g_N, полагая $g_N=\psi P_N$, где приближающий многочлен выбран для функции $g=f-\varphi$. Применяя (для $r=1$) оценки (6) для $u=f-\varphi$ в неравенстве (5), получаем

$$\sup_{\Omega}|\nabla v_N^*|\leq 1+K+P_0+\frac{2+\sqrt{3(1+P_0^2)}}{\lambda_N}\frac{\delta_N(f-\varphi)}{N^{k-1}}, \tag{7}$$

где $K=\sup_{\Omega}|\nabla\phi|$.

Из этого неравенства видно, что градиенты приближенных решений будут оставаться ограниченными постоянной, независящей от N при $N\to\infty$, если величина λ_N будет стремиться к нулю не быстрее, чем $O(1/N^{k-1})$.

В работе [3] для n-мерного куба K_a было получено следующее неравенство

$$\lambda_N(K_a)\geq\frac{1}{2^{n+1}}\frac{\sqrt{\omega_n}}{2^{n/2}N^n\sqrt[4]{n^n}}. \tag{8}$$

Введем обозначение

$$\Delta(\Omega)=\inf_{z_0\in\Omega}a(z_0),$$

где $a(z_0)$ определяется следующим образом: для любого $z_0\in\Omega$ находим максимальный куб $K(z_0)\subset\Omega$, не обязательно со сторонами, параллельными осям координат, такой, что $z_0\in K(z_0)$. Сторону этого куба обозначим $a(z_0)$.

В работе [3] было показано, что $\lambda_N=O(\frac{1}{N^n})$ при $N\to\infty$ в предположении, что $\Delta(\Omega)>0$. Очевидно, что имеются области с кусочно-гладкой границей, для которых $\Delta(\Omega)=0$.

Например, для конуса $C=\{(x,y,z):x^2+y^2<1, 0<z<A(1-\sqrt{x^2+y^2})\}$ при достаточно больших $A>0$ величина $\Delta(C)=0$.

Рассмотрим в пространстве переменных $(x_1, \ldots, x_n)$ наклонный параллелепипед R, который получен из куба K со стороной $a > 0$: $K = \{u_1, \ldots, u_n : 0 \le u_i \le a\}$ в пространстве с координатами $(u_1, \ldots, u_n)$ с помощью отображения

$$\begin{cases} x_1 = u_1 + u_2 \cos\alpha + \cdots + u_n \cos\alpha, \\ x_2 = u_2 \sin\alpha, \\ x_3 = u_3 \sin\alpha, \\ \vdots \\ x_n = u_n \sin\alpha. \end{cases}$$

Отметим, что при $\alpha \to 0$ этот параллелепипед вырождается в отрезок, расположенный на оси $Ox_1, x_1 \in [0, n \cdot a]$.

Пусть теперь $P(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлен, степень которого по каждой переменной не превосходит N.

Не трудно заметить, что $\forall\varepsilon > 0$ справедливо

$$n(P_{x_1}^2 + \ldots + P_{x_n}^2) \ge P_{u_1}^2 + \ldots + P_{u_n}^2 = P_{u_1}^2 + \sum_{i=2}^{n} (P_{x_1}\cos\alpha + P_{x_i}\sin\alpha)^2 \ge$$

$$\ge (1 + (n-1)(1-\varepsilon)\cos^2\alpha)P_{u_1}^2 + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\sin^2\alpha \sum_{i=2}^{n} P_{u_i}^2 \ge$$

$$\ge \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\sin^2\alpha}{1 + 2(n-1)\cos^2\alpha}\right\} \sum_{i=1}^{n} P_{u_i}^2.$$

Для $\varepsilon = 1 + \frac{1}{2(n-1)\cos^2\alpha}$ положим

$$\tau(\alpha) = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\sin^2\alpha}{1 + 2(n-1)\cos^2\alpha}\right\} > 0.$$

Тогда, используя (8), можем записать

$$\frac{\left(\int\limits_R (P_{x_1}^2 + \ldots + P_{x_n}^2)dx\right)^{1/2}}{\sqrt{|R|}\max\limits_R |\nabla P|} \ge$$

$$\ge \sqrt{\tau(\alpha)} \cdot \frac{\left(\int\limits_K (P_{u_1}^2 + \ldots + P_{u_n})du\right)^{1/2}}{\sqrt{n}\sqrt{|R|}\max\limits_K |\nabla_x P|} =$$

$$= \sqrt{\tau(\alpha)} \cdot \frac{\left(\int\limits_K (P_{u_1}^2 + \ldots + P_{u_n})(\sin\alpha)^{n-1})du\right)^{1/2}}{\sqrt{n}\sqrt{|K|}\max\limits_K |\nabla P|}\sqrt{\frac{|K|}{|R|}} =$$

$$= \sqrt{\tau(\alpha)} \cdot \frac{\left(\int\limits_K (P_{u_1}^2 + \ldots + P_{u_n})du\right)^{1/2}}{\sqrt{n}\sqrt{|K|}\max\limits_K |\nabla P|} \ge$$

$$\geq \frac{\sqrt{\tau(\alpha)}\sqrt{\omega_n}}{2^{n/2}N^n\sqrt[4]{n^{n+2}}}.$$

Таким образом, для параллелепипеда $R_{h,\alpha}$ со стороной $h>0$ и острым углом $\alpha \in (0,\pi/2]$ выполнено неравенство

$$\lambda_N(R_{h,\alpha}) \geq \frac{\tau(\alpha)}{2^{n+1}}\frac{\sqrt{\omega_n}}{2^{n/2}N^n\sqrt[4]{n^n}}. \tag{9}$$

Пусть теперь задана произвольная область $\Omega \in R^n$. Предположим, что найдется такое число $\alpha(\Omega) \in (0,\pi/2]$, что всякая точка z_0 области содержится в некотором параллелепипеде $R \subset \Omega$ с острым углом $\alpha(\Omega)$. При этом z_0 не обязательно должна быть его центром. Для любого $z_0 \in \Omega$ найдем максимальный по стороне $R \subset \overline{\Omega}$ такой, что $z_0 \in R$. Пусть сторона этого параллелепипеда $h(z_0) > 0$. Будем считать, что

$$H(\Omega) = \inf_{z_0 \in \Omega} h(z_0) > 0.$$

Рассуждая также, как и в [3], получим неравенство

$$\lambda_N(\Omega) \geq \frac{H(\Omega)\sqrt{\tau(\alpha)}\sqrt{\omega_n}}{2^{n/2}N^n\sqrt[4]{n^{n+2}}}.$$

Теорема 3. *Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ такова, что $H(\Omega) > 0$ и $\alpha(\Omega) > 0$. Тогда справедлива следующая оценка*

$$\lambda_N(\Omega) \geq \frac{H(\Omega)\sqrt{\tau(\alpha)}\sqrt{\omega_n}}{2^{n/2}N^n\sqrt[4]{n^{n+2}}}. \tag{10}$$

3. Оценка равномерной сходимости

Далее воспользуемся методом оценки решений из работы [2]. Пусть f — решение уравнения минимальной поверхности в области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, $f \in C^k(\overline{\Omega})$. Пусть v_N^* — решение задачи (3), для которого справедливо (4). Положим $f_N^* = \varphi + v_N^*$.

Мы будем предполагать, что

$$\sup_{\Omega} |\nabla f| = P_0 < +\infty.$$

Далее будем рассуждать так же, как и в работе [2]. Положим $f^t(x,y) = f_N^*(x,y) + t(f(x,y) - f_N^*(x,y))$ и $P_N^* = \sup_{\Omega} |\nabla f_N^*|$, $P_N = \max\{1, P_0, P_N^*\}$. Понятно, что $f^*|_{\partial\Omega} = f|_{\partial\Omega}$. Отметим, что P_N, вообще говоря, зависит от N. Однако, если предположить, что $k>2$ и для области постоянные $H(\Omega)$ и $\alpha(\Omega)$ положительны, то из неравенств (7) и (10) следует, что при $N \to \infty$ величина P_N будет оставаться ограниченной некоторой постоянной P.

В работе [3] было показано, что последовательность приближенных полиномиальных решений ${f_N}^*$ равномерно сходится в Ω к решению $f \in C^k(\overline{\Omega})$, $k \geq n+1$, уравнения (3), при условии, что $\lambda_N \geq \frac{C}{N^n}$, C — постоянная, независящая от N.

Теорема 3 утверждает, что данное условие для области Ω выполнено, если $H(\Omega) > 0$. Очевидно, что величина $H(\Omega)$ будет положительной, если к каждой точке границы $\partial\Omega$ можно коснуться изнутри некоторым конусом фиксированного размера и угла при его вершине. Поэтому, в таких областях будет иметь место равномерная сходимость ${f_N}^*$ к f.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березин, И. С. Методы вычислений / И. С. Березин, Н. П. Жидков. — М. : Физматлит, 1959. — Т. 2. — 620 с.

2. Клячин, А. А. О скорости сходимости последовательности, доставляющей минимум в вариационной задаче / А. А. Клячин // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2012. — № 1 (16). — С. 12–20.

3. Клячин, А. А. О сходимости полиномиальных приближенных решений уравнения минимальной поверхности / А. А. Клячин, И. В. Трухляева // Уфимский математический журнал. — 2016. — Т. 8, № 1. — С. 72–83.

4. Харрик, И. Ю. О приближении функций, обращающихся в нуль на границе области, функциями особого вида / И. Ю. Харрик // Математический сборник. — 1955. — Т. 37 (79), № 2. — С. 353–384.

5. Bassanezi, R. C. The Dirichlet problem for the minimal surface equation in non-regular domains / R. C. Bassanezi, U. Massari // Ann. Univ. Ferrara. — 1978. — Vol. 24. — P. 181–189.

6. Finn, R. Remarks relevant to minimal surfaces and to surfaces of constant mean curvature / R. Finn // J. d'Analyse Math. — 1965. — Vol. 14. — P. 139–160.

7. Jenkins, H. The Dirichlet problem for the minimal surface equation in higher dimension / H. Jenkins, J. Serrin // Journal für die reine und angewandte Mathematik. — 1968. — Vol. 229. — P. 170–187.

8. Jonsson, A. Triangulations of closed sets and bases in function spaces / A. Jonsson // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. — 2004. — Vol. 29, № 1. — P. 43–58.

9. Rado, T. The problem of the least area and the problem of Plateau / T. Rado // J. d'Analyse Math. Z. — 1930. — Vol. 32. — P. 763–796.

10. Serrin, J. The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables / J. Serrin // Phil. Trans. Royal Soc. London. — 1964. — Vol. 264, № 1153. — P. 313–496.

11. Stampacchia, G. On some multiple integral problems in the calculus of variations / G. Stampacchia // Comm. Pure Appl. Math. — 1963. — Vol. 16. — P. 382–422.

REFERENCES

1. Berezin I.S., Zhidkov N.P. *Metody vychisleniy* [Computing Method]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1959, vol. 2. 620 p.

2. Klyachin A.A. O skorosti skhodimosti posledovatelnosti, dostavlyayushchey minimum v variatsionnoy zadache [On Convergence Rate of Sequence Providing Minimum in Variational Problem]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [The Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2012, no. 1 (16), pp. 12-20.

3. Klyachin A.A., Trukhlyaeva I.V. O skhodimosti polinomialnykh priblizhennykh resheniy uravneniya minimalnoy poverkhnosti [On Convergence of Polynomial Solutions of Minimal Surface]. *Ufimskiy matematicheskiy zhurnal*, 2016, vol. 8, no. 1, pp. 72-83.

4. Kharrik I.Yu. O priblizhenii funktsiy, obrashchayushchikhsya v nul na granitse oblasti, funktsiyami osobogo vida [On Approximation of Functions Vanishing on the Boundary of a Region by Functions of a Special Form]. *Matematicheskiy sbornik*, 1955, vol. 37 (79), no. 2, pp. 353-384.

5. Bassanezi R.C., Massari U. The Dirichlet Problem for the Minimal Surface Equation in Non-Regular Domains. *Ann. Univ. Ferrara*, 1978, vol. 24, pp. 181-189.

6. Finn R. Remarks Relevant to Minimal Surfaces and to Surfaces of Constant Mean Curvature. *J. d'Analyse Math.*, 1965, vol. 14, pp. 139-160.

7. Jenkins H., Serrin J. The Dirichlet Problem for the Minimal Surface Equation in Higher Dimension. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1968, vol. 229, pp. 170-187.

8. Jonsson A. Triangulations of Closed Sets and Bases in Function Spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 2004, vol. 29, no. 1, pp. 43-58.

9. Rado T. The Problem of the Least Area and the Problem of Plateau. *J. d'Analyse Math. Z.*, 1930, vol. 32, pp. 763-796.

10. Serrin J. The Problem of Dirichlet for Quasilinear Elliptic Differential Equations with Many Independent Variables. *Phil. Trans. Royal Soc. London.*, 1964, vol. 264, no. 1153, pp. 313-496.

11. Stampacchia G. On Some Multiple Integral Problems in the Calculus of Variations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1963, vol. 16, pp. 382-422.

ON CONVERGENCE OF POLYNOMIAL APPROXIMATE SOLUTIONS OF MINIMAL SURFACE EQUATIONS IN DOMAINS SATISFYING THE CONE CONDITION

Irina V. Trukhlyaeva

Senior Lecturer, Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
i.v.truhlyaeva@volsu.ru, matf@volsu.ru
https://orcid.org/0000-0002-8764-6132
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. In this paper we consider the polynomial approximate solutions of the minimal surface equation. It is shown that under certain conditions on the geometric structure of the domain the absolute values of the gradients of the solutions are bounded as the degree of these polynomials increases. The obtained properties imply the uniform convergence of approximate solutions to the exact solution of the minimal surface equation. In numerical solving of boundary value problems for equations and systems of partial differential equations, a very important issue is the convergence of approximate solutions.The study of this issue is especially important for nonlinear equations since in this case there is a series of difficulties related with the impossibility of employing traditional methods and approaches used for linear equations. At present, a quite topical problem is to determine the conditions ensuring the uniform convergence of approximate solutions obtained by various methods for nonlinear equations and systems of equations of variational kind (see, for instance, [1]). For nonlinear equations it is first necessary to establish some a priori estimates of the derivatives of approximate solutions. In this paper, we gave a substantiation of the variational method of solving the minimal surface equation in the case of multidimensional space. We use the same approach that we used in [3] for a two-dimensional equation. Note that such a convergence was established in [3] under the condition that a certain geometric characteristic $\Delta(\Omega)$ in the domain Ω, in which the solutions are considered, is positive. In particular, domain with a smooth boundary satisfied this requirement. However, this characteristic is equal to zero for a fairly wide class of domains with piecewise-smooth boundaries and sufficiently "narrow" sections at the boundary. For example, such a section of the boundary is the vertex of a cone with an angle less than $\pi/2$. In this paper, we present another approach to determining the value of $\Delta(\Omega)$ in terms of which it is possible to extend the results of the work [3] in domains satisfying the cone condition.

Key words: minimal surface equation, uniform convergence, approximate solution, approximation of equations, estimation of uniform convergence.