DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2020.3.7

УДК 517.9
ББК 22.161

Дата поступления статьи: 28.03.2020
Дата принятия статьи: 01.09.2020

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ [1]

Александр Николаевич Шелковой

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики
и физико-математического моделирования,
Воронежский государственный технический университет
shelkovoj.aleksandr@mail.ru
просп.Московский, 14, 394026 г. Воронеж, Российская Федерация

Аннотация. В работе исследуются спектральные свойства интегро-дифференциального оператора второго порядка с вырожденным ядром методом подобных операторов. Получены результаты об асимптотике спектра и сходимости спектральных разложений интегро-дифференциального оператора.

Ключевые слова: собственные значения, спектр оператора, интегро-дифференциальный оператор второго порядка, асимптотика спектра, метод подобных операторов.

Введение. Основные понятия метода подобных операторов

Пусть $L_2[0,1]$ — гильбертово пространство комплексных измеримых (классов) функций, суммируемых с квадратом модуля и со скалярным произведением вида $(x,y) = \int\limits_0^1 x(\tau)\overline{y(\tau)}d\tau$. Через $W_2^2[0,1]$ обозначим пространство Соболева

$$W_2^2[0,1] = \{x \in L_2[0,1] : x' \text{ абсолютно непрерывна}, \ x'' \in L_2[0,1]\}.$$

Рассматривается оператор $\mathcal{L}\colon D(\mathcal{L}) \subset L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, задаваемый интегро-дифференциальным выражением вида

$$(\mathcal{L}x)(t) = -\ddot{x}(t) - \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)ds \qquad (1)$$

с областью определения $D(\mathcal{L}) = \{x \in W_2^2[0,1],\ x(0) = x(1) = 0\}$ и краевыми условиями

$$x(0) = x(1) = 0. \tag{2}$$

Представим его в виде $A - B$, где $B, A\colon D(\mathcal{L}) \subset L_2[0,1] \to L_2[0,1]$,

$$Ax = -\ddot{x}(t),$$

$$(Bx)(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds. \tag{3}$$

Оператор A будем считать невозмущенным оператором, B — возмущением, которое представляет собой интегральный оператор с вырожденным ядром

$$K(t,s) = \sum_{i=1}^{k} p_i(t)q_i(s),\ p_i, q_i \in L_2[0,1].$$

Основные результаты статьи (теорема 3) связаны с изучением спектральных свойств оператора $\mathcal{L}$, заданного формулами (1), (2).

В настоящей статье для исследования спектральных свойств оператора $\mathcal{L}$ применяется вариант метода подобных операторов, адаптированный для операторов рассматриваемого класса и позволяющий получить оценку сходимости спектральных разложений рассматриваемого оператора.

Метод подобных операторов берет свое начало с метода Пуанкаре нормальных форм для обыкновенных дифференциальных уравнений и тесно связан с методом А.М. Ляпунова кинематического подобия дифференциальных операторов [11], абстрактным вариантом замены Крылова — Боголюбова [2; 4]. Основная идея метода подобных операторов состоит в преобразовании исследуемого оператора $A - B$ к другому, подобному ему оператору $A - B_0$, где B_0 имеет несложную по отношению к A структуру.

Впервые метод подобных операторов был изложен К.О. Фридрихсом [15] для возмущенных самосопряженных операторов с абсолютно непрерывным спектром. Р. Тернером [20] для возмущенных нормальных вполне непрерывных операторов были получены теоремы о возможности их преобразования к диагональному оператору в базисе невозмущенного оператора. Дальнейшее свое развитие метод подобных операторов получил в работах А.Г. Баскакова [2–6], который стал использовать технику абстрактного гармонического анализа линейных операторов, и его учеников [9; 13; 14; 16–19]. Отметим, что в настоящее время метод подобных операторов постоянно развивается и адаптируется к различным классам операторов. Поэтому изложения метода, например, в [4] и в [8] отличаются.

В изложении метода подобных операторов будем придерживаться аксиоматического подхода, как в работах [3–7], опираясь в основном на работу [7]. Отметим также работы [8; 9; 13; 14; 16–19], в которых с помощью метода подобных операторов исследуются спектральные характеристики различных операторов.

Пусть H — бесконечномерное комплексное сепарабельное гильбертово пространство, а $End\ H$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в H, $\|X\|_\infty = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|Xx\|$ — норма оператора в $End\ H$.

Определение 1 ([6]). *Два оператора $A_i\colon D(A_i) \subset H \to H,\ i = 1,2$, называются подобными, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in End\ H$ $(U^{-1} \in End\ H)$, такой, что $UD(A_2) = D(A_1)$, и выполняется равенство $A_1Ux = UA_2x,\ x \in D(A_2)$. Оператор U называется оператором преобразования подобия оператора A_1 в A_2.*

Определение 2 ([7]). *Линейный оператор $C\colon D(C) \subset H \to H$ называется подчиненным оператору $A\colon D(A) \subset H \to H$, то есть $C \in \mathcal{L}_A(H)$, если выполнены следующие два условия:*

1) $D(C) \supseteq D(A)$;

2) существует постоянная $M > 0$ такая, что конечна величина

$$\|C\|_A = \inf\{M : \|Cx\| \leq M(\|Ax\| + \|x\|),\ x \in D(A)\},$$

принимаемая за норму в $\mathcal{L}_A(H)$.

Определяющим понятием метода подобных операторов является понятие допустимой тройки для невозмущенного оператора A.

Определение 3 ([7]). *Тройка $(\mathcal{U}, J, \Gamma)$, $J\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, $\Gamma\colon \mathcal{U} \to End\ H$, называется допустимой для оператора A, а $\mathcal{U}$ — допустимым пространством возмущений, если:*

1) *$\mathcal{U}$ — банахово пространство (со своей нормой $\|\cdot\|_*$), непрерывно вложенное в банахово пространство $\mathcal{L}_A(H)$, то есть существует постоянная $M_0 > 0$ такая, что $\|B\|_A \leq M_0\|B\|_*$ для любого оператора $B \in \mathcal{U}$;*
2) *J, Γ — трансформаторы (то есть линейные операторы, действующие в пространстве линейных операторов);*
3) *$(\Gamma X)x \in D(A)$ для любых $x \in D(A)$ и имеет место равенство:*

$$A\Gamma X - (\Gamma X)A = X - JX,\ X \in \mathcal{U},$$

(равенство понимается как равенство элементов из $\mathcal{U}$);

4) *$X\Gamma Y$, $(\Gamma Y)X \in \mathcal{U},\ X, Y \in \mathcal{U}$, и существуют постоянные $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ такие, что $\|\Gamma\| \leq \gamma_1$ и $\max\{\|X\Gamma Y\|_*, \|(\Gamma Y)X\|_*\} \leq \gamma_2\|X\|_*\|Y\|_*$;*
5) *выполнено одно из условий:*

   а) $\operatorname{Im}\Gamma X \subset D(A)$, где $\operatorname{Im}\Gamma X$ — образ оператора ΓX, и $A\Gamma X \in End\ H$;

   б) для любого $X \in \mathcal{U}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\nu_\varepsilon \in \rho(A)(\rho(A)$ — резольвентное множество оператора $A)$ такое, что

$$\|XR(\nu_\varepsilon, A)\|_\infty < \varepsilon, \quad R(\nu_\varepsilon, A) = (A - \nu_\varepsilon I)^{-1},$$

   где I — тождественный оператор.

Пусть $A\colon D(A) \subset H \to H$ — нормальный оператор (см., например, [12, гл. 10, с. 39]) (частный случай нормального — самосопряженный оператор), то есть $D(A) = D(A^*)$, $\|Ax\| = \|A^*x\|$, $x \in D(A)$, спектр которого представим в виде: $\sigma(A) = \bigcup\limits_{j\geq 1} \sigma_j$, $0 \notin \sigma(A)$, где σ_j, $j \geq 1$, — взаимно непересекающиеся компактные множества, такие, что $\operatorname{dist}(0, \sigma_1) < \operatorname{dist}(0, \sigma_2) < \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{dist}(0, \sigma_n) = \infty$. Обозначим P_j, $j \geq 1$, — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству σ_j, $A_j = AP_j$, $j = 1, 2, \ldots$, $A_j \in End\ H, |\sigma_j| = \sup\limits_{\lambda\in\sigma_j} |\lambda|$. Введем двусторонний идеал $\sigma_2(H)$

операторов Гильберта — Шмидта, действующих в гильбертовом пространстве H, из алгебры $End\ H$ с нормой $\|\cdot\|_2$) (см. [10, гл. 3, § 9]). В качестве пространства возмущений $\mathcal{U}$ рассматривается оператор $B\colon D(A)\subset H\to H$, допускающий представление $B=B_0A,\ B_0\in\sigma_2(H)$, причем существуют две ненулевые последовательности $\{\alpha_i\}_1^\infty, \{\beta_j\}_1^\infty$, такие, что имеют место оценки: $\|P_iB_0P_j\| \ \le\ c\cdot\alpha_i\cdot\beta_j,\ i,j=1,2,\ldots,$ для некоторой постоянной $c>0$. Наименьшая из констант, удовлетворяющих этому неравенству, определяет норму в $\mathcal{U}$. Пусть n — некоторое натуральное число, положим $\Delta_n=\bigcup\limits_{k=1}^{n}\sigma_k,\ P(\Delta_n,A)$ — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству Δ_n. Обозначим $Q_1=Q_{1n}=P(\Delta_n,A)=P_1+P_2+\ldots+P_n,\ Q_2=Q_{2n}=I-Q_{1n}$. Трансформаторы $J_n\colon\mathcal{U}\to\mathcal{U}$ и $\Gamma_n\colon\mathcal{U}\to\sigma_2(H),\ n\ge1$, определяются следующим образом: $J_nX=Q_1XQ_1+Q_2XQ_2,\ \ \Gamma_nX=\Gamma_n^{(1)}X+\Gamma_n^{(2)}X$, где

$$\Gamma_n^{(1)}X=\sum_{m\ge n+1}\sum_{k=1}^{n}\Gamma_n(P_mX_0AP_k),\quad \Gamma_n^{(2)}X=\sum_{m=1}^{n}\sum_{k\ge n+1}\Gamma_n(P_mX_0AP_k).$$

На операторных блоках $P_mX_0P_kA$ трансформатор Γ_n определяется как решение уравнения $AP_mY_{0mk}-Y_{0mk}AP_k=P_mX_0P_k$, удовлетворяющее условию $P_mY_{0mk}P_k=Y_{0mk}$, где $k\ge n+1,\ m\le n$ либо $k\le n,\ m\ge n+1$. Для всех остальных значений m и k полагается $\Gamma_n(P_mX_0P_kA)=0$.

Основные результаты статьи получены с использованием следующих утверждений.

Теорема 1 ([14]). *Пусть n — натуральное число, такое, что*

$$\gamma_1(n)=\left(\sum_{m=1}^{n}\sum_{k\ge n+1}\frac{|\sigma_k|^2\beta_k^2\alpha_m^2+\beta_m^2\alpha_k^2|\sigma_m|^2}{(\mathrm{dist}(\sigma_m,\sigma_k))^2}\right)^{1/2}<\infty,$$

$$\gamma_2(n)=\max\left\{\max_{j\le n}\left\{\sum_{k\ge n+1}\frac{|\sigma_k|\alpha_k\beta_k}{\mathrm{dist}(\sigma_j,\sigma_k)}\right\},\ \sup_{j\ge n+1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{|\sigma_k|\alpha_k\beta_k}{\mathrm{dist}(\sigma_j,\sigma_k)}\right\}\right\}<\infty,$$

причем выполнено условие: $2\max\{\gamma_1(n),\gamma_2(n)\}+\gamma_1(n)+\gamma_2(n)<1$. *Тогда оператор $A-B$ подобен оператору $A-J_nX^*(n)$, где $X^*(n)\in\mathcal{U}$ имеет вид*

$$X^*(n)=X_{11}^*(n)+X_{12}^*(n)+X_{21}^*(n)+X_{22}^*(n); \tag{4}$$

$X_{ij}^*(n)=Q_iX^*(n)Q_j,\ i,j=1,2,$ *есть решение системы уравнений*

$$\begin{cases}X_{ii}=B_{ij}\Gamma X_{ji}+B_{ii},\ (i=1,j=2)\vee(i=2,j=1),\\ X_{ij}=F_{ij}(X_{ij});\end{cases}$$

оператор $F_{ij}\colon\mathcal{U}_{ij}\to\mathcal{U}_{ij}$ задается формулой

$$F_{ij}(X)=B_{ii}\Gamma X-(\Gamma X)B_{jj}-(\Gamma X)(B_{ji}\Gamma X)+B_{ij};$$

$B_{ij}=Q_iBQ_j,\ i,j=1,2,$ *— блоки оператора $B\in\mathcal{U}$, являющегося возмущением оператора A; допустимое пространство возмущений $\mathcal{U}$ является прямой суммой четырех замкнутых подпространств вида $\mathcal{U}_{ij}=\{Q_iXQ_j,\ X\in\mathcal{U}\},\ i,j=1,2$. Оператор преобразования подобия имеет вид $I+\Gamma_nX^*(n)$.*

Теорема 2 ([14]). *Пусть операторы A и $B \in \mathcal{U}$ таковы, что $\gamma_1(n) \to 0$, $\gamma_2(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда, начиная с некоторого n_0, оператор $A - B$ подобен оператору $A - J_n X^*(n)$, $n \geq n_0$, где $X^*(n)$ представимо в виде (4) и $\|P(\Delta_n, A) - P(\widetilde{\Delta}_n, A - B)\| \to 0$ при $n \to \infty$, причем $\widetilde{\Delta}_n = \sigma((A - J_n X^*(n)) \mid P(\Delta_n, A)H) \subset \sigma(A - B)$, где $P(\widetilde{\Delta}_n, A - B)$ — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству $\widetilde{\Delta}_n$ оператора $A - B$.*

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда*

$$\|(I - P(\widetilde{\Delta}_n, A - B))x - \sum_{i \geq n+1} P_i x\| \longrightarrow 0,$$

при $n \to \infty$ и для любого фиксированного $x \in H$.

1. Основные результаты

Перейдем к исследованию спектральных свойств оператора $\mathcal{L}\colon D(\mathcal{L}) \subset L_2[0,1] \to \to L_2[0,1]$, задаваемого выражением (1).

Подставим выражение для $K(t,s)$ в формулу (3). Получим:

$$(Bx)(t) = \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^k p_i(t) q_i(s) x(s) ds = \sum_{i=1}^k p_i(t) \int\limits_0^1 q_i(s) x(s) ds = \sum_{i=1}^k p_i(t)(x, q_i).$$

Рассматриваемый оператор A является самосопряженным положительно определенным оператором, который имеет простые собственные значения $\lambda_n = \pi^2 n^2$, $n \in \mathbb{N}$, а собственные функции, отвечающие этим собственным значениям, $e_n(t) = \sqrt{2}\sin \pi n t$, образуют ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$ (см., например, [4, с. 50]). Положим $\Delta_1(n) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $P_n = P(\Delta_1(n), A)$, $P_j = P(\lambda_j, A)$, $j = = 1, 2, \ldots,$ — проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству $\sigma_j = \{\pi^2 j^2\}$, $P_j x = (x, e_j)e_j$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2[0,1]$. Применяя метод подобных операторов для исследования спектральных свойств оператора $A - B$, получим следующие основные результаты статьи.

В следующей лемме получены оценки на последовательности $\|P_i B_0 P_j\|$, $i, j = = 0, 1, 2, \ldots,$ участвующие в формулировке теоремы 1.

Лемма 1. *Оператор $B\colon D(A) \subset L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, задаваемый соотношением (3), представим в виде $B = B_0 A$, где $B_0 \in \sigma_2(L_2[0,1])$ ($\sigma_2(L_2[0,1])$ — идеал операторов Гильберта — Шмидта, действующих в гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$), и имеют место оценки*

$$\|P_i B_0 P_j\| \leq \alpha_i \beta_j, \ i, j = 1, 2, \ldots,$$

где $\alpha_i = \frac{1}{2} \sup\limits_j \left| \sum\limits_{n=1}^k \int\limits_0^1 q_n(s) \frac{\sin \pi j s}{j} ds \cdot \int\limits_0^1 p_n(t) \sin \pi i t dt \right|$, $i = 1, 2, \ldots$; $\beta_j = \frac{1}{\pi^2 j}$, $j = 1, 2, \ldots$

Теорема 3. *Пусть для любых функций p_i, q_i, $i = \overline{1,k}$, принадлежащих гильбертову пространству $L_2[0,1]$), и для последовательностей $\gamma_1, \gamma_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, опреде-*

ленных формулами

$$\gamma_1(n) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}} \frac{n^2\left(\sup\limits_j \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} q_{ij}^{\sin} p_{im}^{\sin}}{j}\right)^2 + m^2\left(\sup\limits_j \frac{|\sum\limits_{i=1}^{k} q_{ij}^{\sin} p_{in}^{\sin}|}{j}\right)^2}{|n^2-m^2|^2}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

$$\gamma_2(n) = \frac{1}{2\pi^2}\max\left\{\frac{n\sup\limits_j \frac{|\sum\limits_{i=1}^{k} q_{ij}^{\sin} p_{in}^{\sin}|}{j}}{2n-1},\ \sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}} \frac{m\sup\limits_j \frac{|\sum\limits_{i=1}^{k} q_{ij}^{\sin} p_{im}^{\sin}|}{j}}{|n^2-m^2|}\right\} < \infty,$$

где $p_{ij}^{\sin} = 2\int\limits_0^1 p_i(t)\sin\pi jt dt$, $q_{ij}^{\sin} = 2\int\limits_0^1 q_i(t)\sin\pi js ds$ *— коэффициенты разложения функций* p_i *и* q_i *в ряд Фурье по синусам; выполнены условия* $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_1(n) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_2(n) = 0$. *Тогда спектр* $\sigma(A-B)$ *оператора* $A-B$ *представим в виде* $\sigma(A-B) = \widetilde{\sigma}_m \bigcup \left(\bigcup\limits_{n\geq m+1} \widetilde{\sigma}_n\right)$, *где* $\widetilde{\sigma}_n$, $n \geq m+1$ *— одноточечные множества, а* $\widetilde{\sigma}_m$ *— конечное множество с числом точек, не превосходящим* m. *При этом для собственных значений* $\widetilde{\lambda}_n$ *и собственных функций* $\widetilde{e}_n$ *оператора (1) имеют место оценки:*

$$\left|\widetilde{\lambda}_n - \pi^2 n^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} q_{in}^{\sin} p_{in}^{\sin} + \frac{1}{4\pi^2}\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}} \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} q_{in}^{\sin} p_{im}^{\sin} \sum\limits_{i=1}^{k} q_{im}^{\sin} p_{in}^{\sin}}{n^2-m^2}\right| \leq$$

$$\leq \ \mathrm{const}\cdot n\cdot \sup_j \left|\sum_{i=1}^{k} \frac{q_{ij}^{\sin}}{j} p_{in}^{\sin}\right| \cdot \gamma_2(n);$$

$$\left(\int\limits_0^1 \left|\widetilde{e}_n(t) - \sqrt{2}\sin\pi nt + \frac{\sqrt{2}}{2\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} q_{in}^{\sin} p_{im}^{\sin}}{n^2-m^2}\sin\pi mt\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \ \mathrm{const}\cdot n\cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\sup\limits_j \left|\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{q_{ij}^{\sin}}{j} p_{in}^{\sin}\right|\right)^2}{|n^2-m^2|^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Доказательство основных результатов

Доказательство леммы 1. Покажем, что оператор B представим в виде $Bx = B_0Ax$. Действительно, $Bx = BIx = BA^{-1}Ax = B_0Ax$, где $B_0 = BA^{-1}$.

Докажем, что $\|P_iB_0P_j\| \leq \alpha_i\beta_j$, $i,j = 1,2,\dots$, для введенных последовательностей α_i, β_j. Так как

$$P_iB_0P_jx = (B_0P_jx, e_i)e_i = (B_0(x,e_j)e_j, e_i)e_i = (x,e_j)(B_0e_j,e_i)e_i =$$

$$= (x, e_j)(BA^{-1}e_j, e_i)e_i = (x, e_j)(B\frac{1}{\lambda_j}e_j, e_i)e_i = \frac{1}{\lambda_j}(x, e_j)(Be_j, e_i)e_i,$$

то

$$\|P_iB_0P_j\| \leq \frac{|(Be_j, e_i)|}{\lambda_j} = \frac{j}{\lambda_j}\cdot\frac{|(Be_j, e_i)|}{j} = \frac{j}{\pi^2 j^2}\cdot\frac{|(Be_j, e_i)|}{j} = \frac{1}{\pi^2 j}\cdot\frac{|(Be_j, e_i)|}{j} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi^2 j}\cdot\sup_j\frac{|(Be_j, e_i)|}{j}.$$

Ясно, что последовательность $\{\beta_j\} = \left\{\frac{1}{\pi^2 j}\right\}$, $j \geq 1$, принадлежит l_2. Докажем, что и последовательность $\{\alpha_i\} = \{\sup\limits_j \frac{|(Be_j, e_i)|}{j}\}$ также суммируема с квадратом.

Вычислим $|(Be_j, e_i)|$.

$$|(Be_j, e_i)| = \left|\left(\sum_{n=1}^{k} p_n(t)\int_0^1 q_n(s)e_j(s)ds\right)\cdot e_i(t)dt\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{k}\int_0^1 p_n(t)\cdot\left(\int_0^1 q_n(s)\sqrt{2}\sin\pi jsds\right)\cdot\sqrt{2}\sin\pi itdt\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{k}\int_0^1 \sqrt{2}q_n(s)\sin\pi jsds\cdot\int_0^1\sqrt{2}p_n(t)\sin\pi itdt\right| = \frac{1}{2}\left|\sum_{n=1}^{k} q_{nj}^{\sin}\cdot p_{ni}^{\sin}\right|.$$

Следовательно, имеет место представление последовательности $\{\alpha_i\}$:

$$\alpha_i = \sup_j\frac{\frac{1}{2}\left|\sum\limits_{n=1}^{k} q_{nj}^{\sin}\cdot p_{ni}^{\sin}\right|}{j} = \frac{1}{2}\sup_j\frac{\left|\sum\limits_{n=1}^{k}\int\limits_0^1 q_n(s)\sin\pi jsds\cdot\int\limits_0^1 p_n(t)\sin\pi itdt\right|}{j} =$$

$$= \frac{1}{2}\sup_j\left|\sum_{n=1}^{k}\int_0^1 q_n(s)\frac{\sin\pi js}{j}ds\cdot\int_0^1 p_n(t)\sin\pi itdt\right|.$$

Таким образом, $\alpha_i = \frac{1}{2}\sup\limits_j\left|\sum\limits_{n=1}^{k}\int\limits_0^1 q_n(s)\frac{\sin\pi js}{j}ds\cdot\int\limits_0^1 p_n(t)\sin\pi itdt\right|$. В силу неравенства Коши — Буняковского

$$\left|\sum_{n=1}^{k}\frac{q_{nj}^{\sin}}{j}\cdot p_{ni}^{\sin}\right| \leq \left(\sum_{n=1}^{k}\frac{|q_{nj}^{\sin}|^2}{j^2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}|p_{ni}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sup_j\left|\sum_{n=1}^{k}\int_0^1 q_n(s)\frac{\sin\pi js}{j}ds\cdot\int_0^1 p_n(t)\sin\pi itdt\right|\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sup_j\left|\sum_{n=1}^{k}\frac{q_{nj}^{\sin}}{j}\cdot p_{ni}^{\sin}\right|\right)^2 \le \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sup_j\sum_{n=1}^{k}\frac{|q_{nj}^{\sin}|^2}{j^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}|p_{ni}^{\sin}|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sup_j\sum_{n=1}^{k}|p_{ni}^{\sin}|^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|q_{nj}^{\sin}|^2}{j^2}\right) < \infty.$$

Так как числа $p_{ni}^{\sin} = 2\int\limits_0^1 p_n(t)\sin\pi itdt$ и $q_{nj}^{\sin} = 2\int\limits_0^1 q_n(s)\sin\pi jsds$ являются коэффициентами Фурье для функции a_0, а числа a_1^0, $a_{1i}^{\sin}$, $a_{1i}^{\cos}$ — коэффициентами Фурье функций p_n и q_n, $n=\overline{1,k}$, по системе $(e_1, e_2, \ldots)$ собственных функций оператора A, следовательно, $\{\alpha_i\}\in l_2$, то есть оператор B_0 — оператор Гильберта — Шмидта. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Как показано в работе [14, теорема 2.1.2, с. 60], при выполнении условий $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_1(n) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_2(n) = 0$ для собственных значений $\widetilde{\lambda}_n$ и собственных функций $\widetilde{e}_n(t)$ оператора $A - B$ справедливы оценки:

$$\left|\widetilde{\lambda}_n - \lambda_n - (Be_n, e_n) + \sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{\infty}\frac{(Be_n, e_m)(Be_m, e_n)}{\lambda_n - \lambda_m}\right| \le \frac{\lambda_n\gamma_2(n)\alpha_n\beta_n}{\sqrt{D(n)}}, \tag{5}$$

$$\left\|\widetilde{e}_n - e_n + (Be_n, e_n) + \sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{\infty}\frac{(Be_n, e_m)}{\lambda_n - \lambda_m}e_m\right\| \le \frac{\left(\sum\limits_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{\infty}\frac{\alpha_m^2}{|\lambda_n-\lambda_m|^2}\right)^{\frac{1}{2}}\lambda_n\beta_n}{\sqrt{D(n)}}, \tag{6}$$

где $D(n) = (1-\gamma_1(n)-\gamma_2(n))^2 - 4\gamma_1(n)\gamma_2(n)$, λ_n и $e_n(t)$ — соответственно собственные значения и собственные функции невозмущенного оператора A.

В правые части этих оценок входит величина $\frac{1}{\sqrt{D(n)}}$. Оценим ее.

$$\sqrt{D(n)} = \sqrt{(1-\gamma_1(n)-\gamma_2(n))^2 - 4\gamma_1(n)\gamma_2(n)} =$$

$$= \sqrt{(1+(\gamma_1(n)-\gamma_2(n))^2 - 2\gamma_1(n) - 2\gamma_2(n)} \ge \sqrt{(1-2\gamma_1(n)-2\gamma_2(n)}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_1(n) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_2(n) = 0$, то можно указать константу, ограничивающую сверху $\frac{1}{\sqrt{D(n)}}$.

Выпишем входящие в оценки (5) и (6) величины α_n, β_n, λ_n, (Be_n, e_m):

$$\alpha_n = \frac{1}{2}\sup_j\left|\sum_{i=1}^{k}\int\limits_0^1 q_i(s)\frac{\sin\pi js}{j}ds\cdot\int\limits_0^1 p_i(t)\sin\pi ntdt\right| = \frac{1}{2}\sup_j\left|\sum_{i=1}^{k}\frac{q_{ij}^{\sin}}{j}p_{in}^{\sin}\right|;$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi^2 n};\ \lambda_n = \pi^2 n^2;$$

$$(Be_n, e_m) = 2\sum_{i=1}^{k}\int\limits_0^1 q_i(s)\sin\pi nsds\cdot\int\limits_0^1 p_i(t)\sin\pi mtdt = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}q_{in}^{\sin}p_{im}^{\sin}.$$

Подставим все эти величины в оценку (5). Получим:

$$\left|\widetilde{\lambda}_n - \pi^2 n^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} q_{in}^{\sin} p_{in}^{\sin} + \sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{k} q_{in}^{\sin} p_{im}^{\sin} \cdot \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{k} q_{im}^{\sin} p_{in}^{\sin}}{\pi^2(n^2-m^2)}\right| =$$

$$= \left|\widetilde{\lambda}_n - \pi^2 n^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} q_{in}^{\sin} p_{in}^{\sin} + \frac{1}{4\pi^2}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} q_{in}^{\sin} p_{im}^{\sin} \sum\limits_{i=1}^{k} q_{im}^{\sin} p_{in}^{\sin}}{n^2-m^2}\right| \le$$

$$\le \frac{\pi^2 n^2 \gamma_2(n) \cdot \frac{1}{2}\sup\limits_{j}\left|\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{q_{ij}^{\sin}}{j} p_{in}^{\sin}\right| \cdot \frac{1}{\pi^2 n}}{\sqrt{D(n)}} \le \ \mathrm{const} \cdot n \cdot \sup_{j}\left|\sum_{i=1}^{k} \frac{q_{ij}^{\sin}}{j} p_{in}^{\sin}\right| \cdot \gamma_2(n).$$

Оценка (6) примет вид:

$$\left\|\widetilde{e}_n - \sqrt{2}\sin\pi nt + \sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{k} q_{in}^{\sin} p_{im}^{\sin}}{\pi^2(n^2-m^2)} \cdot \sqrt{2}\sin\pi mt\right\| =$$

$$= \left\|\widetilde{e}_n - \sqrt{2}\sin\pi nt + \frac{\sqrt{2}}{2\pi^2}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} q_{in}^{\sin} p_{im}^{\sin}}{n^2-m^2} \cdot \sqrt{2}\sin\pi mt\right\| \le$$

$$\le \frac{\left(\sum\limits_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{\infty} \frac{\frac{1}{4}\left(\sup\limits_{j}\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{q_{ij}^{\sin}}{j} p_{in}^{\sin}\right)^2}{\pi^4|n^2-m^2|}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \pi^2 n^2 \cdot \frac{1}{\pi^2 n}}{\sqrt{D(n)}} \le \ \mathrm{const} \cdot n \cdot \left(\sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{\infty} \frac{\left(\sup\limits_{j}\left|\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{q_{ij}^{\sin}}{j} p_{in}^{\sin}\right|\right)^2}{|n^2-m^2|^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Учитывая, что норма в выражении (6) берется в гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$, получим окончательную оценку на собственные функции оператора $A-B$:

$$\left(\int_0^1 \left|\widetilde{e}_n(t) - \sqrt{2}\sin\pi nt + \frac{\sqrt{2}}{2\pi^2}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} q_{in}^{\sin} p_{im}^{\sin}}{n^2-m^2} \cdot \sqrt{2}\sin\pi mt\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \ \mathrm{const} \cdot n \cdot \left(\sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{\infty} \frac{\left(\sup\limits_{j}\left|\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{q_{ij}^{\sin}}{j} p_{in}^{\sin}\right|\right)^2}{|n^2-m^2|^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема доказана.

Очередное утверждение, справедливое для рассматриваемого оператора (1), следует из работы [13, лемма 2].

Пусть функции $p_i,\ q_i \in L_2[0,1]$. Тогда, начиная с некоторого натурального n_0, оператор $A - B$ подобен оператору $A - J_n X^*(n), n \geq n_0$, где $X^*(n)$ представим в виде (4), и $\|P(\Delta_1(n), A) - P(\widetilde{\Delta}_1(n), A - B)\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Учитывая, что норма в последнем выражении берется в гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$, получим окончательную оценку:

$$\left(\int\limits_0^1 \left(\sum_{j=1}^n \left(\int\limits_0^1 x(s)\widetilde{e}_j(s)ds\right)\widetilde{e}_j(t) - 2\sum_{j=1}^n \left(\int\limits_0^1 x(s)\sin \pi jsds\right)\sin \pi jt\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \to 0$$

для любого фиксированного x из $L_2[0,1]$ при $n \to \infty$, где $\widetilde{e}_j$ — собственные (и, возможно, присоединенные) функции оператора $A - B$.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00732).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд, В. И. Малые знаменатели. I. Об отображении окружности на себя / В. И. Арнольд // Изв. АН СССР. Сер. Матем. — 1961. — Т. 25, № 1. — С. 21–86.

2. Баскаков, А. Г. Замена Крылова — Боголюбова в теории нелинейных возмущений линейных операторов. Препринт № 80-19 / А. Г. Баскаков. — Киев : Ин-т математики АН УССР, 1980. — 44 с.

3. Баскаков, А. Г. Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений / А. Г. Баскаков // Изв. АН СССР. Сер. Матем. — 1986. — Т. 50, № 3. — С. 435–457.

4. Баскаков, А. Г. Гармонический анализ линейных операторов / А. Г. Баскаков. — Воронеж : Изд-во ВГУ, 1987. — 165 с.

5. Баскаков, А. Г. Спектральный анализ интегро-дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями / А. Г. Баскаков, Т. К. Кацаран // Дифференциальные уравнения. — 1988. — Т. 24, № 8. — С. 1424–1433.

6. Баскаков, А. Г. Спектральные свойства относительно конечномерных возмущений спектральных операторов / А. Г. Баскаков // Изв. вузов. Матем. — 1991. — № 1. — С. 3–11.

7. Баскаков, А. Г. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом / А. Г. Баскаков, А. В. Дербушев, А. О. Щербаков // Изв. РАН. Сер. Матем. — 2011. — Т. 75, № 3. — С. 3–28. — DOI: http://dx.doi.org/10.4213/im4202.

8. Баскаков, А. Г. Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом / А. Г. Баскаков, Д. М. Поляков // Матем. сб. — 2017. — Т. 208, № 1. — С. 3–47. — DOI: http://dx.doi.org/10.4213/sm8637.

9. Гаркавенко, Г. В. Асимптотика собственных значений разностного оператора с растущим потенциалом и полугруппы операторов / Г. В. Гаркавенко, Н. Б. Ускова // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2017. — Т. 20, № 4. — С. 6–17. — DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.4.2.

10. Гохберг, И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. — М. : Наука, 1965. — 448 с.

11. Далецкий, Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. — М. : Наука, 1970. — 536 с.

12. Данфорд, Н. Линейные операторы. Т. 2: Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве / Н. Данфорд, Д. Т. Шварц. — М. : Мир, 1966. — 1063 с.

13. Ульянова, Е. Л. О спектральных свойствах относительно конечномерных возмущений самосопряженных операторов / Е. Л. Ульянова // Изв. вузов. Матем. — 1997. — № 10. — С. 75–78.

14. Ульянова, Е. Л. Спектральный анализ нормальных операторов, возмущенных относительно конечномерными: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Ульянова Елена Леонидовна. — Воронеж, 1998. — 100 с.

15. Фридрихс, К. О. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве / К. О. Фридрихс. — М. : Мир, 1969. — 232 с.

16. Шелковой, А. Н. Оценки собственных значений и собственных функций одного дифференциального оператора с нелокальными краевыми условиями / А. Н. Шелковой // Вестник факультета прикладной математики и механики. — 2000. — № 2. — С. 226–235.

17. Шелковой, А. Н. Метод подобных операторов в исследовании интегро-дифференциальных операторов с квадратично суммируемым ядром / А. Н. Шелковой // Вопросы науки. — 2016. — № 2. — С. 68–80.

18. Шелковой, А. Н. Спектральные свойства дифференциальных операторов, определяемых нелокальными краевыми условиями / А. Н. Шелковой // Вопросы науки. — 2016. — № 3. — С. 83–90.

19. Шелковой, А. Н. Спектральные свойства дифференциального оператора второго порядка, определяемого нелокальными краевыми условиями / А. Н. Шелковой // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2018. — Т. 21, № 4. — С. 18–33. — DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.4.2.

20. Turner, R. E. Perturbations of compact spectral operators / R. E. Turner // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1965. — Vol. 18. — P. 519–541.

REFERENCES

1. Arnold V.I. Malye znamenateli. I. Ob otobrazhenii okruzhnosti na sebya [Small Denominators. I. Mapping the Circle Onto Itself]. *Izv. AN SSSR. Ser. Matem.* [Mathematics of the USSR — Izvestiya], 1961, vol. 25, no. 1, pp. 21-86.

2. Baskakov A.G. *Zamena Krylova — Bogolyubova v teorii nelineynykh vozmushcheniy lineynykh operatorov. Preprint № 80-19* [Krylov — Bogolyubov Replacement in the Theory of Nonlinear Perturbations of Linear Operators. Preprint No. 80-19]. Kiev, In-t matematiki AN USSR Publ., 1980. 44 p.

3. Baskakov A.G. Teorema o rasshcheplenii operatora i nekotorye smezhnye voprosy analiticheskoy teorii vozmushcheniy [A Theorem on Splitting an Operator, and Some Related Questions in the Analytic Theory of Perturbations]. *Izv. AN SSSR. Ser. Matem.* [Mathematics of the USSR — Izvestiya], 1986, vol. 50, no. 3, pp. 435-457.

4. Baskakov A.G. *Garmonicheskiy analiz lineynykh operatorov* [Harmonic Analysis of Linear Operators]. Voronezh, Izd-vo VGU Publ., 1987. 165 p.

5. Baskakov A.G., Katsaran T.K. Spektralnyy analiz integro-differentsialnykh operatorov s nelokalnymi kraevymi usloviyami [Spectral Analysis of Integro-Differential Operators with Nonlocal Boundary Conditions]. *Differentsialnye uravneniya* [Differential Equations], 1988, vol. 24, no. 8, pp. 1424-1433.

6. Baskakov A.G. Spektralnye svoystva otnositelno konechnomernykh vozmushcheniy spektralnykh operatorov [Spectral Analysis with Respect to Finite-Dimensional Perturbations of Spectral Operators]. *Izv. vuzov. Matem.* [Soviet Mathematics — Iz. VUZ], 1991, no. 1, pp. 3-11.

7. Baskakov A.G., Derbushev A.V., Shcherbakov A.O. Metod podobnykh operatorov v spektralnom analize nesamosopryazhennogo operatora Diraka s negladkim potentsialom [The

Method of Similar Operators in the Spectral Analysis of Non-Self-Adjoint Dirac Operators with Non-Smooth Potentials]. *Izv. RAN. Ser. Matem.* [Izvestiya: Mathematics], 2011, vol. 75, no. 3, pp. 3-28. DOI: http://dx.doi.org/10.4213/im4202.

8. Baskakov A.G., Polyakov D.M. Metod podobnykh operatorov v spektralnom analize operatora Khilla s negladkim potentsialom [The Method of Similar Operators in the Spectral Analysis of the Hill Operator with Nonsmooth Potential]. *Matem. sb.* [Sbornik: Mathematics], 2017, vol. 208, no. 1, pp. 3-47. DOI: http://dx.doi.org/10.4213/sm8637.

9. Garkavenko G.V., Uskova N.B. Asimptotika sobstvennykh znacheniy raznostnogo operatora s rastushchim potentsialom i polugruppy operatorov [The Asymptotic of Eigenvalues for Difference Operator with Growing Potential]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2017, vol. 20, no. 4, pp. 6-17. DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.4.2.

10. Gokhberg I.Ts., Kreyn M.G. *Vvedenie v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov* [Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 448 p.

11. Daletskiy Yu.L., Kreyn M.G. *Ustoychivost resheniy differentsialnykh uravneniy v banakhovom prostranstve* [Stability of Solutions of Differential Equations in a Banach Space]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 536 p.

12. Danford N., Shvarts D.T. *Lineynye operatory. T. 2: Spektralnaya teoriya. Samosopryazhennye operatory v gilbertovom prostranstve* [Linear Operators. Part II. Spectral Theory/ Self Adjoint Operators in Hilbert Space]. Moscow, Mir Publ., 1966. 1063 p.

13. Ulyanova E.L. O spektralnykh svoystvakh otnositelno konechnomernykh vozmushcheniy samosopryazhennykh operatorov [On the Spectral Properties of Relatively Finite-Dimensional Perturbations of Selfadjoint Operators]. *Izv. vuzov. Matem.* [Soviet Mathematics — Iz. VUZ], 1997, no. 10, pp. 75-78.

14. Ulyanova E.L. *Spektralnyy analiz normalnykh operatorov, vozmushchennykh otnositelno konechnomernymi: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk* [Spectral Analysis of the Normal Operators with Perturbed Relatively Finite-Dimensional. Cand. phys. and math. sci. diss.]. Voronezh, 1998. 100 p.

15. Fridrikhs K.O. *Vozmushchenie spektra operatorov v gilbertovom prostranstve* [Perturbation of Spectra in Hilbert Space]. Moscow, Mir Publ., 1969. 232 p.

16. Shelkovoy A.N. Otsenki sobstvennykh znacheniy i sobstvennykh funktsiy odnogo differentsialnogo operatora s nelokalnymi kraevymi usloviyami [Estimates of the Eigenvalues and Eigenfunctions of a Differential Operator with Nonlocal Boundary Conditions]. *Vestnik fakulteta prikladnoy matematiki i mekhaniki*, 2000, no. 2, pp. 226-235.

17. Shelkovoy A.N. Metod podobnykh operatorov v issledovanii integro-differentsialnykh operatorov s kvadratichno summiruemym yadrom [A Method of Similar Operators in the Study of Integro-Differential Operators with a Quadratically Summable Kernel]. *Voprosy nauki*, 2016, no. 2, pp. 68-80.

18. Shelkovoy A.N. Spektralnye svoystva differentsialnykh operatorov, opredelyaemykh nelokalnymi kraevymi usloviyami [Spectral Properties of Differential Operators Defined by Nonlocal Boundary Conditions]. *Voprosy nauki*, 2016, no. 3, pp. 83-90.

19. Shelkovoy A.N. Spektralnye svoystva differentsialnogo operatora vtorogo poryadka, opredelyaemogo nelokalnymi kraevymi usloviyami [Spectral Properties of Second Order Differential Operator Determined by Non-Local Boundary Conditions]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2018, vol. 21, no. 4, pp. 18-33. DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.4.2.

20. Turner R.E. Perturbations of Compact Spectral Operators. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1965, vol. 18, pp. 519-541.

SPECTRAL ANALYSIS OF AN INTEGRO-DIFFERENTIAL OPERATOR WITH A DEGENERATE KERNEL

Aleksandr N. Shelkovoy

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Mathematics and Physical-Mathematical Modeling,
Voronezh State Technical University
shelkovoj.aleksandr@mail.ru
Prosp. Moskovskii, 14, 394026 Voronezh, Russian Federation

Abstract. We consider operator $\mathcal{L}$ acting in the Hilbert space $L_2[0,1]$ defined by the integro-differential expression $(\mathcal{L}x)(t) = -\ddot{x}(t) - \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)ds$ with the domain $D(\mathcal{L}) = \{x \in W_2^2[0,1],\ x(0) = x(1) = 0\}$, where $W_2^2[0,1]$ is the Sobolev space $\{x \in L_2[0,1] : x'$ is absolutely continuous, $x'' \in L_2[0,1]\}$, and the boundary conditions $x(0) = x(1) = 0$.

To study spectral properties of the operator $\mathcal{L}$, it is represented in the form $(\mathcal{L}x)(t) = (Ax)(t) - (Bx)(t)$, where with $(Ax)(t) = -\ddot{x}(t)$, $(Bx)(t) = \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)ds$. Operator A is considered an unperturbed operator, B is a perturbation, which is an integral operator with a degenerate kernel $K(t,s) = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i(t)q_i(s)$, $p_i, q_i \in L_2[0,1]$.

As a method of studying spectral properties of the operator $A - B$ the method of similar operators serves.

One of the main results is

Theorem 3. Let for any functions p_i, q_i, $i = \overline{1,k}$, belonging to a Hilbert space $L_2[0,1]$, and for the sequences $\gamma_1, \gamma_2 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, defined by formulas

$$\gamma_1(n) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}} \frac{n^2\left(\sup\limits_j \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} q_{ij}^{\sin} p_{im}^{\sin}}{j}\right)^2 + m^2\left(\sup\limits_j \frac{|\sum\limits_{i=1}^{k} q_{ij}^{\sin} p_{in}^{\sin}|}{j}\right)^2}{|n^2 - m^2|^2}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

$$\gamma_2(n) = \frac{1}{2\pi^2}\max\left\{\frac{n\sup\limits_j \frac{|\sum\limits_{i=1}^{k} q_{ij}^{\sin} p_{in}^{\sin}|}{j}}{2n-1},\ \sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}} \frac{m\sup\limits_j \frac{|\sum\limits_{i=1}^{k} q_{ij}^{\sin} p_{im}^{\sin}|}{j}}{|n^2 - m^2|}\right\} < \infty,$$

where $p_{ij}^{\sin} = 2\int\limits_0^1 p_i(t)\sin\pi jt dt$, $q_{ij}^{\sin} = 2\int\limits_0^1 q_i(t)\sin\pi js ds$ are the expansion coefficients of functions p_i and q_i in the Fourier series in sines, the conditions are satisfied: $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_1(n) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_2(n) = 0$. Then the spectrum $\sigma(A-B)$ of the operator $A - B$ can be represented in the form $\sigma(A-B) = \widetilde{\sigma}_m \bigcup \left(\bigcup\limits_{n\geq m+1} \widetilde{\sigma}_n\right)$,

where $\widetilde{\sigma}_n$, $n \geq m+1$, are single-point sets, and $\widetilde{\sigma}_m$ are finite sets with the number of points not exceeding m. Moreover, for their eigenvalues $\widetilde{\lambda}_n$ and eigenfunctions $\widetilde{e}_n$ of operator (1), we have the estimates:

$$\left|\widetilde{\lambda}_n - \pi^2 n^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} q_{in}^{\sin} p_{in}^{\sin} + \frac{1}{4\pi^2}\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}} \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} q_{in}^{\sin} p_{im}^{\sin} \sum\limits_{i=1}^{k} q_{im}^{\sin} p_{in}^{\sin}}{n^2 - m^2}\right| \leq$$

$$\leq \ \mathrm{const} \cdot n \cdot \sup_j \left|\sum_{i=1}^{k} \frac{q_{ij}^{\sin}}{j} p_{in}^{\sin}\right| \cdot \gamma_2(n),$$

$$\left(\int_0^1 \left|\widetilde{e}_n(t) - \sqrt{2}\sin \pi n t + \frac{\sqrt{2}}{2\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} q_{in}^{\sin} p_{im}^{\sin}}{n^2 - m^2} \sin \pi m t\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \ \mathrm{const} \cdot n \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\sup\limits_j \left|\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{q_{ij}^{\sin}}{j} p_{in}^{\sin}\right|\right)^2}{|n^2 - m^2|^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Key words: eigenvalues, operator spectrum, integro-differential operator of the second order, spectrum asymptotic, method of similar operators.