www.volsu.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ,
ИНФОРМАТИКА И УПРАВЛЕНИЕ

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2020.4.4

УДК 519.63
ББК 22.16

Дата поступления статьи: 16.07.2020
Дата принятия статьи: 06.11.2020

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО И НЕЛОКАЛЬНЫМ ЛИНЕЙНЫМ ИСТОЧНИКОМ [1]

Аслан Мартинович Апеков

Кандидат физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник отдела вычислительных методов,
Кабардино-Балкарский научный центр РАН
aslkbsu@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0002-6269-3717
ул. Шортанова, 89а, 360000 г. Нальчик, Российская Федерация

Мурат Хамидбиевич Бештоков

Кандидат физико-математических наук, доцент,
ведущий научный сотрудник отдела вычислительных методов,
Кабардино-Балкарский научный центр РАН
beshtokov-murat@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-2968-9211
ул. Шортанова, 89а, 360000 г. Нальчик, Российская Федерация

Зарьяна Владимировна Бештокова

Младший научный сотрудник отдела вычислительных методов,
Кабардино-Балкарский научный центр РАН
zarabaeva@yandex.ru
ул. Шортанова, 89а, 360000 г. Нальчик, Российская Федерация

Замир Валериевич Шомахов

Кандидат физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник отдела вычислительных методов,
Кабардино-Балкарский научный центр РАН
shozamir@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0001-5738-2626
ул. Шортанова, 89а, 360000 г. Нальчик, Российская Федерация

Аннотация. Изучены первая и третья начально-краевые задачи для уравнения конвекции диффузии с дробной производной Капуто и нелокальным линейным источником интегрального вида. На равномерной сетке построены разностные схемы, аппроксимирующие эти задачи. Для решения этих задач в предположении существования регулярного решения получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках. Из полученных оценок следуют единственность и непрерывная зависимость решения от входных данных задачи, а также сходимость со скоростью, равной порядку погрешности аппроксимации. Построен алгоритм приближенного решения третьей краевой задачи, проведены численные расчеты тестовых примеров, иллюстрирующие полученные в работе теоретические результаты.

Ключевые слова: начально-краевые задачи, априорная оценка, уравнение конвекции-диффузии, дифференциальное уравнение дробного порядка, дробная производная Капуто.

Введение

В последние годы возрос интерес к исследованию дифференциальных уравнений дробного порядка, в которых неизвестная функция содержится под знаком производной дробного порядка. Это обусловлено как развитием самой теории дробного интегро-дифференцирования, так и приложениями таких конструкций в различных областях науки [6; 12; 13]. Интегралы и производные нецелого порядка и дробные интегро-дифференциальные уравнения находят множество применений в современных исследованиях в теоретической физике, механике и прикладной математике. Дробное математическое исчисление является мощным инструментом, который может быть использован для получения динамических моделей, в которых интегро-дифференциальные операторы по времени и координатам описывают степенную долгосрочную память и пространственную нелокальность сложных сред и процессов [6].

Настоящая работа посвящена численным методам решения краевых задач с условиями первого и третьего родов для уравнения конвекции-диффузии с дробной производной Капуто и нелокальным линейным источником интегрального вида. На равномерной сетке построены разностные схемы, аппроксимирующие эти задачи. В предположении существования регулярного решения для каждой из рассматриваемых задач с помощью метода энергетических неравенств получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках, откуда следуют единственность и непрерывная зависимость решения от входных данных задачи, а также сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью $O(h^2+\tau^2)$. Построен алгоритм приближенного решения третьей краевой задачи, проведены численные расчеты тестовых примеров, иллюстрирующие полученные в работе теоретические результаты.

Краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных с нелокальным (интегральным) источником возникают при изучении диффузии частиц в турбулентной плазме, переноса влаги в почвогрунтах, интегральный член возникает также при описании функции распределения по массам капель за счет микрофизических процессов конденсации, коагуляции, дробления и замерзания капель в конвективных облаках [2; 7; 9; 10].

Численным методам решения краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка посвящены работы [1; 3; 4; 8; 11].

1. Постановка первой краевой задачи

В прямоугольнике $\overline{Q}_T=\{(x,t):0\le x\le l,\ 0\le t\le T\}$ рассмотрим первую краевую задачу для уравнения конвекции-диффузии с дробной производной Капуто порядка α и нелокальным линейным источником

$$\partial_{0t}^{\alpha}u=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}-q(x,t)u-\int_0^x\rho(s,t)u(s,t)ds+f(x,t),$$

$$0<x<l,\ 0<t\le T, \quad (1)$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\ 0\le t\le T, \quad (2)$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ 0\le x\le l, \quad (3)$$

где

$$0<c_0\le k(x,t),r_x(x,t)\le c_1,\quad |r(x,t)|,\ |q(x,t)|,\ |\rho(x,t)|,\ |k_x(x,t)|\le c_2, \quad (4)$$

$\partial_{0t}^{\alpha}u=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t\frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau$ — дробная производная в смысле Капуто порядка α, $0<\alpha<$ <1, $c_i=\text{const}>0, i=0,1,2$.

Далее предполагается, что решение дифференциальной задачи (1)–(3) существует и обладает нужными по ходу изложения производными.

В работе будем использовать обозначения $M_i=\text{const}>0$, $i=1,2,\ldots$, которые зависят только от входных данных рассматриваемой задачи.

2. Априорная оценка в дифференциальной форме

Для получения априорной оценки решения задачи (1)–(3) в дифференциальной форме умножим уравнение (1) скалярно на u:

$$\left(\partial_{0t}^{\alpha}u,u\right)=\left(\left(ku_x\right)_x,u\right)+\left(ru_x,u\right)-\left(qu,u\right)-\left(\int_0^x\rho(s,t)u(s,t)ds,u\right)+\left(f,u\right), \quad (5)$$

где $\left(a,b\right)=\int_0^l abdx$, $\left(a,a\right)=\|a\|_0^2$, где a,b — заданные на $[0,l]$ функции.

Преобразуем интегралы, входящие в тождество (5), пользуясь неравенством Коши с ε, леммой 1 [1], получим

$$\left(\partial_{0t}^{\alpha}u,u\right)\ge\frac{1}{2}\left(1,\partial_{0t}^{\alpha}u^2\right)=\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2, \quad (6)$$

$$\Big((ku_x)_x, u\Big) = \int_0^l u\Big(ku_x\Big)_x dx = uku_x|_0^l - \int_0^l ku_x^2 dx, \tag{7}$$

$$\Big(ru_x, u\Big) = \int_0^l ru_x u dx = \frac{1}{2} ru^2|_0^l - \frac{1}{2}\int_0^l r_x u^2 dx \le \frac{1}{2} ru^2|_0^l - \frac{c_0}{2}\|u\|_0^2, \tag{8}$$

$$-\Big(\int_0^x \rho u ds, u\Big) \le \frac{1}{2}\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\bigg(1, \Big(\int_0^x \rho u ds\Big)^2\bigg) \le$$

$$\le M_1 \int_0^l \int_0^x u^2 ds dx + \frac{1}{2}\|u\|_0^2 \le M_2\|u\|_0^2. \tag{9}$$

$$-\Big(qu, u\Big) = -\int_0^l qu^2 dx \le c_2\|u\|_0^2, \tag{10}$$

$$\Big(f, u\Big) = \int_0^l fu dx \le \frac{1}{2}\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\|f\|_0^2. \tag{11}$$

Учитывая преобразования (6)–(11), из (5) находим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2 + 2c_0\|u_x\|_0^2 + c_0\|u\|_0^2 \le 2uku_x\Big|_0^l + ru^2|_0^l + M_3\|u\|_0^2 + \|f\|_0^2. \tag{12}$$

Из (12) с учетом (2) получаем

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2 + \|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 \le M_4\|u\|_0^2 + M_5\|f\|_0^2. \tag{13}$$

Применяя к обеим частям (13) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, находим

$$\|u\|_0 + D_{0t}^{-\alpha}\|u\|^2_{W_2^1(0,l)} \le M_6 D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2 + M_7\Big(D_{0t}^{-\alpha}\|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_0\Big). \tag{14}$$

На основании леммы 2 [1] из (14) находим априорную оценку

$$\|u\|_0 + D_{0t}^{-\alpha}\|u\|^2_{W_2^1(0,l)} \le M\Big(D_{0t}^{-\alpha}\|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_0\Big), \tag{15}$$

где $D_{0t}^{-\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t \frac{ud\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$ — дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка α, $0 < \alpha < 1$; $M = \mathrm{const} > 0$, зависящая только от входных данных (1)–(4).

Теорема 1. *Если* $k(x,t) \in C^{1,0}(Q_T)$, $r(x,t), q(x,t), \rho(x,t), f(x,t) \in C(Q_T)$, $u(x,t) \in C^{2,0}\big(Q_T\big) \cap C^{1,0}\big(\overline{Q}_T\big)$, $\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t) \in C(Q_T)$ *и выполнены условия (4), тогда для решения задачи (1)–(3) справедлива априорная оценка (15).*

Из оценки (15) следуют единственность и непрерывная зависимость решения задачи (1)–(3) от входных данных.

3. Устойчивость и сходимость разностной схемы

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1)–(3) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y = \varkappa_i^j\Big(a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big)_{x,i} + b_i^{-j} a_i^j y_{\bar{x},i} + b_i^{+j} a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)} - d_i^j y_i^{(\sigma)} -$$

$$- \sum_{s=0}^{i} \rho_s^j y_s^{(\sigma)} h + \varphi_i^j, \ (x,t) \in \omega_{h,\tau}, \tag{16}$$

$$y_0^{(\sigma)} = y_N^{(\sigma)} = 0, \tag{17}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \tag{18}$$

где $\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum\limits_{s=0}^{j} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} y_t^s$ — дискретный аналог дробной производной Капуто порядка α, $0 < \alpha < 1$, обеспечивающий высокий порядок точности $O(\tau^{3-\alpha})$ [8].

$$a_0^{(\alpha,\sigma)} = \sigma^{1-\alpha},\ a_l^{(\alpha,\sigma)} = \Big(l+\sigma\Big)^{1-\alpha} - \Big(l-1+\sigma\Big)^{1-\alpha},\ l \geq 1,$$

$$b_l^{(\alpha,\sigma)} = \frac{1}{2-\alpha}\Big[(l+\sigma)^{2-\alpha} - (l-1+\sigma)^{2-\alpha}\Big] - \frac{1}{2}\Big[(l+\sigma)^{1-\alpha} + (l-1+\sigma)^{1-\alpha}\Big],\ l \geq 1,$$

$$\text{при } j = 0, \quad c_0^{(\alpha,\sigma)} = a_0^{(\alpha,\sigma)};$$

$$\text{при } j > 0, \quad c_s^{(\alpha,\sigma)} = \begin{cases} a_0^{(\alpha,\sigma)} + b_1^{(\alpha,\sigma)},\ s = 0, \\ a_s^{(\alpha,\sigma)} + b_{s+1}^{(\alpha,\sigma)} - b_s^{(\alpha,\sigma)},\ 1 \leq s \leq j-1, \\ a_j^{(\alpha,\sigma)} - b_j^{(\alpha,\sigma)},\ s = j, \end{cases}$$

$$a_i^j = k\big(x_{i-0.5}, t^{j+\sigma}\big),\ b_i^j = \frac{r(x, t^{j+\sigma})}{k(x_i, t^{j+\sigma})},\ \varphi_i^j = f(x_i, t^{j+\sigma}),\ \sigma = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

$$\varkappa = \frac{1}{1+R},\ R = \frac{0.5h|r|}{k} - \text{разностное число Рейнольдса},$$

$$r_0 = r(0,t) = r_0^{(j+\sigma)} \leq 0, \quad r_N = r(l,t) = r_N^{(j+\sigma)} \geq 0,\ \rho_i^j = \rho(x_i, t^{j+\sigma}),$$

$$c_s^{(\alpha,\sigma)} > \frac{1-\alpha}{2}(s+\sigma)^{-\alpha} > 0,\ y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1-\sigma)y^j,\ d_i^j = d(x_i, t^{j+\sigma}).$$

Априорную оценку найдем методом энергетических неравенств, для этого введем скалярные произведения и норму:

$$(u,v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h,\ (u,v] = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i h,\ (u,u) = \|u\|_0^2.$$

Умножим теперь (16) скалярно на $y^{(\sigma)}$:

$$\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y, y^{(\sigma)}\Big) = \Big(\varkappa\big(a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big)_x, y^{(\sigma)}\Big) + \Big(b^- a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\Big) +$$

$$+\Big(b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\Big) - \Big(d y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\Big) - \left(\sum_{s=0}^{i} \rho_s^j y_s^{(\sigma)} h, y^{(\sigma)}\right) + \Big(\varphi, y^{(\sigma)}\Big). \tag{19}$$

Преобразуем суммы, входящие в тождество (19), с учетом (17) и леммы 1 [8]

$$\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y, y^{(\sigma)}\Big) \geq \frac{1}{2}\Big(1, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(y^2)\Big); \tag{20}$$

$$\Big(\varkappa(a y_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x, y^{(\sigma)}\Big) = \varkappa a y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}\Big|_0^N - \Big(a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\varkappa y^{(\sigma)})_{\bar{x}}\Big] = -\Big(a\varkappa_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}\Big] -$$

$$-\Big(a\varkappa^{(-1)}, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2\Big] \leq -\Big(a\varkappa_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}\Big] - \frac{1}{(1+hM_1)}\Big(a\varkappa, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2\Big]; \tag{21}$$

$$-\Big(dy^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\Big) \le c_2\|y^{(\sigma)}\|_0^2; \tag{22}$$

$$-\Big(\sum_{s=0}^{i}\rho_s^j y_s^{(\sigma)}h, y^{(\sigma)}\Big) \le \frac{1}{2}\|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \left(\frac{1}{2}, \Big(\sum_{s=0}^{i}\rho_s^j y_s^{(\sigma)}h\Big)^2\right) \le M_2\|y^{(\sigma)}\|_0^2, \tag{23}$$

$$\Big(\varphi, y^{(\sigma)}\Big) \le \frac{1}{2}\|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{1}{2}\|\varphi\|_0^2. \tag{24}$$

Принимая во внимание преобразования (20)–(24), из (19) находим

$$\Big(\frac{1}{2}, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(y^2)\Big) + \frac{1}{(1+hM_1)}\Big(a\varkappa, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2\Big] \le -\Big(a\varkappa_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\Big] + \Big(b^- a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\Big) +$$

$$+\Big(b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\Big) + M_3\|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{1}{2}\|\varphi\|_0^2. \tag{25}$$

Из (25) находим

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|y\|_0^2 + M_4\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 \le -\Big(a\varkappa_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\Big] + \Big(b^- a, y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\Big) +$$

$$+\Big(b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\Big) + M_5\|y^{(\sigma)}\|_0^2 + M_6\|\varphi\|_0^2. \tag{26}$$

Преобразуем первое, второе и третье слагаемые в правой части (26). Тогда получим

$$-\Big(a\varkappa_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\Big] + \Big(b^- a, y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\Big) + \Big(b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\Big) \le \varepsilon\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + M_7^{\varepsilon}\|y^{(\sigma)}\|_0^2. \tag{27}$$

Учитывая (27), из (26) получаем

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|y\|_0^2 + M_4\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 \le \varepsilon\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + M_8^{\varepsilon}\|y^{\sigma}\|_0^2 + M_6\|\varphi\|_0^2. \tag{28}$$

Выбирая в последнем $\varepsilon = \dfrac{M_4}{2}$, из (28) получаем

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|y\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 \le M_9\|y^{\sigma}\|_0^2 + M_{10}\|\varphi\|_0^2. \tag{29}$$

Перепишем (29) в другой форме

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|y\|_0^2 \le M_{11}^{\sigma}\|y^{j+1}\|_0^2 + M_{12}^{\sigma}\|y^{j}\|_0^2 + M_{10}\|\varphi\|_0^2. \tag{30}$$

На основании леммы 7 [3] из (30) получаем

$$\|y^{j+1}\|_0^2 \le M\left(\|y^0\|_0^2 + \max_{0\le j'\le j}\|\varphi^{j'}\|_0^2\right), \tag{31}$$

где $M = \mathrm{const} > 0$, не зависящая от h и τ.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (4), тогда существует такое* τ_0, *что если* $\tau \le \tau_0$, *то для решения разностной задачи (16)–(18) справедлива априорная оценка (31).*

Из оценки (31) следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (16)–(18) по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1)–(3), $y(x_i,t_j)=y_i^j$ — решение разностной задачи (16)–(18). Для оценки точности разностной схемы (16)–(18) рассмотрим разность $z_i^j = y_i^j - u_i^j$, где $u_i^j = u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y=z+u$ в соотношения (16)–(18), получаем задачу для функции z

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} z = \varkappa_i^j\left(a_i^j z_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_{x,i} + b_i^{-j} a_i^j z_{\bar{x},i} + b_i^{+j} a_{i+1}^j z_{x,i}^{(\sigma)} - d_i^j z_i^{(\sigma)} - \sum_{s=0}^{i} \rho_s^j z_s^{(\sigma)} h + \Psi_i^j, \tag{32}$$

$$z_0^{(\sigma)} = z_N^{(\sigma)} = 0, \tag{33}$$

$$z(x,0)=0, \tag{34}$$

где $\Psi = O\left(h^2+\tau^2\right)$ — погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1)–(3) разностной схемой (16)–(18) в классе решений $u=u(x,t)$ задачи (1)–(3).

В силу линейности (1)–(3) и (32)–(34), применяя априорную оценку (31) к решению задачи (32)–(34), получаем неравенство

$$\|z^{j+1}\|_0^2 \le M \max_{0\le j'\le j} \|\Psi^{j'}\|_0^2, \tag{35}$$

где $M=\mathrm{const}>0$, не зависящая от h и τ.

Из априорной оценки (35) следует сходимость решения разностной задачи (16)–(18) к решению дифференциальной задачи (1)–(3) в смысле нормы $\|z^{j+1}\|_0^2$ на каждом слое так, что существует такое τ_0, что при $\tau\le\tau_0$ справедлива оценка

$$\|y^{j+1}-u^{j+1}\|_0 \le M\left(h^2+\tau^2\right).$$

4. Постановка третьей краевой задачи и априорная оценка в дифференциальной форме

Рассмотрим теперь третью краевую задачу для уравнения (1)

$$\begin{cases} k(0,t)u_x(0,t) = \beta_1(t)u(0,t)-\mu_1(t), \\ -k(l,t)u_x(l,t) = \beta_2(t)u(l,t)-\mu_2(t), \end{cases} \tag{36}$$

где

$$0<c_0\le k\le c_1,\ |\beta_1,\beta_2,r,q,\rho,r_x,k_x|\le c_2. \tag{37}$$

Умножим уравнение (1) скалярно на u:

$$\left(\partial_{0t}^{\alpha}u,u\right) = \left(\left(ku_x\right)_x,u\right) + \left(ru_x,u\right) - \left(qu,u\right) - \left(\int_0^x \rho(s,t)u(s,t)ds,u\right) + \left(f,u\right). \tag{38}$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части (38)

$$\left(ru_x,u\right) = \int_0^l ruu_x dx \le \frac{c_2^2}{4\varepsilon}\int_0^l u^2dx + \varepsilon\int_0^l u_x^2 dx \le \varepsilon\|u_x\|_0^2 + \frac{c_2^2}{4\varepsilon}\|u\|_0^2. \tag{39}$$

Учитывая преобразования (7)–(11), (39), из (38) находим

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2 + c_0\|u_x\|_0^2 \le uk(x,t)u_x(x,t)\Big|_0^l + \varepsilon\|u_x\|_0^2 + M_1^{\varepsilon}\|u\|_0^2 + M_2\|f\|_0^2. \qquad (40)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (40)

$$uku_x\Big|_0^l = k(l,t)u_x(l,t)u(l,t) - k(0,t)u_x(0,t)u(0,t) = u(l,t)\Big(\mu_2(t) - \beta_2(t)u(l,t)\Big) +$$

$$+u(0,t)\Big(\mu_1(t) - \beta_1(t)u(0,t)\Big) = -\beta_2(t)u^2(l,t) + \mu_2(t)u(l,t) - \beta_1(t)u^2(0,t) + \mu_1(t)u(0,t) \le$$

$$\le M_3\Big(u^2(0,t) + u^2(l,t)\Big) + \frac{1}{2}\Big(\mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\Big) \le \varepsilon\|u_x\|_0^2 + M_4^{\varepsilon}\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\Big(\mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\Big). \qquad (41)$$

Учитывая (41), из (40) при $\varepsilon = \dfrac{c_0}{4}$ получим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 \le M_5\|u\|_0^2 + M_6\Big(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\Big). \qquad (42)$$

Применяя к обеим частям неравенства (42) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получаем

$$\|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2 \le M_5 D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2 + M_7\Big(D_{0t}^{-\alpha}\big(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\big) + \|u_0(x)\|_0^2\Big). \qquad (43)$$

На основании леммы 2 [1] из (43) находим априорную оценку

$$\|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2 \le M\Big(D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\Big) + \|u_0(x)\|_0^2\Big), \qquad (44)$$

где $M = \mathrm{const} > 0$, зависящая от входных данных задачи (1), (36), (3).

Теорема 3. *Если $k(x,t) \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $r(x,t)$, $q(x,t)$, $\rho(x,t)$, $f(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, $u(x,t) \in \in C^{2,0}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$ и выполнены условия (4), (37), тогда для решения задачи (1), (36), (3) справедлива априорная оценка (44).*

Из оценки (44) следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части.

5. Устойчивость и сходимость разностной схемы

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1), (36), (3) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y = \varkappa_i^j\Big(a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big)_{x,i} + b_i^{-j}a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} + b_i^{+j}a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)} - d_i^j y_i^{(\sigma)} - \sum_{s=0}^{i}\rho_s^j y_s^{(\sigma)}h + \varphi_i^j, \qquad (45)$$

$$\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} = \tilde{\beta}_1 y_0^{(\sigma)} + 0.5h\rho_0^j y_0^{(\sigma)} + 0.5h\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0 - 0.25h^2\rho_0^j y_0^{(\sigma)} - \tilde{\mu}_1,\ t \in \overline{\omega}_{\tau},\ x = 0, \qquad (46)$$

$$-\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} = \tilde{\beta}_2 y_N^{(\sigma)} + \sum_{s=0}^{i}\rho_s^j y_N^{(\sigma)}h + 0.5h\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N - \sum_{s=0}^{N}\rho_s^j y_s^{(\sigma)}h - \tilde{\mu}_2,\ t \in \overline{\omega}_{\tau},\ x = l, \qquad (47)$$

$$y(x,0)=u_0(x),\ x\in\overline{\omega}_h, \tag{48}$$

где

$$\tilde{\beta}_1(t_{j+\sigma})=\beta_1(t_{j+\sigma})+0.5hd_0^j,\quad \tilde{\beta}_2(t_{j+\sigma})=\beta_2(t_{j+\sigma})+0.5hd_N^j,$$
$$\tilde{\mu}_1(t_{j+\sigma})=\mu_1(t_{j+\sigma})+0.5h\varphi_0,\quad \tilde{\mu}_2(t_{j+\sigma})=\mu_2(t_{j+\sigma})+0.5h\varphi_N.$$

Перепишем (45)–(48) в операторной форме

$$\begin{cases}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y=\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}+\overline{\Phi},\\ y(x,0)=u_0(x),\ x\in\overline{\omega}_h,\end{cases} \tag{49}$$

где

$$\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}=\begin{cases}\tilde{\Lambda}y_i^{(\sigma)}=\varkappa\left(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_x+b^-ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}+b^+a^{(+1)}y_x^{(\sigma)}-dy^{(\sigma)}-\sum\limits_{s=0}^{i}\rho_s^jy_s^{(\sigma)}h,\ i=\overline{1,N-1},\\ \Lambda^-y_0^{(\sigma)}=\dfrac{\varkappa_0a_1y_{x,0}^{(\sigma)}-\tilde{\beta}_1y_0^{(\sigma)}-0.25h^2\rho_0^jy_0^{(\sigma)}}{0.5h},\ i=0,\\ \Lambda^+y_N^{(\sigma)}=\dfrac{-\varkappa_Na_Ny_{\bar{x},N}^{(\sigma)}-\tilde{\beta}_2y_N^{(\sigma)}-0.5h\sum\limits_{s=0}^{N}\rho_s^jy_s^{(\sigma)}h}{0.5h},\ i=N,\end{cases}$$

$$\overline{\Phi}=\begin{cases}\varphi=\varphi_i,\ i=\overline{1,N-1},\\ \varphi^-=\dfrac{2}{h}\tilde{\mu}_1,\ i=0,\\ \varphi^+=\dfrac{2}{h}\tilde{\mu}_2,\ i=N,\end{cases}\qquad \varkappa^*=\begin{cases}\varkappa=\dfrac{1}{1+\frac{0.5h|r|}{k}},\\ \varkappa_0=\dfrac{1}{1+\frac{0.5h|r_0|}{k_{0.5}}},\ r_0\le 0,\\ \varkappa_N=\dfrac{1}{1+\frac{0.5h|r_N|}{k_{N-0.5}}},\ r_N\ge 0,\end{cases}\qquad t^*=t^{j+1/2}.$$

Умножим (49) теперь скалярно на $y^{(\sigma)}$:

$$\left[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y,y^{(\sigma)}\right]=\left[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right]+\left[\Phi,y^{(\sigma)}\right], \tag{50}$$

где $[u,v]=\sum\limits_{i=0}^{N}u_iv_i\hbar,\quad \hbar=\begin{cases}0.5h,i=0,N,\\ h,i\ne 0,N,\end{cases}\quad [u,u]=[1,u^2]=|[u]|_0^2,\ (u,v]=\sum\limits_{i=1}^{N}u_iv_ih.$
Оценим суммы, входящие в (50):

$$\left[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y,y^{(\sigma)}\right]\ge\frac{1}{2}\left[1,\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(y^2)\right], \tag{51}$$

$$\left[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right]=\left(\tilde{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right)+0,5hy_0^{(\sigma)}\Lambda^-y_0^{(\sigma)}+0,5hy_N^{(\sigma)}\Lambda^+y_N^{(\sigma)}=$$
$$=\left(\varkappa\left(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_x,y^{(\sigma)}\right)+\left(b^-ay_{\bar{x}}^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right)+\left(b^+a^{(+1)}y_x^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right)-$$
$$-\left(dy^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right)-\left(\sum_{s=0}^{i}\rho_s^jy_s^{(\sigma)}h,y^{(\sigma)}\right)+\varkappa_0a_1y_{x,0}^{(\sigma)}y_0^{(\sigma)}-\tilde{\beta}_1\left(y_0^{(\sigma)}\right)^2-$$
$$-0,25h^2\rho_0^jy_0^{(\sigma)}-\varkappa_Na_Ny_{\bar{x},N}^{(\sigma)}y_N^{(\sigma)}-\tilde{\beta}_2\left(y_N^{(\sigma)}\right)^2-0,5h\sum_{s=0}^{N}\rho_s^jy_s^{(\sigma)}h=$$

$$= -\Big(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\varkappa y^{(\sigma)})_{\bar{x}}\Big] + \Big(b^{-}a, y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\Big) + \Big(b^{+}a^{(+1)}, y_{x}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\Big) -$$

$$-\Big(dy^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\Big) - \left[\sum_{s=0}^{i} \rho_s^j y_s^{(\sigma)} h, y^{(\sigma)}\right] - \tilde{\beta}_1 (y_0^{(\sigma)})^2 - \tilde{\beta}_2 (y_N^{(\sigma)})^2. \tag{52}$$

Преобразуем слагаемые в правой части (52)

$$-\Big(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \big(\varkappa y^{(\sigma)}\big)_{\bar{x}}\Big] + \Big(b^{-}a, y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\Big) + \Big(b^{+}a^{(+1)}, y_{x}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\Big) =$$

$$= -\Big(a\varkappa^{(-1)}, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2\Big] - \Big(a\varkappa_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\Big] + \Big(b^{-}a, y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\Big) +$$

$$+\Big(b^{+}a^{(+1)}, y_{x}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\Big) \leq -\Big(\frac{\varkappa a}{1+hM_1}, (y_{\bar{x}}^{\sigma})^2\Big] + \varepsilon \| y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + M_1^{\varepsilon} |[y^{(\sigma)}]|_0^2, \tag{53}$$

$$-\Big(dy^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\Big) - \left[\sum_{s=0}^{i} \rho_s^j y_s^{(\sigma)} h, y^{(\sigma)}\right] - \widetilde{\beta}_1 (y_0^{(\sigma)})^2 - \widetilde{\beta}_2 (y_N^{(\sigma)})^2 =$$

$$= -\Big[d, (y^{(\sigma)})^2\Big] - \beta_1 (y_0^{(\sigma)})^2 - \beta_2 (y_N^{(\sigma)})^2 - \left[\sum_{s=0}^{i} \rho_s^j y_s^{(\sigma)} h, y^{(\sigma)}\right] \leq$$

$$\leq \varepsilon \| y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + M_2^{\varepsilon} |[y^{(\sigma)}]|_0^2 + \left[1, \left(\sum_{s=0}^{i} \rho_s^j y_s^{(\sigma)} h\right)^2\right] \leq \varepsilon \| y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + M_3^{\varepsilon} |[y^{(\sigma)}]|_0^2. \tag{54}$$

Учитывая (53), (54), из (52) находим

$$\Big[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\Big] \leq -M_4 \| y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + 2\varepsilon \| y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + M_5^{\varepsilon} |[y^{(\sigma)}]|_0^2. \tag{55}$$

$$\Big[\overline{\Phi}, y^{(\sigma)}\Big] = (\varphi, y^{(\sigma)}) + 0.5 h y_0^{(\sigma)} \varphi^{-} + 0.5 h y_N^{(\sigma)} \varphi^{+} = [\varphi, y^{(\sigma)}] + \mu_1 y_0^{(\sigma)} + \mu_2 y_N^{(\sigma)} \leq$$

$$\leq \varepsilon \| y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + M_6^{\varepsilon} |[y^{(\sigma)}]|_0^2 + M_7 \Big(|[\varphi]|_0^2 + \mu_1^{j2} + \mu_2^{j2} \Big). \tag{56}$$

Принимая во внимание преобразования (51)–(56), из (50) находим

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} |[y]|_0^2 + \| y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 \leq \varepsilon M_8 \| y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + M_9^{\varepsilon} |[y^{(\sigma)}]|_0^2 + M_{10} \Big(|[\varphi]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \Big). \tag{57}$$

Из (57) при $\varepsilon = \dfrac{1}{2M_8}$ получим

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} |[y]|_0^2 + \| y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 \leq M_{11} |[y^{(\sigma)}]|_0^2 + M_{12} \Big(|[\varphi]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \Big). \tag{58}$$

На основании леммы 7 [3] из (58) находим априорную оценку

$$|[y^{j+1}]|_0^2 \leq M \left(|[y^0]|_0^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} \Big(|[\varphi^{j'}]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \Big) \right), \tag{59}$$

где $M = \mathrm{const} > 0$, не зависящая от h и τ.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия (4), (37), тогда существует такое* τ, *что если* $\tau \le \tau_0$, *то для решения разностной задачи (45), (48) справедлива априорная оценка (59).*

Из оценки (59) следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x,t)-$ решение задачи $(1),(36),(3)$, $y(x_i,t_j)=y_i^j$ — решение разностной задачи (45)–(48). Для оценки точности разностной схемы (45)–(48) рассмотрим разность $z_i^j=y_i^j-u_i^j$, где $u_i^j=u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y=z+u$ в соотношения (45)–(48), получаем задачу для функции z

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z=\varkappa_i^j\left(a_i^j z_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_{x,i}+b_i^{-j}a_i^j z_{\bar{x},i}+b_i^{+j}a_{i+1}^j z_{x,i}^{(\sigma)}-d_i^j z_i^{(\sigma)}-\sum_{s=0}^{i}\rho_s^j z_s^{(\sigma)}h+\Psi_i^j,\ (x,t)\in\omega_{h,\tau}, \tag{60}$$

$$\varkappa_0 a_1 z_{x,0}^{(\sigma)}=\tilde{\beta}_1 z_0^{(\sigma)}+0.5h\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z_0-0.25h^2\rho_0^j z_0^{(\sigma)}-\tilde{\nu}_1,\ t\in\overline{\omega}_\tau,\ x=0, \tag{61}$$

$$-\varkappa_N a_N z_{\bar{x},N}^{(\sigma)}=\tilde{\beta}_2 z_N^{(\sigma)}+0.5h\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z_N-\sum_{s=0}^{N}\rho_s^j z_s^{(\sigma)}h-\tilde{\nu}_2,\ t\in\overline{\omega}_\tau,\ x=l, \tag{62}$$

$$z(x,0)=0, \tag{63}$$

где $\Psi=O\big(h^2+\tau^2\big),\ \tilde{\nu}_1=O\big(h^2+\tau^2\big),\ \tilde{\nu}_2=O\big(h^2+\tau^2\big)$ — погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1), (36), (3) разностной схемой (45)–(48) в классе решений $u=u(x,t)$ задачи (1), (36), (3).

Применяя априорную оценку (59) к решению задачи (60)–(63), получаем неравенство

$$|[z^{j+1}]|_0^2\le M\max_{0\le j'\le j}\left(|[\Psi^{j'}]|_0^2+\nu_1^{j'2}+\nu_2^{j'2}\right), \tag{64}$$

где $M=\mathrm{const}>0$, не зависящая от h и τ.

Из априорной оценки (64) следует сходимость решения разностной задачи (45)–(48) к решению дифференциальной задачи (1), (36), (3) в смысле нормы $|[z^{j+1}]|_0^2$ на каждом слое так, что существует такое τ_0, что при $\tau\le\tau_0$ справедлива оценка

$$|[y^{j+1}-u^{j+1}]|_0\le M\left(h^2+\tau^2\right).$$

6. Алгоритм численного решения

Для численного решения (1), (36), (3) приведем разностную схему (45)–(48) к расчетному виду. Тогда уравнение (45) приводится к следующему виду

$$A_i y_{i-1}^{j+1}-C_i y_i^{j+1}+B_i y_{i+1}^{j+1}=-F_i^j,\ i=\overline{1,N-1}, \tag{65}$$

где

$$A_i=\tau\sigma\varkappa_i^j a_i^j-\tau h\sigma b_i^{-j}a_i,\quad B_i=\tau\sigma\varkappa_i^j a_{i+1}^j+\tau h\sigma b_i^{+j}a_{i+1},$$

$$C_i=A_i+B_i+h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}+\tau\sigma h^2 d_i^j,$$

$$F_i^j=AA_i y_{i-1}^j-CC_i y_i^j+BB_i y_{i+1}^j+h^2\tau\varphi_i^j-h^2\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j-1}c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}(y_i^{s+1}-y_i^s)-\sum_{s=0}^{i}\rho_s y_s^j\hbar,$$

$$AA_i = \tau(1-\sigma)\varkappa_i^j a_i^j - \tau h(1-\sigma) b_i^{-j} a_i,$$
$$BB_i = \tau(1-\sigma)\varkappa_i^j a_{i+1}^j + \tau h(1-\sigma) b_i^{+j} a_{i+1},$$
$$CC_i = AA_i + BB_i - h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + \tau(1-\sigma) h^2 d_i^j.$$

Краевое условие (46) принимает вид

$$y_0 = \varkappa_1 y_1 + \mu_1, \tag{66}$$

где

$$\varkappa_1 = \frac{\tau\sigma\varkappa_0 a_1}{\tau\sigma\varkappa_0 a_1^j + \sigma h\tau\widetilde{\beta}_1^j + 0.5h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}},$$

$$\mu_1 = \left[\widetilde{\mu}_1 h\tau - (1-\sigma)h\tau\widetilde{\beta}_1 y_0^j + \tau(1-\sigma)\varkappa_0 a_1 (y_1^j - y_0^j) + 0.5h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} y_0 - 0.25h^2 \rho_0 y_0^j - \right.$$
$$\left. -0.5h^2 \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} (y_0^{s+1} - y_0^s)\right] \Big/ \left[\tau\sigma\varkappa_0 a_1^j + \sigma h\tau\widetilde{\beta}_1^j + 0.5h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}\right].$$

Краевое условие (47) принимает вид

$$y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \mu_2, \tag{67}$$

где

$$\varkappa_2 = \frac{\tau\sigma\varkappa_N a_N}{\tau\sigma\varkappa_N a_N^j + \sigma h\tau\widetilde{\beta}_2^j + 0.5h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}},$$

$$\mu_2 = \left[\widetilde{\mu}_2 h\tau - (1-\sigma)h\tau\widetilde{\beta}_2 y_N^j - \tau(1-\sigma)\varkappa_N a_N (y_N^j - y_{N-1}^j) - \sum_{s=0}^{N} \rho_s y_s^j \hbar + 0.5h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} y_N - \right.$$
$$\left. -0.5h^2 \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} (y_N^{s+1} - y_N^s)\right] \Big/ \left[\tau\sigma\varkappa_N a_N^j + \sigma h\tau\widetilde{\beta}_2^j + \frac{h^2}{2} \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}\right].$$

Таким образом, если в (45)–(48) суммы вычислять с нижнего слоя, тогда разностная схема (45)–(48) приводится к трехдиагональной системе линейных алгебраических уравнений (65)–(67), решение которой легко находится известным методом прогонки.

7. Результаты численного эксперимента

Коэффициенты уравнения и граничных условий третьей краевой задачи (1), (36), (3) подбираются таким образом, чтобы точным решением задачи была функция $u(x,t) = t^3 e^x$.

Ниже в таблице при различных значениях параметров $\alpha = 0{,}01;\ 0{,}5;\ 0{,}99$ и уменьшении размера сетки приведены максимальное значение погрешности ($z = y - u$) и порядок сходимости (ПС) в нормах $|[\cdot]|_0$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$, где $\|y\|_{C(\bar{w}_{h\tau})} = \max\limits_{(x_i,t_j)\in\bar{w}_{h\tau}} |y|$, когда $h = \tau$. Погрешность уменьшается в соответствии с порядком аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$.

Порядок сходимости определяется по следующей формуле: ПС$=\log_{\frac{h_1}{h_2}}\dfrac{\|[z_1]|_0}{\|[z_2]|_0}$, где z_i — это погрешность, соответствующая h_i.

Изменение погрешности и порядка сходимости в нормах $\|[\cdot]|_0$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$ при уменьшении размера сетки при различных значениях $\alpha = 0,01;\ 0,5;\ 0,99$, когда $h = \tau$

α	h	$\max\limits_{0<j<m}\|[z^j]|_0$	ПС в $\|[\cdot]|_0$	$\|z\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$	ПС в $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$
0,01	1/10	0,011251484		0,014635951	
	1/20	0,002769085	2,0226	0,003672308	1,9948
	1/40	0,000686142	2,0128	0,000919450	1,9978
	1/80	0,000170728	2,0068	0,000230015	1,9990
	1/160	0,000042578	2,0035	0,000057522	1,9996
0,5	1/10	0,023164160		0,030433575	
	1/20	0,005793221	1,9995	0,007617871	1,9982
	1/40	0,001448032	2,0003	0,001902556	2,0014
	1/80	0,000362003	2,0000	0,000474990	2,0020
	1/160	0,000090513	2,0000	0,000118602	2,0018
0,99	1/10	0,030896591		0,040483502	
	1/20	0,007714381	2,0018	0,010121342	1,9999
	1/40	0,001926257	2,0018	0,002528356	2,0011
	1/80	0,000481216	2,0010	0,000631654	2,0010
	1/160	0,000120260	2,0005	0,000157832	2,0007

Замечание. Основной результат работы заключается в доказательстве априорных оценок для решения первой и третьей начально-краевых задач для уравнения конвекции диффузии с дробной производной Капуто и нелокальным линейным источником интегрального вида как в дифференциальном, так и разностном виде. Полученные неравенства означают устойчивость решения относительно входных данных. В силу линейности рассматриваемых задач эти неравенства позволяют утверждать сходимость приближенного решения к точному (в предположении существования последнего в классе достаточно гладких функций). Задачи с нелокальным источником вида (1)–(3) возникают при исследовании формирования микроструктуры конвективных облаков. В частности, при описании микрофизических процессов коагуляции (объединение мелких диспергированных частиц в большие по размеру агрегаты), взаимодействия капель и кристаллов, дробления и замерзания капель.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и ГФЕН Китая в рамках научного проекта № 20-51-53007.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алиханов, А. А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка / А. А. Алиханов // Дифференциальные уравнения. — 2010. — № 46 (5). — С. 660–666.

2. Ашабоков, Б. А. Конвективные облака: численные модели и результаты моделирования в естественных условиях и при активном воздействии / Б. А. Ашабоков, А. В. Шапавалов. — Нальчик : Изд-во КБНЦ РАН, 2008. — 252 с.

3. Бештоков, М. Х. К краевым задачам для вырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Герасимова — Капуто / М. Х. Бештоков // Известия вузов. Математика. — 2018. — № 10. — С. 3–16.

4. Бештоков, М. Х. К краевым задачам для интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка / М. Х. Бештоков, Ф. А. Эржибова // Математические труды. — 2020. — № 23 (1). — С. 16–36.

5. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. — М. : Наука, 1983. — 616 с.

6. Тарасов, В. Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка / В. Е. Тарасов. — Ижевск : Изд-во Ижев. ин-та компьютер. исследований, 2011. — 568 с.

7. Численное моделирование облаков / Е. Л. Коган, И. П. Мазин, Б. Н. Сергеев, В. И. Хворостьянов. — М. : Гидрометеоиздат, 1984. — 186 с.

8. Alikhanov, A. A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation / A. A. Alikhanov // Journal of Computational Physics. — 2015. — № 2805. — P. 424–438.

9. Berry, E. X. An analysis of gloud drop growth by collection / E. X. Berry, R. L. Reinhardt // J. Atmos. Sci. — 1974. — № 31 (7). — P. 1825–1831. — DOI: 10.1175/1520-0469(1974)031<1814:AAOCDG>2.0.CO;2.

10. Berry, E. X. Cloud droplets growth by collection / E. X. Berry // J. Atmos. Sci. — 1967. — № 24 (6). — P. 688–701.

11. Beshtokov, M. Kh. Difference Methods for Solving Local and Nonlocal Boundary Value Problems for a Loaded Fractional Order Heat Equation. / M. Kh. Beshtokov, M. Z. Khudalov // Stability, Control and Differential Games. Lecture Notes in Control and Information Sciences — Proceeding. — Cham : Springer Nature, 2020. — P. 187–201. — DOI: 10.1007/978-3-030-42831-0.

12. Miller, K. S. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations / K. S. Miller, B. Ross. — New York : Wiley, Wiley and Sons, 1993. — 376 p.

13. Oldham, K. B. The Fractional Calculus. Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order / K. B. Oldham, J. Spanier. — New York : Academic Press, 1974. — 240 p.

REFERENCES

1. Alikhanov A.A. Apriornye otsenki resheniy kraevykh zadach dlya uravneniy drobnogo poryadka [A Priori Estimates of Solutions to Boundary Value Problems for Fractional Order Equations]. *Differentsialnye uravneniya*, 2010, no. 46 (5), pp. 660-666.

2. Ashabokov B.A., Shapavalov A.V. *Konvektivnye oblaka: chislennye modeli i rezultaty modelirovaniya v estestvennykh usloviyakh i pri aktivnom vozdeystvii* [Convective Clouds: Numerical Models and Simulation Results Under Natural and Active Conditions]. Nalchik, Izd-vo KBNTs RAN, 2008. 252 p.

3. Beshtokov M.Kh. K kraevym zadacham dlya vyrozhdayushchikhsya psevdoparabolicheskikh uravneniy s drobnoy proizvodnoy Gerasimova — Kaputo [To Boundary-Value Problems for Degenerating Pseudoparabolic Equations with Gerasimov — Caputo Fractional Derivative]. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 2018, no. 10, pp. 3-16.

4. Beshtokov M.Kh., Erzhibova F.A. K kraevym zadacham dlya integro-differentsialnykh uravneniy drobnogo poryadka [To Boundary-Value Problems for Integro-Differential Equations of Fractional Order]. *Matematicheskie trudy*, 2020, no. 23 (1), pp. 16-36.

5. Samarskiy A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 616 p.

6. Tarasov V.E. *Modeli teoreticheskoy fiziki s integro-differentsirovaniem drobnogo poryadka* [Models of Theoretical Physics with Fractional Order Integro-Differentiation]. Izhevsk, Izd-vo Izhev. in-ta kompyuter. issledovaniy, 2011. 568 p.

7. Kogan E.L., Mazin I.P., Sergeev B.N., Khvorostyanov V.I. *Chislennoe modelirovanie oblakov* [Numerical Simulation of Clouds]. Moscow, Gidrometeoizdat, 1984. 186 p.

8. Alikhanov A.A. A New Difference Scheme for the Time Fractional Diffusion Equation. *Journal of Computational Physics*, 2015, no. 2805, pp. 424-438.

9. Berry E.X., Reinhardt R.L. An Analysis of Gloud Drop Growth by Collection. *J. Atmos. Sci*, 1974, no. 31 (7), pp. 1825-1831. DOI: 10.1175/1520-0469(1974)031<1814:AAOCDG>2.0.CO;2.

10. Berry E.X. Cloud Droplets Growth by Collection. *J. Atmos. Sci*, 1967, no. 24 (6), pp. 688-701.

11. Beshtokov M.Kh., Khudalov M.Z. Difference Methods for Solving Local and Nonlocal Boundary Value Problems for a Loaded Fractional Order Heat Equation. *Stability, Control and Differential Games. Lecture Notes in Control and Information Sciences — Proceeding*. Cham, Springer Nature, 2020, pp. 187-201. DOI: 10.1007/978-3-030-42831-0.

12. Miller K.S., Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. New York, Wiley, Wiley and Sons, 1993. 376 p.

13. Oldham K.B., Spanier J. *The Fractional Calculus. Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. New York, Academic Press, 1974. 240 p.

ON THE NUMERICAL SOLUTION OF INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE CONVECTION-DIFFUSION EQUATION WITH A FRACTIONAL CAPUTO DERIVATIVE AND A NONLOCAL LINEAR SOURCE

Aslan M. Apekov

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher,
Department of Computational Methods,
Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS
aslkbsu@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0002-6269-3717
Shortanova St, 89A, 360000 Nalchik, Russian Federation

Murat Kh. Beshtokov

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Leading Researcher, Department of Computational Methods,
Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS
beshtokov-murat@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-2968-9211
Shortanova St, 89A, 360000 Nalchik, Russian Federation

Zaryana V. Beshtokova

Junior Researcher, Department of Computational Methods,
Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS
zarabaeva@yandex.ru
Shortanova St, 89A, 360000 Nalchik, Russian Federation

Zamir V. Shomakhov

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher,
Department of Computational Methods,
Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS
shozamir@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0001-5738-2626
Shortanova St, 89A, 360000 Nalchik, Russian Federation

Abstract. In a rectangular domain the first and third initial-boundary value problems are studied for the one-dimensional with respect to the spatial variable convection-diffusion equation with a fractional Caputo derivative and a nonlocal linear source of integral form. Using the method of energy inequalities, under the assumption of the existence of a regular solution, a priori estimates are obtained in differential form, which implies the uniqueness and continuous dependence of the solution on the input data of the problem. On a uniform grid, two difference schemes are constructed that approximate the first and third initial-boundary value problems, respectively. For the solution of the difference problems, a priori estimates are obtained in the difference interpretation. The obtained estimates in difference form imply uniqueness and stability, as well as convergence at a rate equal to the order of the approximation error. An algorithm for the approximate solution of the third boundary value problem is constructed, numerical calculations of test examples are carried out, illustrating the theoretical results obtained in this work.

Key words: initial boundary value problems, a priori estimation, convection-diffusion equation, fractional order differential equation, fractional Caputo derivative.