УДК 517.51
ББК 22.162

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РАЗНОСТИ ГРАДИЕНТОВ И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НИХ

А.А. Широкий

В работе строятся оценки разности градиентов кусочно-аффинной аппроксимации и исследуемой с ее помощью C^1-гладкой функции в обычной метрике и в метрике поверхности. Вначале соответствующие оценки приводятся для отдельных симплексов, затем формулируются следствия из них для триангуляций областей определения функций класса C^2.

Ключевые слова: *симплекс, погрешность аппроксимации, триангуляция Делоне, остроугольная триангуляция, градиент функции.*

1. Оценка погрешности аппроксимации градиента функции градиентом кусочно-линейной функции

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая область в $\mathbb{R}^n$. Для функций класса $C^1(D)$ через $\overline{\nabla} f(x)$ обозначим вектор градиента в точке $x \in D$, а производную по направлению произвольного вектора ξ — через скалярное произведение векторов $\overline{\nabla} f(x)$ и ξ:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \langle \overline{\nabla} f(x),\, \xi \rangle.$$

Если в $\mathbb{R}^n$ имеется набор точек $p_0, p_1, \ldots, p_k$, где $1 \leq k \leq n$, то обозначим через $S(p_0, \ldots, p_k)$ k-мерный симплекс с вершинами в этих точках. Будем предполагать, что векторы $p_1 - p_0, p_2 - p_0, \ldots, p_k - p_0$ линейно независимы. Если из этого набора точек убрать точку p_i, где $i = 0, \ldots, k$, то можно построить $(k-1)$-мерный симплекс, который обозначим через S_i. Этот симплекс является $(k-1)$-мерной гранью симплекса $S(p_0, \ldots, p_k)$. Обозначим через Π_i $(k-1)$-мерную гиперплоскость, содержащую S_i, а через η_i единичный вектор внешней нормали к Π_i, лежащий в плоскости симплекса $S(p_0, \ldots, p_k)$.

По отношению к плоскости симплекса S произвольный вектор $X \in \mathbb{R}^n$ может быть разложен в сумму

$$X = X^T + X^N,$$

где X^T — ортогональная проекция вектора X на гиперплоскость симплекса S, а X^N — его ортогональное дополнение.

Введем также отображение проекции на плоскость i-й грани симплекса, полагая

$$\pi_i \colon \mathbb{R}^n \to \Pi_i \text{ и } \pi_i(X) = X^T - \langle X,\, \eta_i \rangle \eta_i.$$

Теперь зафиксируем произвольный симплекс $S \subset D$. Для функции $f \in C^1(D)$ построим аффинную функцию $L_f(x)$ вида

$$L_f(x) = \langle A,\, x\rangle + a_0$$

такую, что

$$f(p_i) = L_f(p_i), \text{ при } i = 0,\, \dots,\, k \text{ и } A^N = 0.$$

Несложно проверяется выполнение следующего утверждения.

Лемма 1. *Указанная аффинная функция существует и однозначно определена.*

Величину

$$\delta_f(p_0) = \left|\overline{\nabla} f(p_0) - \overline{\nabla} L_f(p_0)\right|$$

назовем погрешностью вычисления $\overline{\nabla} f(p_0)$ посредством функции $L_f(x)$. Обозначая

$$\omega_{ij} = \overline{\nabla} f(p_i) - \overline{\nabla} f(p_j),$$

$$\gamma_{ij} = f(p_i) - f(p_j) - \langle\overline{\nabla} f(p_j),\, p_i - p_j\rangle,\ i,\, j = 0,\, \dots,\, k,$$

$$\beta_{ij} = \frac{\left|f(p_i) - f(p_j) - \langle\overline{\nabla} f(p_j),\, p_i - p_j\rangle\right|}{|p_i - p_j|} \text{ для } f \in C^1(D),$$

сформулируем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Для произвольного вектора* $Y \in \mathbb{R}^n$ *и пары индексов* $i,\, m = \overline{0,\, k}$, $i \neq m$ *имеет место неравенство*

$$|\langle Y, \eta_i\rangle| \leq \frac{|p_i - p_m|}{|\langle\eta_i,\, p_i - p_m\rangle|}\left(\frac{|\langle Y,\, p_i - p_m\rangle|}{|p_i - p_m|} + |\pi_i(Y)|\right).$$

Следующая теорема является ключевой для получения оценок погрешностей градиента $\delta_f(x)$.

Теорема 1. *Если симплекс* $S(p_0,\, p_1,\, \dots,\, p_k) \subset D$, $k > 1$ *и функция* $f(x)$ *дифференцируема в вершинах этого симплекса, то для любого номера* $i = \overline{0,\, k}$ *и любой пары номеров* $j,\, m = \overline{0,\, k}$*, таких что* $j \neq m$ *и* $j,\, m \neq i$*, выполнено:*

$$\left|\frac{\partial f(p_m)}{\partial\eta_i} - \frac{\partial L_f(p_m)}{\partial\eta_i}\right| \leq \frac{1}{\sin\theta_{im}}\left(\beta_{im} + |\pi_i(\omega_{jm})| + \left|\pi_i\left(\overline{\nabla} f(p_j) - \overline{\nabla} L_f(p_j)\right)\right|\right),$$

где θ_{im} — *угол между вектором* $p_i - p_m$ *и плоскостью грани* S_i*. Если* $k = 1$*, то*

$$\left|\frac{\partial f(p_0)}{\partial\eta} - \frac{\partial L_f(p_0)}{\partial\eta}\right| \leq \beta_{10},\ \text{где } \eta = \frac{(p_1 - p_0)}{|p_1 - p_0|}.$$

Лемма 3. *Пусть* Π — *некоторая* k*-мерная плоскость, образующая с плоскостью симплекса угол* $0 \leq \alpha < \pi$*. Обозначим через* $(v)^{\Pi}$ *ортогональную проекцию некоторого вектора* v *на эту плоскость. Тогда имеет место неравенство*

$$\left|\left(\overline{\nabla} f(p_m) - \overline{\nabla} L_f(p_m)\right)^{\Pi}\right| \leq \left|\left(\overline{\nabla} f(p_m) - \overline{\nabla} L_f(p_m)\right)^T\right| + \sin\alpha\left|\overline{\nabla} f(p_m)\right|.$$

Замечание. Если в качестве Π выбрать плоскость, касательную к некоторой гладкой поверхности в точке p_m, то доказанное неравенство вместе с результатом теоремы 1 позволяет получить оценку погрешности вычисления градиента функции в метрике этой поверхности.

Лемма 4. *Пусть функция $f \in C^1(D)$ и функция $\omega(t)$ является модулем непрерывности ее градиента, то есть для всякой пары точек $x', x'' \in D$ выполнено неравенство*

$$\left|\overline{\nabla} f(x') - \overline{\nabla} f(x'')\right| \leq \omega\left(|x' - x''|\right).$$

Тогда

$$|\omega_{ij}| \leq \omega(|p_i - p_j|), \tag{1}$$

$$\beta_{ij} \leq \frac{1}{|p_i - p_j|} \int\limits_0^{|p_i - p_j|} \omega(t)dt. \tag{2}$$

Принимая обозначения теоремы 1, заметим, что

$$\left|\left(\overline{\nabla} f(p_m) - \overline{\nabla} L_f(p_m)\right)^T\right| \leq \left|\frac{\partial f(p_m)}{\partial \eta_i} - \frac{\partial L_f(p_m)}{\partial \eta_i}\right| + \left|\pi_i\left(\overline{\nabla} f(p_m) - \overline{\nabla} L_f(p_m)\right)\right|.$$

Тогда получим оценку:

$$\left|\left(\overline{\nabla} f(p_m) - \overline{\nabla} L_f(p_m)\right)^T\right| \leq \frac{1}{\sin\theta_{im}} \left(\frac{1}{|p_i - p_m|} \int\limits_0^{|p_i - p_m|} \omega(t)dt + \right.$$

$$\left. + (1 + \sin\theta_{im}) \left(\omega\left(|p_m - p_j|\right) + \left|\pi_i\left(\overline{\nabla} f(p_j) - \overline{\nabla} L_f(p_j)\right)\right|\right)\right). \tag{3}$$

Ниже приводятся следствия теоремы 1, которые непосредственно получаются из оценки (3) с применением лемм 3 и 4.

Следствие 1. *Пусть $k = 2$. Тогда, если $m = 0$, $i = 1$, $j = 2$, а φ_S, d_S обозначают значение угла при вершине p_0 и длину максимальной стороны треугольника S, то имеет место оценка*

$$\left|\left(\overline{\nabla} f(p_0) - \overline{\nabla} L_f(p_0)\right)^T\right| \leq \frac{1}{\sin\varphi_S} \left(\frac{3}{d_S} \int\limits_0^{d_S} \omega(t)dt + 2\omega(d_S)\right).$$

Следствие 2. *Пусть $k = 2$ и вершины треугольника S лежат на двумерной гладкой поверхности $F \subset D \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что угол между плоскостью этого треугольника и касательной плоскостью к поверхности в точке p_0 равен α, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Если функция $f \in C^1(D)$, то*

$$|\nabla f(p_0) - \nabla L_f(p_0)| \leq \frac{1}{\sin\varphi_S} \left(\frac{3}{d_S} \int\limits_0^{d_S} \omega(t)dt + 2\omega(d_S)\right) +$$

$$+ \sin\alpha \sup_{x \in D} \left|\overline{\nabla} f(x)\right|.$$

Здесь ∇ обозначает градиент дифференцируемой функции в метрике поверхности F.

Следствие 3. *Пусть $k = 3$ и $m = 0$, $i = 2$, $j = 1$. Обозначим через θ_S величину угла между вектором $p_2 - p_0$ и двумерной гранью, лежащей напротив вершины p_2, через φ_S величину угла при вершине p_1 треугольника $p_0p_1p_3$ и через d_S длину максимального ребра симплекса S. Тогда имеет место оценка*

$$\left|\left(\overline{\nabla} f(p_0) - \overline{\nabla} L_f(p_0)\right)^T\right| \leq \frac{8}{\sin\varphi_S \sin\theta_S}\left(\frac{1}{d_S}\int\limits_0^{d_S}\omega(t)dt + \omega(d_S)\right).$$

Следствие 4. *Пусть $k = 3$ и вершины тетраэдра S лежат на трехмерной гладкой поверхности $F \subset D \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что угол между плоскостью тетраэдра и касательной плоскостью к поверхности в точке p_0 равен α, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Если функция $f \in C^1(D)$, то*

$$|\nabla f(p_0) - \nabla L_f(p_0)| \leq \frac{8}{\sin\varphi_S \sin\theta_S}\left(\frac{1}{d_S}\int\limits_0^{d_S}\omega(t)dt + \omega(d_S)\right) +$$

$$+ \sin\alpha \sup_{x\in D}\left|\overline{\nabla} f(x)\right|.$$

2. Оценка погрешности аппроксимации для триангуляции Делоне плоских областей

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$ — область, в которой задана последовательность P_m конечных наборов точек. Для каждого такого набора рассмотрим его триангуляцию T_m.

Определение 1. *Триангуляцией T_m конечного набора точек P_m назовем набор непересекающихся между собой симплексов с вершинами из P_m, образующих покрытие участка пространства, ограниченного выпуклой оболочкой набора точек P_m.*

Определение 2. *Триангуляцию будем называть остроугольной, если для каждого симплекса углы между двумя любыми смежными его гранями острые.*

Определение 3. *Триангуляция набора точек называется триангуляцией Делоне, если описанная сфера всякого симплекса триангуляции не содержит внутри себя каких-либо точек из этого набора.*

Для всякого симплекса $S \in T_m$ длину максимальной его стороны обозначим d_S. Положим

$$d_m = \max_{S\in T_m} d_S.$$

Мы будем рассматривать такие наборы точек P_m и их триангуляций T_m, для которых выполнены условия:

$$d_m \to 0 \text{ при } m \to \infty. \tag{4}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ и } \forall x \in D\ \exists m_0 \in \mathbb{N} :\ \forall m > m_0\ \exists a \in P_m :\ |a - x| < \varepsilon. \tag{5}$$

Условие (5) означает, что P_m является ε-сетью при всех достаточно больших m.

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$, $x \in D$ класса $C^1(D)$ и для каждого m построим кусочно-аффинную функцию $f_m(x)$ такую, что $f_m(a) = f(a)$, для любой точки $a \in P_m$.

Заметим, что при выполнении условий (4) и (5) последовательность $f_m(x)$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на каждом компактном подмножестве $K \subset D$. Но эти условия не обеспечивают сходимости производных функций $f_m(x)$ к производным функции $f(x)$ даже почти всюду или в пространствах Соболева $W^{1,p}_{loc}(D)$. Это подтверждается хорошо известным примером Шварца [1].

Далее будем предполагать, что функция $f : D \to \mathbb{R}$ является C^2-гладкой в области $D \subset \mathbb{R}^n$, причем будем считать, что все вторые производные ограничены в D. Тогда найдется постоянная $M > 0$ такая, что модуль непрерывности градиента $\omega(t) \leq M \cdot t$.

Наша цель показать, что триангуляция Делоне и близкие к ней обладают, тем не менее, указанным выше аппроксимационным свойством в смысле сходимости градиента. Начнем с двумерного случая.

Для произвольного треугольника S с вершинами p_0, p_1, p_2 введем величину

$$\mu_S = \frac{d_S}{\sin \varphi_S},$$

где φ_S — величина максимального острого угла треугольника. Имеет место следующая лемма.

Лемма 5. *Если R_S обозначает радиус описанной окружности треугольника S, то справедливо неравенство*

$$\mu_S \leq 4R_S.$$

Отсюда получается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть задана триангуляция Делоне T конечного набора точек, являющегося ε-сетью в плоской области $D \subset \mathbb{R}^2$. Пусть точка p является вершиной триангуляции T такой, что для некоторого треугольника из T, имеющего вершиной эту точку, описанный круг полностью лежит в области D. Тогда*

$$|\nabla f(p) - \nabla L_f(p)| \leq 14M\varepsilon.$$

Следствие 5. *Для сходящейся последовательности функций $f_m(x)$, построенных над плоскими триангуляциями Делоне T_m, выполнено равенство*

$$\lim_{m\to\infty} \overline{\nabla} f_m(x) = \overline{\nabla} f(x). \tag{6}$$

3. Оценка погрешности аппроксимации для остроугольной триангуляции

В трехмерном евклидовом пространстве выполнение условия Делоне не гарантирует сходимости градиентов аппроксимации к градиентам исследуемой функции. Однако существует класс триангуляций (остроугольные триангуляции), для которого можно получить конечную оценку разности градиентов как следствие теоремы 3. Если мы будем рассматривать остроугольные триангуляции ε-сетей с узлами в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^3$, то при $\varepsilon \to 0$ оценка также устремится к нулю.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 6. *Пусть заданы три числа $0 < \lambda_i \leq \frac{\pi}{2} + \delta$, где $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$. Если $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geq \pi$, то хотя бы два из этих чисел не меньше, чем $\lambda_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$.*

Следствие 6. *Для остроугольного тетраэдра справедливы утверждения:*

1. *В любой вершине найдутся два двугранных угла не меньших* $\dfrac{\pi}{4}$.

2. *На любой грани найдутся два плоских угла не меньших* $\dfrac{\pi}{4}$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть задана остроугольная триангуляция T конечного набора точек, являющегося ε-сетью в области $D \subset \mathbb{R}^3$. Пусть точка p является вершиной триангуляции T. Тогда*

$$|\nabla f(p) - \nabla L_f(p)| \leq \frac{48M\varepsilon}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}.$$

Следствие 7. *Для сходящейся последовательности функций $f_m(x)$, $x \in D$, построенных над остроугольными триангуляциями T_m, выполнено равенство*

$$\lim_{m\to\infty} \overline{\nabla} f_m(x) = \overline{\nabla} f(x). \tag{7}$$

4. Оценка погрешности аппроксимации градиента для триангуляции с углами, отделенными от нуля

В евклидовых пространствах размерности больше трех, сходимость градиентов аппроксимации к градиентам исследуемой функции не удается проверить даже для остроугольных триангуляций. Тем не менее в работе [3] была приведена верхняя оценка разности градиентов в многомерном случае, некоторым образом зависящая от строения симплекса. В этом параграфе приведены некоторые условия, которым должны удовлетворять многомерные симплексы и триангуляции ε-сети для того, чтобы разность градиентов была ограничена и стремилась к нулю вместе с ε.

Рассмотрим некоторый n-мерный симплекс $S \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через S_i $(n-1)$-мерную его грань как $(n-1)$-мерный симплекс, построенный по точкам $p_0, \ldots, p_{i-1}$, $p_{i+1}, \ldots, p_n$. Кроме этого, с симплексом S свяжем ортонормированный базис $\{e_i^S\}$ как результат процесса ортогонализации Грамма-Шмидта векторов $\{p_i - p_0\}$, $i = 1, \ldots, n$. Положим

$$p_k - p_0 = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}^S e_i^T, \text{ где } a_{ki}^S \text{ — коэффициенты разложения.}$$

Причем, не ограничивая общности, можно считать, что $a_{kk}^S > 0$. Заметим, что $a_{ki}^S = 0$ при $i > k$. Пусть σ_{lk}^S обозначает площадь проекции грани S_l на плоскость Π_k^S, натянутую на векторы $e_1^S, \ldots, e_{k-1}^S, e_{k+1}^S, \ldots, e_n^S$.

Пусть φ_k обозначает угол между вектором $p_k - p_0$ и плоскостью, натянутой на векторы $e_1, \ldots, e_{k-1}$, $k = 2, \ldots, n$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, а θ_k обозначает угол между гранью S_k и плоскостью Π_k. В работе [3] доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. *Предположим, что для области $D \subset \mathbb{R}^n$, последовательности наборов точек P_m и их триангуляций T_m выполнены условия (4) и (5). Тогда для любой* *функции $f \in C^2(D)$ и любой компактно вложенной подобласти $U \subset\subset D$ имеет место неравенство*

$$\max_{S\in T_m,\, S\subset U}\max_{x\in S}|\nabla f(x)-\nabla f_m(x)| \le d_m\lambda\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|\sin\varphi_i|\,|\cos\theta_i|}\right), \tag{8}$$

где

$$\lambda = \frac{n^2}{2}\max_U\max_{1\le i,j\le n}\left|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}\right|.$$

Обозначим через ξ_i вектор нормали к грани S_i данного симплекса S. Не умаляя общности, будем считать, что симплекс S — евклидовый. Тогда $\cos\theta_i = \langle\xi_i,\, e_i\rangle$. По построению базиса $\{e_i\}$ имеем для некоторых α_{ik}

$$e_i = \sum_{k=1}^{i}\alpha_{ik}\left(p_k - p_0\right).$$

Заметим, что в силу геометрических соображений

$$\alpha_{ii} = \frac{1}{|p_i - p_0|\, sin\varphi_i}.$$

Обозначая через $|S_i|$ площадь соответствующей грани, будем иметь

$$\cos\theta_i = \frac{|S_i|\,\langle\xi_i,\, e_i\rangle}{|S_i|} = \sum_{k=1}^{i}\alpha_{ik}\frac{\langle|S_i|\,\xi_i,\,(p_k-p_0)\rangle}{|S_i|} = \frac{|S_i|\,\langle\xi_i,\, p_i-p_0\rangle}{\sin\varphi_i\,|p_i-p_0|\,|S_i|}.$$

Учитывая, что $|\langle\xi_i,\, p_i-p_0\rangle|$ совпадает с высотой симплекса, опущенной на основание S_i, окончательно получаем

$$\frac{1}{|\sin\varphi_i\cos\theta_i|} = \frac{|p_i-p_0|\,|S_i|}{V}, \tag{9}$$

где V — объем симплекса.

Поскольку объем симплекса есть произведение площади его основания на высоту, опущенную на него же, то оценка величины из утверждения 1 сведется к оценке отношения высоты симплекса к длине его ребра.

Итак, S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Мы будем предполагать, что ни один из его углов (как плоских, так и двугранных) не будет меньше некоторого заранее выбранного $\delta_S > 0$. Зафиксируем некоторую его вершину p и обозначим за d некоторое ребро симплекса, выходящее из p, а за h_n — высоту симплекса, опущенную из той же вершины. Единственную грань симплекса, не содержащую p, будем называть **основанием симплекса**.

Теорема 4. *Для любого невырожденного симплекса S в $\mathbb{R}^n$ триангуляции T отношение длины любого его ребра d, содержащего произвольную вершину p, к высоте симплекса h_n, опущенной из той же вершины, не превосходит $\dfrac{d_S}{d_S^\ell\sin^{n-1}\delta_S}$. Здесь d_S^ℓ — длина самого короткого ребра симплекса.*

Тогда, с учетом полученного результата и оценки (8), можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 5. *Предположим, что для области $D \subset \mathbb{R}^n$, последовательности наборов точек P_m их триангуляций T_m выполнены условия (4) и (5). Если, сверх того, найдется такая константа $1 \leq C < \infty$, что*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{d_m}{d_\ell} \leq C, \tag{10}$$

тогда для любой функции $f \in C^2(D)$ и любой компактно вложенной подобласти $U \subset\subset D$ имеет место равенство

$$\lim_{m\to\infty} \left|\overline{\nabla} f(x) - \overline{\nabla} f_m(x)\right| = 0. \tag{11}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гелбаум, Б. Контрпримеры в анализе / Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. — Волгоград : Платон, 1997. — 251 с.
2. Клячин, В. А. Триангуляция Делоне многомерных поверхностей / В. А. Клячин, А. А. Широкий // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественно-науч. сер. — 2010. — № 2010 / 4 (78). — С. 51–55.
3. Пабат, Е. А. Кусочно-линейное интерполирование поверхностей уровня функций, заданных на нерегулярных сетках / Е. А. Пабат, В. А. Клячин // Записки семинара «Сверхмедленные процессы». — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2008. — Вып. 3. — С. 157–167.
4. Delaunay, B. N. Sur la sphere vide. A la memoire de Georges Voronoï / B. N. Delaunay // Изв. АН СССР. — 1934. — № 6. — С. 793–800. — Записки семинара «Сверхмедленные процессы» / пер. с фр. А. Ю. Игумнова. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2008. — Вып. 1. — С. 147–153.

PRIOR ESTIMATION OF GRADIENTS' DIFFERENCE AND THEIR CONSEQUENCES

A.A. Shirokiy

This work presents estimations of gradients difference of piecewise affine approximation and C^1-differentiable function which is investigated with its aid in usual metrics and surface metrics. At first separate simplexes are estimated, then consequences are formulated for triangulation of ranges of definition of class function C^2.

Key words: *simplex, interpolation error, Delone triangulation, acute triangulation, function' gradient.*