www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2020.3.6

УДК 517.9
ББК 22.162

Дата поступления статьи: 07.05.2020
Дата принятия статьи: 24.07.2020

СИМВОЛИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ОБРАТИМОСТЬ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ НА БЕСКОНЕЧНОЙ ДИЭДРАЛЬНОЙ ГРУППЕ

Владимир Михайлович Деундяк

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры алгебры и дискретной математики,
Южный федеральный университет, институт математики, механики
и компьютерных наук им. И.И. Воровича
vl.deundyak@gmail.com
ул. Мильчакова, 8а, 344090 г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация;
Старший научный сотрудник,
ФГНУ НИИ «Спецвузавтоматика»
пер. Газетный, 51, 344002 г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Дмитрий Александрович Леонов

Аспирант кафедры алгебры и дискретной математики,
Южный федеральный университет, институт математики, механики
и компьютерных наук им. И.И. Воровича
tori_92@inbox.ru
ул. Мильчакова, 8а, 344090 г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Ангелина Александровна Сенчукова

Аспирант кафедры алгебры и дискретной математики,
Южный федеральный университет, институт математики, механики
и компьютерных наук им.и И.И. Воровича
asenchukova@yandex.ru
ул. Мильчакова, 8а, 344090 г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Аннотация. В настоящее время операторы свертки на дискретных некоммутативных группах интенсивно исследуются ввиду их прикладной значимости. Такие операторы применяются, в частности, в области передачи данных; в задачах защиты данных, обеспечивающих информационную безопасность; при разработке методов кодирования в сетях и каналах передачи данных; в обработке изображений и теории фильтров. В работе для алгебры операторов свертки на бесконечной диэдральной группе $\mathbb{D}_\infty$ разработано символическое исчисление, в терминах которого найдены необходимые и достаточные условия обратимости операторов из этой алгебры, и построено вложение в матричную алгебру операторов свертки на группе целых чисел, расширенную некоторым инволютивным оператором.

В теории проекционных методов решения операторных уравнений по исходному оператору строится последовательность уравнений с более простыми операторами для того, чтобы решение исходного уравнения можно было аппроксимировать с заданной точностью решением более простого уравнения, то есть строится редукция от исходного обратимого оператора к более простому обратимому оператору. В работе изучена связь между двойственными объектами группы $\mathbb{D}_\infty$ и конечной диэдральной группы $\mathbb{D}_m$, на основе этого построен оператор редукции, который обратимому оператору свертки на $\mathbb{D}_\infty$ ставит в соответствие обратимый оператор свертки на $\mathbb{D}_m$, приведены свойства этого оператора.

Ключевые слова: оператор свертки, конечная некоммутативная диэдральная группа, бесконечная некоммутативная диэдральная группа, преобразование Фурье, двойственный объект, обратимость оператора свертки.

Введение

В последние годы активно развивается гармонический анализ на некоммутативных группах в связи с широкой областью его практического применения (см., например, [1; 3; 5; 13; 15; 17]). Среди некоммутативных групп следует выделить конечную диэдральную группу $\mathbb{D}_m$ и ее бесконечный аналог $\mathbb{D}_\infty$, которые используются в работе [15] для создания фильтров и анализа изображений, применяются в теории кодирования [1], в задачах дифракции на телах с некоммутативной группой симметрий [5].

В теории проекционных методов решения операторных уравнений по исходному оператору строится последовательность более простых операторов и уравнений с ними таким образом, чтобы решение исходного уравнения можно было аппроксимировать с заданной точностью решением более простого уравнения. В рамках такого подхода строится редукция от исходного обратимого оператора к более простому обратимому оператору. В случае операторов дискретной свертки на группе $\mathbb{Z}^n$ в работе [9] (см. также [10]) приводится конструкция редукции от исходного оператора на группе $\mathbb{Z}^n$ к оператору на конечной группе $\mathbb{Z}_m^n$.

Целью настоящей работы является построение символического исчисления для операторов свертки на $\mathbb{D}_\infty$, нахождение условий обратимости оператора свертки на $\mathbb{D}_\infty$, изучение связи двойственных объектов для $\mathbb{D}_m$, $\mathbb{D}_\infty$ и построение редукции от оператора свертки на бесконечной группе $\mathbb{D}_\infty$ к оператору свертки на конечной группе $\mathbb{D}_m$.

В разделе 1 приводятся сведения о диэдральных группах. Во втором разделе изучается ограниченность и обратимость оператора свертки на $\mathbb{D}_\infty$. В разделе 4 получена конструкция редукции, на основе связи между двойственными объектами групп $\mathbb{D}_\infty$ и $\mathbb{D}_m$, описанной в разделе 3.

1. Предварительные сведения о групповой алгебре бесконечной диэдральной группы

1.1. Диэдральные группы

Бесконечная диэдральная группа $\mathbb{D}_\infty$ определяется как группа квадратных $(2 \times \times 2)$ — матриц над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ следующего вида

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $k \in \mathbb{Z}$ ([11, с. 19]). Матрицы из $\mathbb{D}_\infty$ будем записывать в виде пар (k, ε), тогда

$$(x, \varepsilon) \cdot (y, \delta) = (x + \varepsilon y, \varepsilon\delta). \tag{2}$$

Элементы $a = (1, 1)$, $b = (0, -1)$ являются образующими и имеет место копредставление

$$\mathbb{D}_\infty = \langle a, b \mid b^2 = e, bab = a^{-1} \rangle, \tag{3}$$

при этом

$$a^x = (x, 1),\ a^x b = (x, -1). \tag{4}$$

Отметим, что $\mathbb{D}_\infty$ — полупрямое произведение группы $\mathbb{Z}$ и мультипликативной группы $C_2 = \{1, -1\}$:

$$\mathbb{D}_\infty = \mathbb{Z} \rtimes_\alpha C_2, \tag{5}$$

где гомоморфизм $\alpha : C_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$ определяется условием: $\alpha(1) = \mathrm{id}$ — тождественное отображение, $\alpha(-1) = \mathrm{inv}$ — инверсия, то есть $\mathrm{inv}(z) = -z$ для $z \in \mathbb{Z}$.

Конечная диэдральная группа $\mathbb{D}_m$, где m — целое положительное число, определяется как группа квадратных (2×2) — матриц над кольцом $\mathbb{Z}_m$ вида (1). Матрицы из $\mathbb{D}_m$ будем записывать в виде пар (k, ε), тогда групповая операция имеет вид (2). Элементы $\tilde{a} = (1, 1)$ и $\tilde{b} = (0, -1)$ являются образующими группы $\mathbb{D}_m$ и имеет место копредставление

$$\mathbb{D}_m = \langle \tilde{a}, \tilde{b} \mid \tilde{a}^m = e,\ \tilde{b}^2 = e,\ \tilde{b}\tilde{a}\tilde{b} = \tilde{a}^{m-1} \rangle, \tag{6}$$

то есть $\mathbb{D}_m = \{e, \tilde{a}, \ldots, \tilde{a}^{m-1}, \tilde{b}, \tilde{a}\tilde{b}, \ldots, \tilde{a}^{m-1}\tilde{b}\}$ [12, с. 68].

1.2. Представления группы $\mathbb{D}_\infty$

Если X — компактное хаусдорфово пространство, а A — C^*-алгебра, то через $C(X, A)$ обозначим C^*-алгебру непрерывных функций, действующих из X в A с равномерной нормой. Пусть $L(n; \mathbb{C})$, где $n \in \mathbb{N}$, — алгебра квадратных матриц порядка n над полем комплексных чисел с операторной нормой, а $\mathfrak{D}$ — ее подалгебра всех матриц вида

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix},\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

Рассмотрим групповую алгебру $\mathbb{C}\mathbb{D}_\infty$, которая состоит из всевозможных формальных линейных комбинаций $\sum\limits_{g\in\mathbb{D}_\infty} a_g g$ элементов группы с произвольными коэффициентами $a_g \in \mathbb{C}$, из которых только конечное число отлично от нуля. Сложение и умножение на скаляр в $\mathbb{C}\mathbb{D}_\infty$ выполняются покомпонентно, а умножение выполняется по правилу:

$$\left(\sum_g a_g g\right)\left(\sum_h b_h h\right) = \sum_{gh} a_g b_h gh = \sum_f c_f f,$$

$$c_f = \sum_{gh=f} a_g b_h = \sum_t a_{ft^{-1}} b_t = \sum_s a_s b_{s^{-1}f}. \tag{8}$$

C^*-алгебра $C^*(\mathbb{D}_\infty)$ определяется как замыкание групповой алгебры $\mathbb{C}\mathbb{D}_\infty$ по максимальной C^*-норме [14, с. 293]. В [16, с. 78] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Существует изоморфизм*

$$\sigma : C^*(\mathbb{D}_\infty) \to \mathfrak{S} = \{f \in C([0,1], L(2;\mathbb{C})) \mid f(0), f(1) \in \mathfrak{D}\},$$

определяемый на образующих элементах группы $\mathbb{D}_\infty$ *следующим образом:*

$$\sigma(a)(t) = \begin{bmatrix} e^{i\pi t} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi t} \end{bmatrix}, \qquad \sigma(b)(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пользуясь теоремой 1, можно получить набор всех двумерных неприводимых унитарных представлений группы $\mathbb{D}_\infty$:

$$\{\rho_t\}_{t\in[0;1]}, \tag{9}$$

где $\rho_t(x,\varepsilon) = (\sigma(x,\varepsilon))(t), (x,\varepsilon) \in \mathbb{D}_\infty$. Отметим, что

$$\rho_t(x,1) = \begin{bmatrix} e^{i\pi tx} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi tx} \end{bmatrix}, \qquad \rho_t(x,-1) = \begin{bmatrix} 0 & e^{i\pi tx} \\ e^{-i\pi tx} & 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Группа $\mathbb{D}_\infty$ имеет также одномерные представления $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ ([16, с. 80]), определяемые на образующих равенствами

$$\pi_1(a) = \pi_1(b) = 1;\ \pi_2(a) = 1, \pi_2(b) = -1;\ \pi_3(a) = -1, \pi_3(b) = 1;\ \pi_4(a) = \pi_4(b) = -1. \tag{11}$$

2. Ограниченность и обратимость операторов свертки на $\mathbb{D}_\infty$

На группе $\mathbb{D}_\infty$ зададим атомарную меру, полагая меру каждой точки равной единице, и рассмотрим пространство Лебега $L_p(\mathbb{D}_\infty)$, $1 \le p \le \infty$. Норму функции f в пространстве $L_p(\mathbb{D}_\infty)$ обозначим через $\|f\|_p$. Напомним, что оператор левого сдвига τ_g на группе $\mathbb{D}_\infty$ действует в $L_p(\mathbb{D}_\infty)$ и определяется по формуле:

$$(\tau_g f)(y) = f(g^{-1}y),\ g \in \mathbb{D}_\infty.$$

Пусть $\alpha \in L_1(\mathbb{D}_\infty)$. Оператор левой свертки в пространстве $L_p(\mathbb{D}_\infty)$, $1 < p \le \infty$, определяется формулой

$$(C_\alpha f)(x,\varepsilon) = \sum_{(y,\delta)\in\mathbb{D}_\infty} \alpha(y,\delta) f((y,\delta)^{-1}(x,\varepsilon)) = \sum_{(y,\delta)\in\mathbb{D}_\infty} a(y,\delta)(\tau_{(y,\delta)} f)(x,\varepsilon). \tag{12}$$

2.1. Ограниченность

Приведем прямое доказательство ограниченности оператора левой свертки для $p \in \in (1, \infty]$.

Теорема 2. *Оператор C_α является линейным ограниченным оператором в пространстве $L_p(\mathbb{D}_\infty)$, $1 < p \leq \infty$. При этом для нормы оператора справедлива оценка:*

$$\|C_\alpha\|_p \leq \|\alpha\|_1.$$

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $f \in L_p(\mathbb{D}_\infty), 1 < p < \infty$. Покажем, что $C_\alpha f \in L_p(\mathbb{D}_\infty)$ и оператор C_α ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{D}_\infty)$. Ввиду теоремы об общем виде линейного непрерывного функционала в пространстве $L_q(\mathbb{D}_\infty)$ [6, с. 181], для этого достаточно показать, что $C_\alpha f$ определяет элемент пространства сопряженного пространства $L_q^*(\mathbb{D}_\infty)(\cong L_p(\mathbb{D}_\infty))$.

Пусть $g \in L_q(\mathbb{D}_\infty)$. Тогда

$$(C_\alpha f, g) = \sum_{(x,\varepsilon)} g(x,\varepsilon) \sum_{(y,\delta)} \alpha(y,\delta) f((y,\delta)^{-1}(x,\varepsilon)). \tag{13}$$

Оценим:

$$|(C_\alpha f, g)| = \left| \sum_{(x,\varepsilon)} g(x,\varepsilon) \sum_{(y,\delta)} \alpha(y,\delta) f((y,\delta)^{-1}(x,\varepsilon)) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{(x,\varepsilon)} |g(x,\varepsilon)| \sum_{(y,\delta)} |\alpha(y,\delta)||f((y,\delta)^{-1}(x,\varepsilon))| = \sum_{(y,\delta)} |a(y,\delta)| \sum_{(x,\varepsilon)} |f((y,\delta)^{-1}(x,\varepsilon))||g(x,\varepsilon)| \leq$$

$$\leq \sup_{(y,\delta)} \left(\sum_{(x,\varepsilon)} |f((y,\delta)^{-1}(x,\varepsilon))||g(x,\varepsilon)| \right) \|a\|_1.$$

Таким образом,

$$|(C_\alpha f, g)| \leq \sup_{(y,\delta)} \left(\sum_{(x,\varepsilon)} |f((y,\delta)^{-1}(x,\varepsilon))||g(x,\varepsilon)| \right) \|\alpha\|_1. \tag{14}$$

По неравенству Гельдера при любом $(x,\varepsilon) \in \mathbb{D}_\infty$

$$\sum_{(x,\varepsilon)} |f((y,\delta)^{-1}(x,\varepsilon))||g(x,\varepsilon)| \leq \left(\sum_{(x,\varepsilon)} |f((y,\delta)^{-1}(x,\varepsilon))|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{(x,\varepsilon)} |g(x,\varepsilon)|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Но

$$\left(\sum_{(x,\varepsilon)} |f((y,\delta)^{-1}(x,\varepsilon))|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{(x',\varepsilon')} |f((x',\varepsilon'))|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p. \tag{15}$$

Тогда, учитывая (14) и (15), получаем, что

$$|(C_\alpha f, g)| \leq \|a\|_1 \|f\|_p \|g\|_q \tag{16}$$

Согласно [2, с. 802]

$$\|C_\alpha f\|_p = \sup_{\|g\|_q \le 1} |(C_\alpha f, g)|,$$

поэтому, используя неравенство (16), получаем

$$\|C_\alpha f\|_p \le \sup_{\|g\|_q = 1} (\|\alpha\|_1 \|f\|_p \|g\|_q) = \|\alpha\|_1 \|f\|_p.$$

Таким образом, $C_\alpha f \in L_p(\mathbb{D}_\infty)$ и при этом $\|C_\alpha\|_p \le \|\alpha\|_1$.

2. Пусть $f \in L_\infty$. Покажем, что $C_\alpha f \in L_\infty(\mathbb{D}_\infty)$ и оператор C_α ограничен в пространстве $L_\infty(\mathbb{D}_\infty)$. Оценим:

$$\|C_\alpha f\|_\infty = \sup_{(x,\varepsilon)\in\mathbb{D}_\infty} \left| \sum_{(y,\delta)} \alpha(y,\delta) f((y,\delta)^{-1}(x,\varepsilon)) \right| \le$$

$$\le \sup_{(x,\varepsilon)\in\mathbb{D}_\infty} |f((y,\delta)^{-1}(x,\varepsilon))| \sup_{(y,\delta)\in\mathbb{D}_\infty} \sum_{(y,\delta)} |\alpha(y,\delta)|. \tag{17}$$

Отметим, что

$$\sup_{(x,\varepsilon)\in\mathbb{D}_\infty} |f((y,\delta)^{-1}(x,\varepsilon))| = \sup_{(x',\varepsilon')\in\mathbb{D}_\infty} |f((x',\varepsilon'))| = \|f\|_\infty. \tag{18}$$

Принимая во внимание (17) и (18), получаем

$$\|C_\alpha f\|_\infty \le \|f\|_\infty \|\alpha\|_1.$$

Отсюда следует, что $C_\alpha f \in L_\infty(\mathbb{D}_\infty)$, и справедливость оценки $\|C_\alpha\|_\infty \le \|\alpha\|_1$.

2.2. Символ и условия обратимости

Далее на протяжении всей статьи мы ограничимся рассмотрением случая $p = 2$. Пусть $\mathcal{L}(L_2(\mathbb{D}_\infty))$ — C^*-алгебра всех линейных ограниченных операторов в пространстве $L_2(\mathbb{D}_\infty)$. Через $\mathrm{Alg}(M)$, где $M \subset \mathcal{L}(L_2(\mathbb{D}_\infty))$, обозначим алгебру операторов, порожденную множеством M, а через $\overline{\mathrm{Alg}}(M)$ — ее замыкание.

Рассмотрим оператор свертки

$$C_\alpha : L_2(\mathbb{D}_\infty) \to L_2(\mathbb{D}_\infty), \quad \alpha \in L_1(\mathbb{D}_\infty),$$

который определяется по формуле (12) и в силу теоремы 2 является ограниченным в пространстве $L_2(\mathbb{D}_\infty)$. Если ядро α — финитная функция, то

$$C_\alpha = \sum_{(a,d)\in\mathbb{D}_\infty} \alpha(a,d)\tau_{(a,d)}. \tag{19}$$

Определим C^*-алгебру

$$V(\mathbb{D}_\infty) = \overline{\mathrm{Alg}}(\{C_\alpha\}_{\alpha\in L_1(\mathbb{D}_\infty)}),$$

которую будем отождествлять с C^*-алгеброй $C^*(\mathbb{D}_\infty)$ (см. [14, с. 293]), и рассмотрим изоморфизм

$$\sigma : V(\mathbb{D}_\infty) \to \mathfrak{S} \tag{20}$$

из теоремы 1, который будем называть символом. Для произвольного оператора $A \in V(\mathbb{D}_\infty)$ матрицу-функцию $\sigma(A)$ будем называть символом оператора A.

Группу обратимых элементов произвольной алгебры $\mathfrak{A}$ будем обозначать через $G(\mathfrak{A})$. Из того, что σ — изоморфизм, вытекает следующий критерий обратимости.

Теорема 3. *Если оператор A принадлежит $V(\mathbb{D}_\infty)$, то следующие три утверждения равносильны:*

1) $A \in G(V(\mathbb{D}_\infty))$,

2) $\sigma(A) \in G(\mathfrak{S})$,

3) $\forall t \in [0,1],\ \det(\sigma(A)(t)) \neq 0$.

Пример. Рассмотрим оператор левой свертки C_φ (см. (12), (8)) с ядром

$$\varphi = 2(5,1) + i(4,-1) + 17(-3,1) \in \mathbb{C}\mathbb{D}_\infty \subset L_1(\mathbb{D}_\infty).$$

Воспользовавшись равенствами (10), найдем представления элементов бесконечной диэдральной группы из носителя φ:

$$\rho_t(5,1) = \begin{bmatrix} e^{5i\pi t} & 0 \\ 0 & e^{-5i\pi t} \end{bmatrix},\ \rho_t(4,-1) = \begin{bmatrix} 0 & e^{4i\pi t} \\ e^{-4i\pi t} & 0 \end{bmatrix},\ \rho_t(-3,1) = \begin{bmatrix} e^{-3i\pi t} & 0 \\ 0 & e^{3i\pi t} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$(\sigma(C_\varphi))(t) = (\sigma(C_{2(5,1)+i(4,-1)+17(-3,1)}))(t) =$$
$$= (2\sigma(C_{(5,1)}))(t) + (i\sigma(C_{(4,-1)}))(t) + (17\sigma(C_{(-3,1)}))(t) =$$
$$= 2\rho_t(5,1) + i\rho_t(4,-1) + 17\rho_t(-3,1) =$$
$$= 2\begin{bmatrix} e^{5i\pi t} & 0 \\ 0 & e^{-5i\pi t} \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 0 & e^{4i\pi t} \\ e^{-4i\pi t} & 0 \end{bmatrix} + 17\begin{bmatrix} e^{-3i\pi t} & 0 \\ 0 & e^{3i\pi t} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 2e^{5i\pi t} + 17e^{-3i\pi t} & ie^{4i\pi t} \\ ie^{-4i\pi t} & 2e^{-5i\pi t} + 17e^{3i\pi t} \end{bmatrix}.$$

Вычислим определитель полученной матрицы-функции:

$$\det(\sigma(C_\varphi)(t)) = 4 + 34(e^{8i\pi t} + e^{-8i\pi t}) + 289 - i^2 = 294 + 34(e^{8i\pi t} + e^{-8i\pi t}) = 294 + 68\cos 8\pi t.$$

Он отличен от нуля для всех $t \in [0,1]$, поэтому в силу теоремы 3 оператор C_φ обратим.

2.3. Связь операторов свертки на бесконечной диэдральной группе с операторами свертки на группе $\mathbb{Z}$

Рассмотрим отображение $\Lambda : L_2(\mathbb{D}_\infty) \to L_2^2(\mathbb{Z}) = L_2(\mathbb{Z}) \oplus L_2(\mathbb{Z})$, действующее по правилу:

$$(\Lambda\varphi)(x) = (\varphi(x,1), \varphi(x,-1))^T, \tag{21}$$

где $\varphi \in L_2(\mathbb{D}_\infty)$, а T означает транспонирование. Тогда обратным к Λ является отображение $\Lambda^{-1} : L_2^2(\mathbb{Z}) \to L_2(\mathbb{D}_\infty)$, определяемое для $(\psi_1, \psi_2)^T \in L_2^2(\mathbb{Z})$ равенством

$$(\Lambda^{-1}(\psi_1,\psi_2)^T)(x,\varepsilon) = \psi(x,\varepsilon) = \begin{cases} \psi_1(x), & \varepsilon = 1, \\ \psi_2(x), & \varepsilon = -1. \end{cases} \tag{22}$$

Напомним, оператор левого сдвига $\tau_{(a,d)} : L_2(\mathbb{D}_\infty) \to L_2(\mathbb{D}_\infty)$ действует по формуле:

$$(\tau_{(a,d)}f)(x, \varepsilon) = f((a, d)^{-1}(x, \varepsilon)) = f((-da, d)(x, \varepsilon)) = f(dx - da, d\varepsilon), f \in L_2(\mathbb{D}_\infty).$$

Поэтому в силу (22) для оператора $\tau_{(a,d)}\Lambda^{-1} : L_2^2(\mathbb{Z}) \to L_2(\mathbb{D}_\infty)$ выполняется равенство

$$((\tau_{(a,d)}\Lambda^{-1})(\psi_1, \psi_2)^T)(x) = (\tau_{(a,d)}\psi)(x, \varepsilon) = \psi(dx - da, \varepsilon d).$$

Теперь воспользуемся (21), вторым равенством из (22) и рассмотрим два случая: при $d = 1$

$$((\Lambda\tau_{(a,d)}\Lambda^{-1})(\psi_1, \psi_2)^T)(x) = (\psi_1(x - a), \psi_2(x - a))^T,$$

а при $d = -1$

$$((\Lambda\tau_{(a,d)}\Lambda^{-1})(\psi_1, \psi_2)^T)(x) = (\psi_2(-x + a), \psi_1(-x + a))^T.$$

Таким образом,

$$((\Lambda\tau_{(a,d)}\Lambda^{-1})(\psi_1, \psi_2)^T)(x) = \begin{cases} (\psi_1(x - a), \psi_2(x - a))^T, & d = 1, \\ (\psi_2(-x + a), \psi_1(-x + a))^T, & d = -1. \end{cases} \tag{23}$$

Введем мономорфизм групп $\vartheta : \mathbb{C}_2 \to GL(2, \mathbb{C})$:

$$\vartheta(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vartheta(-1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Рассмотрим также линейный инволютивный оператор $\theta_d (\in \mathcal{L}(L_2^2(\mathbb{Z}))$, действующий по правилу: $(\theta_d f)(x) = f(x)$ при $d = 1$ и $(\theta_d f)(x) = f(-x)$ при $d = -1$.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$\Lambda\tau_{(a,d)}\Lambda^{-1} = \theta_d \begin{bmatrix} \tau_a & 0 \\ 0 & \tau_a \end{bmatrix} \vartheta(d),$$

где τ_a *— оператор сдвига на* $a (\in \mathbb{Z})$ *в пространстве* $L_2(\mathbb{Z})$.

Доказательство. Рассмотрим действие оператора

$$\theta_d \begin{bmatrix} \tau_a & 0 \\ 0 & \tau_a \end{bmatrix} \vartheta(d) \tag{25}$$

на $(\psi_1, \psi_2)^T \in L_2^2(\mathbb{Z})$. При $d = 1$:

$$\left(\theta_1 \begin{bmatrix} \tau_a & 0 \\ 0 & \tau_a \end{bmatrix} \vartheta(1)\right) \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1(x - a) \\ \psi_2(x - a) \end{bmatrix}.$$

При $d = -1$:

$$\left(\theta_{-1} \begin{bmatrix} \tau_a & 0 \\ 0 & \tau_a \end{bmatrix} \vartheta(-1)\right) \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{bmatrix} = \left(\theta_{-1} \begin{bmatrix} 0 & \tau_a \\ \tau_a & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_2(-x + a) \\ \psi_1(-x + a) \end{bmatrix}.$$

Используя (23), убеждаемся, что операторы $\Lambda\tau_{(a,d)}\Lambda^{-1}$ и (25) действуют на $(\psi_1, \psi_2)^T \in$ $\in L_2^2(\mathbb{Z})$ одинаковым образом.

Рассмотрим оператор подобия

$$\hat{\Lambda} : \mathcal{L}(L_2^2(\mathbb{Z})) \to \mathcal{L}(L_2^2(\mathbb{Z})),$$

определяемый соответствием

$$A \mapsto \hat{\Lambda}(A) = \Lambda A \Lambda^{-1},\ A \in \mathcal{L}(L_2^2(\mathbb{Z})).$$

Из леммы 1 и формулы (19) вытекает, что для финитной функции α

$$\hat{\Lambda}(C_\alpha) = \Lambda C_\alpha \Lambda^{-1} = \sum_{(a,d)\in\mathbb{D}_\infty} \alpha(a,d) \left(\theta_d \begin{bmatrix} \tau_a & 0 \\ 0 & \tau_a \end{bmatrix} \vartheta(d) \right). \tag{26}$$

В силу плотности операторов вида (19) в C^*-алгебре $V(\mathbb{D}_\infty)$ отсюда получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Оператор подобия $\hat{\Lambda}$ мономорфно отображает алгебру $V(\mathbb{D}_\infty)$ в (2×2) — матричную алгебру сверток $V^{(2)}(\mathbb{Z})$ на группе $\mathbb{Z}$, расширенную инволютивным оператором θ_d.*

3. Связь двойственных объектов групп $\mathbb{D}_\infty$ и $\mathbb{D}_m$

Унитарные неприводимые представления T, T' группы $\mathbb{G}$ называются эквивалентными, если существует такая обратимая матрица Q, что $T(g) = Q^{-1}T'(g)Q$ для любого $g \in \mathbb{G}$. Множество классов эквивалентности таких представлений обозначают $\hat{\mathbb{G}}$ и называют двойственным объектом группы $\mathbb{G}$. В каждом классе эквивалентности зафиксируем представитель (представление группы $\mathbb{G}$) и далее, не теряя общности, под $\hat{\mathbb{G}}$ будем понимать множество таких представителей. Отметим, что мощность $|\hat{\mathbb{G}}|$ — конечная. Если группа $\mathbb{G}$ коммутативна, то все неприводимые унитарные представления одномерны и двойственный объект является группой. В некоммутативном случае двойственный объект для группы $\mathbb{G}$ не является группой и построить его труднее [12, с. 10–11].

Пусть

$$\mathfrak{G}(\hat{\mathbb{G}}) = \prod_{\rho\in\hat{\mathbb{G}}} L(d_\rho, \mathbb{C}) - \tag{27}$$

прямое произведение алгебр квадратных комплексных $(d_\rho \times d_\rho)$-матриц из $L(d_\rho, \mathbb{C})$, где $\rho \in \hat{\mathbb{G}}$, а d_ρ — размерность неприводимого представления ρ [7, с. 38]. Отметим, что $\mathfrak{G}(\hat{\mathbb{G}})$ — алгебра с покомпонентно определенными операциями, элементы которой будем отождествлять с матрицами-функциями ψ на $\hat{\mathbb{G}}$, такими что

$$\forall\rho \in \hat{\mathbb{G}} : \psi(\rho) \in L(d_\rho, \mathbb{C}).$$

Отметим, что $L_2(\mathfrak{G}(\hat{\mathbb{G}}))$ — пространство квадратично интегрируемых матричных функций на $\hat{\mathbb{G}}$ (см. [7, с. 119]). Рассмотрим представления (10), (11) группы $\mathbb{D}_\infty$ и ее двойственный объект

$$\hat{\mathbb{D}}_\infty = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \{\rho_t\}_{t\in[0;1]}\}. \tag{28}$$

Тогда

$$\mathfrak{G}(\hat{\mathbb{D}}_\infty) = \prod_{\rho\in\hat{\mathbb{D}}_\infty} L(d_\rho, \mathbb{C}),$$

где $d_{\pi_i} = 1$, $d_{\rho_t} = 2$.

Преобразование Фурье F функции f из $L_1(\mathbb{D}_\infty)$ определяется по формуле

$$(F(f))(\rho) = \sum_{g \in \mathbb{D}_\infty} f(g)\rho(g),$$

где $\rho \in \hat{\mathbb{D}}_\infty$ [7, с. 67], и продолжается до изоморфизма

$$F : L_2(\mathbb{D}_\infty) \to L_2(\mathfrak{G}(\hat{\mathbb{D}}_\infty)), \tag{29}$$

где $L_2(\mathfrak{G}(\hat{\mathbb{D}}_\infty))$ — пространство квадратично интегрируемых матричных функций на $\hat{\mathbb{D}}_\infty$ (см. [7, с. 119]).

Отметим, что для оператора свертки C_a с ядром a преобразование Фурье $F(a)$ совпадает с символом $\sigma(C_a)$ (см. (9) (10), (11), (20)).

Напомним вид двойственного объекта $\hat{\mathbb{D}}_m$ конечной диэдральной группы $\mathbb{D}_m$ [12, с. 69]. Если m — четное, то

$$\hat{\mathbb{D}}_m = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \{\zeta_h\}_{h=1,\dots,\frac{m-2}{2}}\}, \tag{30}$$

где характеры (одномерные представления) определяются следующими условиями:

$$\chi_1(\tilde{a}^k) = 1 \text{ и } \chi_1(\tilde{a}^k\tilde{b}) = 1, \quad \chi_2(\tilde{a}^k) = 1 \text{ и } \chi_2(\tilde{a}^k\tilde{b}) = -1,$$

$$\chi_3(\tilde{a}^k) = (-1)^k \text{ и } \chi_3(\tilde{a}^k\tilde{b}) = (-1)^k, \quad \chi_4(\tilde{a}^k) = (-1)^k \text{ и } \chi_4(\tilde{a}^k\tilde{b}) = (-1)^{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}_m;$$

двумерные представления ζ_h при $h = 1, \dots, \frac{m-2}{2}$ на элементах диэдральной группы принимают вид

$$\zeta_h(\tilde{a}^k) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi ikh}{m}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi ikh}{m}} \end{pmatrix}, \ \zeta_h(\tilde{a}^k\tilde{b}) = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{2\pi ikh}{m}} \\ e^{-\frac{2\pi ikh}{m}} & 0 \end{pmatrix}.$$

В случае нечетного m в двойственном объекте остаются два одномерных представления χ_1, χ_2 и двумерные представления ζ_h, где $h = 1, \dots, \frac{m-1}{2}$.

Преобразование Фурье на $\mathbb{D}_m$ обозначим через

$$\tilde{F} : L_2(\mathbb{D}_m) \to L_2(\mathfrak{G}(\hat{\mathbb{D}}_m)). \tag{31}$$

Необходимая информация о преобразовании Фурье на конечных некоммутативных группах приводится в [7, с. 37–38] (см. также [4, с. 1620–1621]).

Найдем связь между $\hat{\mathbb{D}}_\infty$ и $\hat{\mathbb{D}}_m$. Для определенности будем рассматривать $\mathbb{D}_m$, где m — четное. Определим гомоморфизм

$$\xi_m : \mathbb{D}_\infty \to \mathbb{D}_m,$$

полагая $\xi_m(a) = \tilde{a}$, $\xi_m(b) = \tilde{b}$. Прямыми вычислениями доказывается следующая лемма.

Лемма 2. *Рассмотрим двойственные объекты (30) и (28). Справедливы следующие соотношения*

$$\forall \zeta_h \in \hat{\mathbb{D}}_m : \ \zeta_h \xi_m = \rho_{\frac{2h}{m}};$$

$$\forall \chi_i \in \hat{\mathbb{D}}_m : \ \chi_i \xi_m = \pi_i.$$

Из леммы вытекает корректность инъективного отображения $\hat{\xi}_m : \hat{\mathbb{D}}_m \to \hat{\mathbb{D}}_\infty$, задаваемого формулой

$$\hat{\xi}_m(\lambda) = \lambda \xi_m, \ \lambda \in \hat{\mathbb{D}}_m. \tag{32}$$

В этом разделе построен групповой эпиморфизм $\xi_m : \mathbb{D}_\infty \to \mathbb{D}_m$, по нему построено инъективное отображение двойственных объектов $\hat{\xi}_m : \hat{\mathbb{D}}_m \to \hat{\mathbb{D}}_\infty$.

4. Конструкция редукции

Оператор левой свертки с ядром $c \in L_1(\mathbb{D}_m)$ на конечной диэдральной группе $\mathbb{D}_m$ будем обозначать через K_c, чтобы отличать его от оператора левой бесконечной свертки C_α с ядром $\alpha \in L_1(\mathbb{D}_\infty)$. Как и в случае операторов свертки на группе $\mathbb{D}_\infty$. символом оператора K_c назовем преобразование Фурье его ядра $c \in L_1(\mathbb{D}_m)$ (см. [4]) и будем обозначать через $\tilde{\sigma}(K_c)$.

Рассмотрим оператор свертки C_α вида (19). Будем говорить, что оператор свертки K_c является редукцией оператора C_α, и писать $K_c = \eta_{\mathbb{D}_m}(C_\alpha)$, если символ оператора K_c является ограничением символа оператора C_α на двойственный объект конечной диэдральной группы (30) (см. (32)). Другими словами,

$$(\tilde{\sigma}(K_c))(\lambda) = (\sigma(C_\alpha))(\hat{\xi}_m(\lambda)),\ \lambda \in \hat{\mathbb{D}}_m \tag{33}$$

(или, что тоже самое, $(F(c))(\lambda) = (F(\alpha))(\hat{\xi}_m(\lambda))$.

Из этого определения следует, что ядро порожденного оператора K_c можно выразить через преобразование Фурье, то есть $c(t) = \tilde{F}^{-1}((F(\alpha)))(t)$.

Через S_m будем обозначать отображение, сопоставляющее элементам f из $L_1(\mathbb{D}_\infty)$ элементы из $L_1(\mathbb{D}_m)$ по правилу

$$\forall (x,\varepsilon) \in \mathbb{D}_m,\ (S_m f)(x,\varepsilon) = \sum_{x \equiv y \bmod m} f(y,\varepsilon),\ y \in \mathbb{Z}. \tag{34}$$

Легко видеть, что S_m является линейным ограниченным оператором.

Лемма 3. *Оператор свертки K_c на конечной группе $\mathbb{D}_m$ является редукцией оператора бесконечной свертки C_α тогда и только тогда, когда $c = S_m\alpha$.*

Доказательство. Предположим, что K_c является редукцией оператора C_α и проверим выполнение равенства $c = S_m\alpha$.

Рассмотрим ограничение преобразования Фурье ядра α оператора C_α на двойственный объект группы $\mathbb{D}_m$

$$(F(\alpha))(\hat{\xi}_m(\lambda)) = \sum_{(x,\theta)\in\mathbb{D}_\infty} \alpha(x,\theta)(\hat{\xi}_m(\lambda))(x,\theta),\ \lambda \in \hat{\mathbb{D}}_m.$$

Рассмотрим подробнее действие преобразования Фурье на представлении $\lambda \in \hat{\mathbb{D}}_m$. Воспользуемся тем, что функция α принадлежит L_1, тогда

$$(F(\alpha))(\hat{\xi}_m(\lambda)) = \sum_{(x,\theta)\in\mathbb{D}_\infty} \alpha(x,\theta)(\hat{\xi}_m(\lambda))(x,\theta) = \sum_{\theta\in C_2}\sum_{x\in\mathbb{Z}} \alpha(x,\theta)(\hat{\xi}_m(\lambda))(x,\theta) =$$

$$= \sum_{\theta\in C_2}(\sum_{s\in\mathbb{Z}_m}(\sum_{\substack{x\equiv s \bmod m,\\ s\in\mathbb{Z}_m}} \alpha(x,\theta))(\hat{\xi}_m(\lambda))(s,\theta)) = \sum_{\theta\in C_2}(\sum_{s\in\mathbb{Z}_m} c(s,\theta)(\hat{\xi}_m(\lambda))(s,\theta)),$$

где

$$c(s,\theta) = \sum_{\substack{x\equiv s \bmod m,\\ s\in\mathbb{Z}_m}} \alpha(x,\theta). \tag{35}$$

Таким образом построено ядро c оператора K_c по ядру оператора C_α, заметим, что $c = S_n\alpha$ в силу (35).

Обратно, если $c = S_n\alpha$, то аналогичными рассуждениями можно доказать, что оператор K_c на конечной группе $\mathbb{D}_m$ является редукцией оператора бесконечной свертки C_α.

Рассмотрим свойства оператора редукции. Справедлив аналог теоремы из [9] для группы $\mathbb{D}_\infty$.

Теорема 5. *Пусть $\alpha, \beta \in L_1(\mathbb{D}_\infty)$. Справедливы следующие свойства:*

1) $\eta_{\mathbb{D}_m}(\gamma C_\alpha + \delta C_\beta) = \gamma\eta_{\mathbb{D}_m}(C_\alpha) + \delta\eta_{\mathbb{D}_m}(C_\beta),\ \gamma, \delta \in \mathbb{C}$;
2) $\eta_{\mathbb{D}_m}(C_\alpha C_\beta) = \eta_{\mathbb{D}_m}(C_\alpha) \cdot \eta_{\mathbb{D}_m}(C_\beta)$;
3) *если оператор C_α обратим, то оператор $\eta_{\mathbb{D}_m}(C_\alpha)$ также обратим, при этом*
$$(\eta_{\mathbb{D}_m}(C_\alpha))^{-1} = \eta_{\mathbb{D}_m}(C_\alpha^{-1});$$
4) $\|K_{S_m\alpha}\|_2 \le \|\alpha\|_1$, *где a — ядро оператора C_α, оператор $K_{S_m\alpha}$ порожден оператором C_α.*

Доказательство. **1)** Пусть $\sigma(C_\alpha)$, $\sigma(C_\beta)$ — символы операторов C_α и C_β соответственно. Отметим, что выполняется следующее равенство
$$\gamma C_\alpha + \delta C_\beta = C_{\gamma\alpha+\delta\beta},\ \alpha, \beta \in L_1(\mathbb{Z}),\ \gamma, \delta \in \mathbb{C},$$
действительно, пусть $f \in L_2(\mathbb{Z})$, тогда
$$((\gamma C_\alpha + \delta C_\beta)f)(x) = ((\gamma \sum_{y\in\mathbb{D}_\infty} \alpha(y)\tau_y + \delta \sum_{y\in\mathbb{D}_\infty} \beta(y)\tau_y)f)(x) =$$
$$= \sum_{y\in\mathbb{D}_\infty} (\gamma\alpha(y) + \delta\beta(y))(\tau_y f)(x) = \sum_{y\in\mathbb{D}_\infty} (\gamma\alpha(y) + \delta\beta(y))f(y^{-1}x) = (C_{\gamma\alpha+\delta\beta} f)(x).$$
Символом оператора $C_{\gamma\alpha+\delta\beta}$ является $\sigma(\gamma C_\alpha + \delta C_\beta)$, при этом
$$\sigma(\gamma C_\alpha + \delta C_\beta) = \gamma\sigma(C_\alpha) + \delta\sigma(C_\beta).$$
Отметим, что
$$(\gamma\sigma(C_\alpha) + \delta\sigma(C_\beta))|_{\hat{\mathbb{D}}_m} = \gamma\sigma(C_\alpha)|_{\hat{\mathbb{D}}_m} + \delta\sigma(C_\beta)|_{\hat{\mathbb{D}}_m}.$$

2) Произведение операторов $C_\alpha C_\beta$ соответствует произведению их символов. Ограничим произведение символов на двойственный объект $\hat{\mathbb{D}}_m$, тогда
$$(\sigma(C_\alpha) \cdot \sigma(C_\beta))|_{\hat{\mathbb{D}}_m} = ((F(\alpha))(\rho) \cdot (F(\beta))(\rho))|_{\rho\in\hat{\mathbb{D}}_m} =$$
$$= \left(\sum_{g\in\mathbb{D}_\infty} \alpha(g)\rho(g) \cdot \sum_{g\in\mathbb{D}_\infty} \beta(g)\rho(g)\right)\Bigg|_{\rho\in\hat{\mathbb{D}}_m} = \left(\sum_{g\in\mathbb{D}_\infty} \alpha(g)\rho(g)\right)\Bigg|_{\rho\in\hat{\mathbb{D}}_m} \cdot \left(\sum_{g\in\mathbb{D}_\infty} \beta(g)\rho(g)\right)\Bigg|_{\rho\in\hat{\mathbb{D}}_m} =$$
$$= (F(\alpha))(\rho)|_{\rho\in\hat{\mathbb{D}}_m} \cdot (F(\beta))(\rho)|_{\rho\in\hat{\mathbb{D}}_m} = \sigma(C_\alpha)|_{\hat{\mathbb{D}}_m} \cdot \sigma(C_\beta)|_{\hat{\mathbb{D}}_m},$$
откуда и следует требуемое утверждение.

3) Пусть оператор C_α обратим. Это возможно тогда и только тогда, когда символ этого оператора обратим, то есть существует $((F(\alpha))(\rho))^{-1},\ \forall\rho \in \hat{\mathbb{D}}_\infty$, следовательно существует $((F(\alpha))(\rho))^{-1},\ \forall\rho \in \hat{\mathbb{D}}_m$, значит $\eta_{\mathbb{D}_m}(C_\alpha)$ обратим.

Допустим, что C_α^{-1} — обратный оператор к оператору C_α. Символ обратного оператора $\sigma(C_\alpha^{-1}) = (F(\alpha))^{-1}$. Тогда $(F\alpha)|_{\hat{\mathbb{D}}_m}$ и $((F\alpha))^{-1}|_{\hat{\mathbb{D}}_m}$ — символы операторов $\eta_{\mathbb{D}_m}(C_\alpha)$ и $\eta_{\mathbb{D}_m}(C_\alpha^{-1})$ соответственно (см. (33)). Символом оператора $\eta_{\mathbb{D}_m}(C_\alpha)\cdot\eta_{\mathbb{D}_m}(C_\alpha^{-1})$ является произведение $(F\alpha)|_{\hat{\mathbb{D}}_m}\cdot((F\alpha))^{-1}|_{\hat{\mathbb{D}}_m} = (F\delta_0)|_{\hat{\mathbb{D}}_m} = 1$, то есть $\eta_{\mathbb{D}_m}(C_\alpha)\cdot\eta_{\mathbb{D}_m}(C_\alpha^{-1}) = I$.

4) Допустим, что $S_m\alpha$ — ядро оператора $K_{S_m\alpha} = \eta_{\mathbb{D}_m}(C_\alpha)$, тогда

$$\|K_{S_m\alpha}\|_2 \le \sum_{(x,\theta)\in\mathbb{D}_m} |(S_m\alpha)(x,\theta)| = \sum_{(x,\theta)\in\mathbb{D}_m} |\sum_{s\equiv x \bmod m} \alpha(s,\theta)| \le$$

$$\le \sum_{(x,\theta)\in\mathbb{D}_m}\sum_{s\equiv x \bmod m} |\alpha(s,\theta)| = \sum_{g\in\mathbb{D}_\infty} |\alpha(g)| = \|\alpha\|_1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веденев, К. В. Коды в диэдральной групповой алгебре / К. В. Веденев, В. М. Деундяк // Модел. и анализ информ. систем. — 2018. — Т. 25, № 2. — С. 232–245.

2. Вержбицкий, В. М. Основы численных методов / В. М. Вержбицкий. — М. : Директ–Медиа, 2013. — 847 с.

3. Денисенко, В. В. Обратимость интегральных операторов с однородными ядрами компактного типа на группе Гейзенберга / В. В. Денисенко, В. М. Деундяк // Математ. физика и компьютер. моделирование. — 2018. — Т. 21, № 3. — С. 5–18.

4. Деундяк, В. М. Метод Фурье для решения уравнений двусторонней свертки на конечных некоммутативных группах / В. М. Деундяк, Д. А. Леонов // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. — 2018. — Т. 58, № 10. — С. 1618–1628.

5. Загороднов, И. А. Задача дифракции на телах с некоммутативной конечной группой симметрий и численное ее решение / И. А. Загороднов, Р. П. Тарасов // Журн. вычисл. мат. и матем. физики. — 1997. — Т. 37, № 10. — С. 1246–1262.

6. Кантарович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Кантарович, Г. П. Акилов. — М. : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. — 752 с.

7. Кириллов, А. А. Введение в теорию представлений и некоммутативный гармонический анализ / А. А. Кириллов // Теория представлений и некоммутативный гармонический анализ — 1. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. — М. : ВИНИТИ, 1988. — Т. 22. — С. 5–162.

8. Кириллов, А. А. Элементы теории представлений / А. А. Кириллов. — М. : Наука, 1978. — 344 с.

9. Козак, А. В. Связь между сверткой по всему пространству и циклической сверткой / А. В. Козак, Д. И. Ханин // Материалы IX международной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения IX» (г. Ростов-на-Дону, 22–25 апреля 2019 г.). — Ростов н/Д : Изд-тво Ростов. отд-ния Рос. инженер. академии, 2019. — С. 133–134.

10. Козак, А. В. Приближенное решение больших систем уравнений с многомерными теплицевыми матрицами / А. В. Козак, Д. И. Ханин // Сиб. журн. вычисл. мат. — 2015. — Т. 18, № 1. — С. 55–64.

11. Магнус, В. Комбинаторная теория групп / В. Магнус, А. Каррас, В. Солитер. — М. : Наука, 1974. — 456 с.

12. Хьюитт, Э. Абстрактный гармонический анализ / Э. Хьюитт, К. Росс. — М. : Наука, 1975. — Т. 2. — 1560 с.

13. Chirikjian, G. S. Engineering applications of noncommutative harmonic analysis: with emphasis on rotation and motion groups / G. S. Chirikjian, A. B. Kyatkin. — Boca Raton : CRC Press, 2001. — 698 p.

14. Dixmier, J. C^*-algebras / J. Dixmier. — Amsterdam : North Holland publishing Company, 1977. — 506 p.

15. Leinz, R. Using representations of the dihedral groups in the design of early vision filters / R. Leinz // Acoustics, Speech, and Signal Processing. — 1993. — Vol. 5. — P. 165–168.

16. Putnam, I. F. Lecture Notes on C^*-algebras / I. F. Putnam. — Electronic text data. — Mode of access: http://www.math.uvic.ca/faculty/putnam/ln/C*-algebras.pdf. — Title from screen.

17. Terras, A. Fourier analysis on finite groups and applications / A. Terras. — Cambridge : Cambridge University Press, 1999. — 442 p.

REFERENCES

1. Vedenyov K.V., Deundyak V.M. Kody v diedralnoy gruppovoy algebre [Codes in Dihedral Group Algebra]. *Model. i analiz inform. sistem.* [Automatic Control and Computer Sciences], 2018, vol. 25, no. 2, pp. 232-245.

2. Verzhbitskiy V.M. *Osnovy chislennykh metodov* [Fundamentals of Numerical Methods]. Moscow, Direkt–Media Publ., 2013. 847 p.

3. Denisenko V.V., Deundyak V.M. Obratimost integralnykh operatorov s odnorodnymi yadrami kompaktnogo tipa na gruppe Geyzenberga [The Invertibility of Integral Operators with Homogeneous Kernels of Compact Type on the Heisenberg Group]. *Matemat. fizika i kompyuter. modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2018, vol. 21, no. 3, pp. 5-18.

4. Deundyak V.M., Leonov D.A. Metod Furye dlya resheniya uravneniy dvustoronney svyortki na konechnykh nekommutativnykh gruppakh [Fourier Method for Solving Two-Sided Convolution Equations on Finite Noncommutative Groups]. *Zhurn. vychisl. mat. i mat. fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2018, vol. 58, no. 10, pp. 1618-1628.

5. Zagorodnov I.A., Tarasov R.P. Zadacha difraktsii na telakh s nekommutativnoy konechnoy gruppoy simmetriy i chislennoe ee reshenie [Diffraction on Bodies with Noncommutative Finite Group of Symmetry and Numerical Solution]. *Zhurn. vychisl. mat. i matem. fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1997, vol. 37, no. 10, pp. 1246-1262.

6. Kantarovich L.V., Akilov G.P. *Funktsionalnyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Gl. red. fiz.-mat. lit. Publ., 1984. 752 p.

7. Kirillov A.A. Vvedenie v teoriyu predstavleniy i nekommutativnyy garmonicheskiy analiz [Introduction to Theory of Representations and Noncommutative Harmonic Analysis]. *Teoriya predstavleniy i nekommutativnyy garmonicheskiy analiz — 1. Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. probl. mat. Fundam. napravleniya.* Moscow, VINITI Publ., 1988, vol. 22, pp. 5-162.

8. Kirillov A.A. *Elementy teorii predstavleniy* [Elements of Theory of Representations]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 344 p.

9. Kozak A.V., Khanin D.I. Svyaz mezhdu svyortkoy po vsemu prostranstvu i tsiklicheskoy svyortkoy [Connection Between Convolution on All Space and Cyclic Convolution]. *Materialy IX mezhdunarodnoy konferentsii «Sovremennye metody i problemy teorii operatorov i garmonicheskogo analiza i ikh prilozheniya IX» (g. Rostov-na-Donu, 22–25 aprelya 2019 g.).* Rostov n/D, Izd-tvo Rostov. otd-niya Ros. inzhener. akademii Publ., 2019, pp. 133-134.

10. Kozak A.V., Khanin D.I. Priblizhennoe reshenie bolshikh sistem uravneniy s mnogomernymi teplitsevymi matritsami [Approximate Solution of Large Systems of Equations with Multidimensional Toeplitz Matrices]. *Sib. zhurn. vychisl. mat.* [Numerical Analysis and Applications], 2015, vol. 18, no. 1, pp. 55-64.

11. Magnus V., Karras A., Soliter V. *Kombinatornaya teoriya grupp* [Combinatorial Theory of Groups]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 456 p.

12. Hewitt E., Ross K. *Abstraktnyy garmonicheskiy analiz* [Abstract Harmonic Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1975, vol. 2. 1560 p.

13. Chirikjian G.S., Kyatkin A.B. *Engineering applications of noncommutative harmonic analysis: with emphasis on rotation and motion groups*. Boca Raton, CRC Press, 2001. 698 p.

14. Dixmier J. *C*-algebras*. Amsterdam, North Holland publishing Company, 1977. 506 p.
15. Leinz R. Using Representations of the Dihedral Groups in the Design of Early Vision Filters. *Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1993, vol. 5, pp. 165-168.
16. Putnam I.F. Lecture Notes on *C**-algebras. URL: http://www.math.uvic.ca/faculty/putnam/ln/C*-algebras.pdf.
17. Terras A. *Fourier analysis on finite groups and applications*. Cambridge, Cambridge University Press, 1999. 442 p.

SYMBOLIC CALCULATION AND INVERTIBILITY OF CONVOLUTION OPERATORS ON THE INFINITE DIHEDRAL GROUP

Vladimir M. Deundyak

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Algebra and Discrete Mathematics,
Southern Federal University,
Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science named after I.I. Vorovich
vl.deundyak@gmail.com
Milchakova St, 8a, 344090 Rostov-on-Don, Russian Federation;Senior Researcher,
FGNU NII "Specvuzavtomatika"
Gazetniy Lane, 51, 344002 Rostov-on-Don, Russian Federation

Dmitriy A. Leonov

Postgraduate Student, Department of Algebra and Discrete Mathematics,
Southern Federal University,
Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science named after I.I. Vorovich
tori_92@inbox.ru
Milchakova St, 8a, 344090 Rostov-on-Don, Russian Federation

Angelina A. Senchukova

Postgraduate Student, Department of Algebra and Discrete Mathematics,
Southern Federal University,
Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science named after I.I. Vorovich
asenchukova@yandex.ru
Milchakova St, 8a, 344090 Rostov-on-Don, Russian Federation

Abstract. Nowadays, convolution operators on discrete noncommutative groups are under intensive research due to their applications, in particular, in the theory and practice of data networking, in image analysis, and in problems of diffraction by bodies with a noncommutative symmetry group. The symbolic calculation for algebra of convolution equations on the noncommutative infinite dihedral group $\mathbb{D}_\infty$ has been developed. Necessary and sufficient conditions of invertibility of convolution operators from this algebra in terms of symbolic calculation have been found in this paper. Besides, inclosure of algebra of convolution equations on $\mathbb{D}_\infty$ into matrix algebra of convolution operators on the group of whole numbers extended with involutive operator has been constructed.
In the theory of projection methods of the solution of operator equations the sequence of equations with more simple operators is constructed in order

to approximate the solution of original equation with some accuracy, i.e. the reduction of original invertible operator to a more simple invertible operator. The connection between dual object of $\mathbb{D}_\infty$ and finite noncommutative dihedral group $\mathbb{D}_m$ is studied. On the basis of this the operator of reduction that maps invertible operator of convolution on $\mathbb{D}_\infty$ to invertible convolution operator on $\mathbb{D}_m$ is constructed in this paper.

Key words: convolution operator, finite noncommutative dihedral group, inifinite noncommutative dihedral group, Fourier transformation, dual object, invertibility of convolution operator.