www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2021.1.1

УДК 517.518.68
ББК 22.161.5

Дата поступления статьи: 12.02.2021
Дата принятия статьи: 04.03.2021

О СВЯЗИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТИПА СВЕРТКИ И НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Юсуфали Хасанович Хасанов

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры информатики и информационных систем,
Российско-Таджикский (Славянский) университет
yukhas60@mail.ru
ул. М. Турсунзаде, 30, 734025 г. Душанбе, Республика Таджикистан

Есуман Файзуллоевна Касымова

Аспирант кафедры информатики и информационных систем,
Российско-Таджикский (Славянский) университет
yosu95@inbox.ru
ул. М. Турсунзаде, 30, 734025 г. Душанбе, Республика Таджикистан

Аннотация. Рассматривается 2π-периодическая функция $f(x)$, принадлежащая пространству L_p $(1 \leq p \leq \infty)$ на периоде и преобразование типа свертки, содержащее некоторую действительную функцию ограниченной вариации на всей вещественной оси. Это преобразование представляет собой обобщение некоторых преобразований, связанных с различными характеристиками рассматриваемой функции. В порядке обобщения некоторых из результатов, касающихся особенностей интегральной метрики L_p $(1 < p < \infty)$, с учетом особенности случая $1 \leq p \leq \infty$, здесь исследуется вопрос о зависимости между этим преобразованием и наилучшими приближениями функции тригонометрическими полиномами. Получены оценки сверху и снизу для рассматриваемой свертки в зависимости от величины наилучшего приближения функций $f(x) \in L_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$.

Ключевые слова: периодическая функция, ряд Фурье, преобразование типа свертки, наилучшие приближения, преобразование Фурье, тригонометрические полиномы, коэффициенты Фурье, функции ограниченной вариации.

Введение

Пусть $X\{x\}$ — произвольное линейное нормированное пространство, в котором норма элементов $x \in X$ обозначается через $\|x\|_X$ и система элементов $\{x_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — заданная система линейных независимых элементов в этом пространстве. Тогда для каждого элемента $x \in X$ существует полином $\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu^{(0)} x_\nu$, для которого выполняется равенство

$$\|x - \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu^{(0)} x_\nu\|_X = \inf_{c_\nu} \|x - \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu x_\nu\|_X = E_n(x)_X.$$

Величина $E_n(x)_X$ называется наилучшим приближением элемента $x \in X$ порядка n полиномами $\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu x_\nu$ в метрике пространства X относительно системы элементов $\{x_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Под пространством L_p понимают совокупность 2π-периодических функций $f(x) \in L_p$, для которых $|f(x)|^p$ интегрируема по Лебегу с нормой

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \quad (1 \le p < \infty),$$

а при $p = \infty$

$$\|f\|_{L_\infty} = vrai \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)|.$$

Для пространств L_p $(1 \le p \le \infty)$ рассмотрим преобразования типа

$$F(f; y; x; h) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - uh) dy(u), \tag{1}$$

где $f(x) \in L_p$; h — произвольный параметр; $y(x)$ — произвольная функция ограниченной вариации на $(-\infty, \infty)$ тождественно не равна нулю и удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy(u) = 0, \;\; V(y) = \int_{-\infty}^{\infty} |dy(u)| < \infty.$$

Интегралы типа (1) представляют собой обобщение некоторых преобразований, связанных с различными изучаемыми обычно характеристиками функции $f(x)$.

Для преобразований (1) в работах [4] и [5] рассмотрена общая задача о возможных зависимостях

$$G(f; y; h; p) = \| \int_{-\infty}^{\infty} f(x - uh) dy(u) \|_{L_p} \tag{2}$$

для двух различных величин $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

В частности, в работе [5] установлено, что если $f(x) \in L_p$ $(1 \le p \le \infty)$, а $y_1(x)$, $y_2(x)$ две конечномерные на $(-\infty, \infty)$ функции, для которых при $l > 0$ выполнено условие $\widehat{y}_2(x) = x^l F(x)$, где $F(x)$ — преобразование Фурье некоторой меры $\rho(x)$, то имеет место неравенство

$$W(y_2; f; h)_{L_p} \le M(y_1, y_2, \rho) \left\{ \int_0^h W^\gamma(y_1; f; t)_{L_p} \frac{dt}{t} + h^\gamma \int_h^\infty W^\gamma(y_1; f; Bt)_{L_p} \frac{dt}{t^{\gamma l + 1}} \right\}^{\frac{1}{\gamma}},$$

где

$$W(y;f;h)_{L_p} = \sup_{|t|\le h} \|G(f;y;h;\rho)\|_{L_p},$$

$\gamma = \min(2,\rho)$ при $1 \le p < \infty$ и $\gamma = 1$, если $p = \infty$, а $M(y_1, y_2, \rho)$ и B — некоторые константы.

В 1970–1971 гг., продолжая и уточняя результаты работ [4] и [5], М.Ф.Тиман [3] получил точные по порядку оценки как сверху так и снизу для величины (2) в зависимости от наилучших приближений функции $f(x) \in L_p$ $(1 \le p \le \infty)$ и доказал следующее утверждение, которое будет полезным при установлении результатов данной статьи.

Теорема. [3] *Пусть*

$$\delta(n_\nu, h) = \sum_{\mu=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1} |\widehat{y}(\mu h) - \widehat{y}((\mu+1)h)| + |\widehat{y}(n_\nu h)|, \;\; \widehat{y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} exp(-iux)dy(u).$$

Тогда для каждой функции $f(x) \in L_p$ $(1 < p < \infty)$, *при любом* h $(0 < h < 1)$, *имеет место неравенство*

$$G(f;y;h;p) \le C(y,p) \left\{ \sum_{\nu=0}^{m} E^{\gamma}_{n_v-1}(f)_{L_p} \delta^{\gamma}(n_\nu h) + E^{\gamma}_{n_{m+1}-1}(f)_{L_p} \right\}^{\frac{1}{\gamma}}, \tag{3}$$

где $\gamma = \min(2,p)$, $n_0 = 1 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$; $\frac{n_{k+1}}{n_k} \ge q > 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $n_{m+1} \le \frac{1}{h}$; $C(y,p)$ — *константа, которая зависит только от* y *и* p.

1. Основные результаты

В этой статье мы приводим некоторые утверждения, которые дополняют, а в ряде случаев и уточняют результаты работ [3–5]. В порядке обобщения некоторых из результатов рассмотрим здесь вопрос о зависимости между величиной (1) и наилучшими приближениями $E_n(f)_{L_p}$, учитывая особенности случая, когда $1 \le p \le \infty$.

Теорема 1. *Пусть* 2π*–периодическая функция* $f(x) \in L_p$ $(1 \le p \le \infty)$. *Если* $E_n(f)_{L_p}$ — *величина наилучшего приближения функции* $f(x)$ *тригонометрическими полиномами порядка не выше* n *в метрике* L_p $(1 \le p \le \infty)$, *то справедлива оценка*

$$G(f;y;h;p) = \|F_y(f;x;h)\|_{L_p} \le 2E_0(f)_{L_p}\rho(1,h) + \\ + 2\sum_{k=0}^{m} E_{n_k}(f)_{L_p}\rho(n_k,h) + V(y)E_{n_{m+1}}(f)_{L_p}, \tag{4}$$

где

$$F_y(f;x;h) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-th)dy(t), \quad h = \frac{1}{n_{m+1}},$$

$$n_0 = 1 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots,$$

$$\rho(n_k,h) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\mu=1}^{n_k} \widehat{y}(\mu h)\cos\mu t \right| dt, \;\; V(y) = \int_{-\infty}^{\infty} |dy(t)|,$$

$$\widehat{y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} exp(-ixt)dy(t), \quad \int_{-\infty}^{\infty} dy(t) = 0, \quad \widehat{y}(-t) = \widehat{y}(t).$$

Теорема 2. *Если функция $f(x) \in L_p$ $(1 < p < \infty)$ имеет ряд Фурье*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

с монотонно убывающими коэффициентами $\{a_n, b_n\}$, то имеет место соотношение

$$G^p(f; y; h; p) \leq M(y,p) \left\{ \sum_{\nu=0}^{m} E^p_{2^\nu - 1}(f)_{L_p} \delta^p(2^\nu, h) + E^p_{2^{m+1}-1}(f)_{L_p} \right\}, \tag{5}$$

где

$$\delta(2^\nu, h) = \sum_{\mu=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} |\widehat{y}(\mu h) - \widehat{y}((\mu+1)h)| + |\widehat{y}(2^\nu h)| \ \ (h = \frac{1}{2^{m+1}}),$$

$$\widehat{y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} exp(-ixt) dy(t), \ \ \int_{-\infty}^{\infty} dy(t) = 0, \quad \widehat{y}(-t) = \widehat{y}(t).$$

В некотором отношении обратным к теореме 2 является следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть коэффициенты Фурье 2π–периодической функции $f(x) \in L_p$ $(1 < < p < \infty)$ монотонно убывают и при $h = 2^{-(m+1)}$ функция $\widehat{y}(t)$ удовлетворяет условиям*

$$H(\mu, \nu; h) = \begin{cases} |\widehat{y}(\mu h)|^{-p} \sum_{k=0}^{\nu-1} |\widehat{y}(2^k h)|^p, & 2^{\nu-1} \leq \mu \leq 2^\nu - 1, \ \ (\nu = 1, 2, ..., m+1), \\ 0, & \mu > 2^{m+1}; \end{cases}$$

$$H(\mu; \nu; h) \leq C, \ \ \sum_{\mu=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} |H(\mu; \nu; h) - H(\mu+1; \nu; h)| \leq C \ \ (\nu = 1, 2, ..., m+1).$$

Тогда справедлива оценка

$$\sum_{k=0}^{m} |\widehat{y}(2^k h)|^p E^p_{2^k - 1}(f)_{L_p} \leq C_1(y,p) \{G^p(f; y; h; p) + E^p_{2^{m+1}-1}(f)_{L_p}\}, \tag{6}$$

где константа $C_1(y,p)$ не зависит от h и функции $f(x)$.

Заметим, что теорема 1 для случая пространства L_p $(p = \infty)$ приведена в работе [3]. Теоремы 2 и 3 уточняют оценку (3), содержащуюся в [3], и оценку

$$\sum_{k=0}^{m} |\widehat{y}(2^k h)|^\gamma E^\gamma_{2^k - 1}(f)_{L_p} \leq C_1(y,p) \{G^\gamma(f; y; h; p) + E^\gamma_{2^{m+1}-1}(f)_{L_p}\}, \tag{7}$$

где $\gamma = \max(2, p)$. Оценка (7) также приведена в работе [3] для функций с произвольными коэффициентами Фурье.

Указанные уточнения касаются возможности замены показателя γ в оценках (3) и (7) на $\gamma = p$ для случая функций с монотонными коэффициентами Фурье.

2. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим последовательность тригонометрических полиномов $\{T_{n_k}(x)\}$, которые осуществляют наилучшие приближения порядка не выше n функции $f(x)$ в метрике пространства L_p. Тогда, так как

$$T_{n_{m+1}} = T_{n_0} + \sum_{k=0}^{m} \{T_{n_{k+1}} - T_{n_k}\},$$

то

$$F_y(T_{n_{m+1}}; x; h) = F_y(T_1; x; h) + \sum_{k=0}^{m} F_y\{T_{n_{k+1}} - T_{n_k}; x; h\}.$$

Отсюда, благодаря неравенству Минковского, находим, что

$$\|F_y(T_{n_{m+1}}; x; h)\|_{L_p} \le \|F_y(T_1; x; h)\|_{L_p} + \sum_{k=0}^{m} \|F_y\{T_{n_{k+1}} - T_{n_k}; x; h\}\|_{L_p},$$

а для величины $G(T_{n_{m+1}}; y; h; p)$ получим неравенство

$$G(T_{n_{m+1}}; y; h; p) \le G(T_1; y; h; p) + \sum_{k=0}^{m} G\{T_{n_{k+1}} - T_{n_k}; y; h; p\}. \tag{8}$$

Докажем, что для каждого полинома $T_n(x)$ выполняется следующее неравенство

$$G(T_n; y; h; p) \le \|T_n(x)\|_{L_p} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} \widehat{y}(kh) \cos kt \right| dt = \|T_n(x)\|_{L_p} \rho(n, h). \tag{9}$$

Действительно, пусть

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k exp(ikx),$$

тогда

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} T_n(t) exp(-ikt) dt,$$

$$F_y(T_n; x; h) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{y}(kh) c_k exp(-ikx) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{y}(kh) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_n(t) exp(-ikt) dt exp(ikx),$$

или

$$F_y(T_n; x; h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} T_n(x+t) \sum_{k=-n}^{n} \widehat{y}(kh) exp(ikt) dt.$$

Отсюда, применяя обобщенное неравенство Минковского, получим искомое соотношение (9).

В силу оценок (8) и (9) будем иметь

$$G(T_{n_{m+1}}; y; h; p) \le G(T_1; y; h; p) + \sum_{k=0}^{m} \|T_{n_{k+1}} - T_{n_k}\|_{L_p} \rho(n_k, h).$$

Так как $\int_{-\infty}^{\infty} dy(t) = 0$, то

$$G(T_1; y; h; p) = G(T_1 - T_0; y; h; p).$$

Пусть для тригонометрических полиномов $\{T_{n_k}(x)\}$, которые осуществляют наилучшие приближения порядка $\leq n$ функции $f(x) \in L_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$, имеем $\|f - - T_n\|_{L_p} = E_n(f)_{L_p}$. Тогда

$$\|T_{n_{k+1}} - T_{n_k}\|_{L_p} \leq \|T_{n_{k+1}} - f\|_{L_p} + \|f - T_{n_k}\|_{L_p} \leq 2E_{n_k}(f)_{L_p}.$$

Следовательно, благодаря этой оценке получим

$$G(T_{n_{m+1}}; y; h; p) \leq G(T_1 - T_0; y; h; p) + \sum_{k=0}^{m} \|T_{n_{k+1}} - T_{n_k}\|_{L_p} \rho(n_k, h) \leq$$

$$\leq 2E_0(f)_{L_p}\rho(1, h) + 2\sum_{k=0}^{m} E_{n_k}(f)_{L_p}\rho(n_k, h). \tag{10}$$

В силу неравенства Минковского имеем

$$G(f; y; h; p) \leq G(f - T_{n_{m+1}}; y; h; p) + G(T_{n_{m+1}}; y; h; p). \tag{11}$$

Кроме того,

$$G(f - T_{n_{m+1}}; y; h; p) \leq V(y)E_{n_{m+1}}(f)_{L_p}. \tag{12}$$

Из оценок (11), (10) и (12) вытекает неравенство (4). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Не нарушая общности, можно доказать оценку (5), считая, что рассматриваемая функция $f(x)$ является четной и имеет ряд Фурье вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Тогда

$$G(f; y; h; p) = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} f(x - ht)dy(t) \right\|_{L_p} = \left\| \sum_{\nu=1}^{\infty} \widehat{y}(h\nu)a_\nu \cos \nu x \right\|_{L_p}, \tag{13}$$

где функция $\widehat{y}(x)$ была определена в формулировке теоремы.
После применения неравенства Минковского в (13), будем иметь

$$G(f; y; h; p) \leq \left\| \sum_{\nu=1}^{2^{m+1}-1} \widehat{y}(h\nu)a_\nu \cos \nu x \right\|_{L_p} + \left\| \sum_{\nu=2^{m+1}}^{\infty} \widehat{y}(h\nu)a_\nu \cos \nu x \right\|_{L_p} = S_1 + S_2. \tag{14}$$

Заметим, что при $p < 2$ неравенство (5) превращается в неравенство (3).

Для $p > 2$, в силу известного неравенства Пэли (см. [1, с. 182]), которое имеет вид

$$\|f(x)\|_{L_p} \leq C_p \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p n^{p-2} \right\}^{\frac{1}{p}},$$

находим, что

$$S_2^p = \left\| \sum_{\nu=2^{m+1}}^{\infty} \widehat{y}(h\nu) a_\nu \cos \nu x \right\|_{L_p}^p \le B_p \sum_{\nu=2^{m+1}}^{\infty} |\widehat{y}(h\nu)|^p a_\nu^p \nu^{p-2} \le V(y) B_p \sum_{\nu=2^{m+1}}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2},$$

где $V(y) = \int_{-\infty}^{\infty} |dy(t)|$.
Кроме того, А. Конюшковым (см. [2, с. 63]) установлено, что

$$\sum_{\nu=2^{m+1}}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2} \le C_p E_{2^{m+1}}^p (f)_{L_p}.$$

Следовательно, в силу этого неравенства, получим

$$S_2^p \le M_p V(y) E_{2^{m+1}}^p (f)_{L_p}. \tag{15}$$

Теперь для первого слагаемого в правой части (14), при $p > 2$, применяем неравенство Пэли и получим

$$S_1^p = \left\| \sum_{\nu=1}^{2^{m+1}-1} \widehat{y}(h\nu) a_\nu \cos \nu x \right\|_{L_p}^p \le B_p \sum_{\nu=1}^{2^{m+1}-1} |\widehat{y}(h\nu)|^p a_\nu^p \nu^{p-2} = B_p \sum_{\nu=0}^{m} \sum_{\mu=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} |\widehat{y}(h\mu)|^p a_\nu^p \nu^{p-2}.$$

Обозначая для краткости

$$\Delta_k = \sum_{k=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} a_k^p k^{p-2} |\widehat{y}(kh)|^p, \;\; r_k = \sum_{\mu=k}^{\infty} a_\mu^p \mu^{p-2}, \quad \beta_k = |\widehat{y}(kh)|^p,$$

мы можем написать

$$\Delta_k = \sum_{k=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} (r_k - r_{k+1}) \beta_k = r_{2^\nu} \beta_{2^\nu} + \sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}-1} r_k (\beta_k - \beta_{k-1}) + r_{2^{\nu+1}} \beta_{2^{\nu+1}-1}.$$

Подставляя вместо r_k и β_k их выражения в последнем тождестве, получаем

$$\Delta_k = |\widehat{y}(2^\nu h)|^p \sum_{k=2^\nu}^{\infty} a_k^p k^{p-2} + \sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}-1} \left(\sum_{\mu=k}^{\infty} a_\mu^p \mu^{p-2} \right) (|\widehat{y}(\mu h)|^p - |\widehat{y}((\mu-1)h)|^p) -$$

$$- \left(\sum_{k=2^{\nu+1}}^{\infty} a_\mu^p \mu^{p-2} \right) |\widehat{y}((2^{\nu+1}-1)h)|^p.$$

Так как коэффициенты Фурье функции $f(x)$ монотонно убывают, то с помощью неравенства А. Конюшкова (см. [2, с. 63]), имеем

$$r_k = \sum_{\mu=k}^{\infty} a_\mu^p \mu^{p-2} \le C_p E_k^p (f)_{L_p}.$$

Поэтому

$$\Delta_k \le B_p C_p \left\{ |\widehat{y}(2^{\nu}h)|^p E^p_{2^{\nu}-1}(f)_{L_p} + \sum_{k=2^{\nu}+1}^{2^{\nu+1}-1} E^p_{k-1}(f)_{L_p} |\widehat{y}(kh)|^p - |\widehat{y}((k-1)h)|^p \right\}.$$

Отсюда следует, что

$$S_1^p \le C(y,p) \left\{ \sum_{\nu=0}^{m} |\widehat{y}(2^{\nu}h)|^p E^p_{2^{\nu}-1}(f)_{L_p} + \sum_{\nu=0}^{m} \sum_{k=2^{\nu}+1}^{2^{\nu+1}-1} E^p_{k-1}(f)_{L_p} |\widehat{y}(kh)|^p - |\widehat{y}((k-1)h)|^p \right\}. \tag{16}$$

Подставляя соотношения (15) и (16) в (14), получаем оценку (5), что и заканчивает доказательство теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим величину

$$U_m(f;\widehat{y};h) = \left\{ \sum_{k=0}^{m} E^p_{2^k-1}(f)_{L_p} |\widehat{y}(2^k h)|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (1 < p < 2).$$

Из теоремы М. Рисса (см., например, [2, с. 55]) следует, что при $1 < p < \infty$

$$\|f(x) - \sum_{\mu=0}^{n} A_{\mu}(x)\|_{L_p} \le C_p E_n(f)_{L_p},$$

где $A_{\mu}(x)$ — коэффициенты Фурье функции $f(x) \in L_p$; C_p — константа, зависящая лишь от p.
Воспользовавшись этим соотношением, будем иметь

$$U_m^p(f;\widehat{y};h) \le C_p \sum_{k=0}^{m} |\widehat{y}(2^k h)|^p \| \sum_{\mu=2^k}^{\infty} A_{\mu}(x)\|^p_{L_p} = C_p \sum_{k=0}^{m} |\widehat{y}(2^k h)|^p \| \sum_{\nu=k}^{\infty} \Delta_{\nu}(f;x)\|^p_{L_p}, \tag{17}$$

где

$$\Delta_{\nu}(f;x) = \sum_{\mu=2^{\nu}}^{2^{\nu+1}-1} A_{\mu}(x).$$

Применяя неравенство Литтльвуда — Пэли (см. [1, с. 315]) ко второй сумме в правой части (17), получим

$$\left\| \sum_{\nu=k}^{\infty} \Delta_{\nu}(f;x) \right\|^p_{L_p} \le C_p \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=k}^{\infty} |\Delta_{\nu}(f;x)|^2 \| \right)^{\frac{p}{2}} dx.$$

Тогда при $(1 < p < 2)$ соотношение (17) принимает вид

$$U_m^p(f;\widehat{y};h) \le \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{m} |\widehat{y}(2^k h)|^p \sum_{\nu=k}^{\infty} |\Delta_{\nu}(f;x)|^p dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{m} |\widehat{y}(2^k h)|^p \sum_{\nu=k}^{m} |\Delta_\nu(f;x)|^p dx + \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{m} |\widehat{y}(2^k h)|^p \sum_{\nu=m+1}^{\infty} |\Delta_\nu(f;x)|^p dx = I_1 + I_2. \tag{18}$$

Оценим I_1. С этой целью переставляя порядок суммирования, находим, что

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{m} |\widehat{y}(2^k h)|^p \sum_{\nu=k}^{m} |\Delta_\nu(f;x)|^p dx = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{m} |\Delta_k(f;x)|^p \sum_{\mu=0}^{k} |\widehat{y}(2^\mu h)|^p dx.$$

Применяя известную теорему Марцинкевича о мультипликаторах в периодическом случае (см. [1, с. 168]), с учетом условий теоремы для величины $\widehat{y}(t)$, получим

$$I_1 \le C_p \int_0^{2\pi} \sum_{\mu=1}^{2^{m+1}-1} |\widehat{y}(\mu h) A_\mu(x)|^p dx.$$

Благодаря тому, что частичные суммы рядов Фурье в пространствах L_p $(1 < p < \infty)$ за порядком не больше нормы функции, находим, что

$$I_1 \le C_p \|F_y(f;x;h)\|_{L_p}^p = C_p G^p(f;y;h;p).$$

Теперь оценим второе слагаемое I_2.

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{m} |\widehat{y}(2^k h)|^p \sum_{\nu=m+1}^{\infty} |\Delta_\nu(f;x)|^p dx \le E^p_{2^{m+1}-1}(f)_{L_p} \sum_{k=0}^{m} |\widehat{y}(2^k h)|^p \le$$

$$\le E^p_{2^{m+1}-1}(f)_{L_p} |\widehat{y}(mh)|^p \le V(\widehat{y})^p E^p_{2^{m+1}-1}(f)_{L_p}.$$

Таким образом, благодаря оценкам величин I_1, I_2, из соотношения (18) следует утверждение теоремы.

Выводы

Заметим, что в случае, когда $p > 2$, для любой системы чисел c_n известно неравенство

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \le \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

а для $1 < p < 2$

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \le \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Из этих замечаний вытекает, что оценка (5) по порядку лучше, чем оценки (3), а оценка (6) за порядком лучше, чем

$$\sum_{k=0}^{m} |\widehat{y}(2^k h)|^\gamma E^\gamma_{2^k-1}(f)_{L_p} \le C(y,p)\{G^\gamma(f;y;h;p) + E^\gamma_{2^{m+1}-1}(f)_{L_p}\},$$

которая приведена в работе [3], где $\gamma = \max(2,p)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды. Т. 2 / А. Зигмунд. — М. : Мир, 1965. — 375 с.
2. Конюшков, А. А. Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье / А. А. Конюшков // Мат. сб. — 1958. — Т. 44, № 11. — С. 53–84.
3. Тиман, М. Ф. Наилучшие приближения периодических функций тригонометрическими полиномами и преобразование типа свертки / М. Ф. Тиман // ДАН СССР. — 1971. — Т. 198, № 4. — С. 776–779.
4. Shapiro, H. S. A tauberian theorem related to approximation theory / H. S. Shapiro // Acta math. — 1968. — Vol. 120, № 3-4. — P. 279–292.
5. Shapiro, H. S. Compaison theorems for a generalized modules of continuity / H. S. Shapiro // Bull. Amer. Math. Soc. — 1969. — Vol. 75, № 6. — P. 1266–1268.

REFERENCES

1. Zigmund A. *Trigonometricheskie ryady. T. 2* [Trigonometric Series. Vol. 2]. Moscow, Mir Publ., 1965. 375 p.
2. Konyushkov A.A. Nailuchshie priblizheniya trigonometricheskimi polinomami i koeffitsienty Furye [Best Approximations by Trigonometric Polynomials and Fourier Coefficients]. *Mat. sb.*, 1958, vol. 44, no. 11, pp. 53-84.
3. Timan M.F. Nailuchshie priblizheniya periodicheskikh funktsiy trigonometricheskimi polinomami i preobrazovanie tipa svertki [Best Approximations of Periodic Functions by Trigonometric Polynomials and Convolution Type Transformations]. *DAN SSSR*, 1971, vol. 198, no. 4, pp. 776-779.
4. Shapiro H.S. A Tauberian Theorem Related to Approximation Theory. *Acta math.*, 1968, vol. 120, no. 3-4, pp. 279-292.
5. Shapiro H.S. Compaison Theorems for a Generalized Modules of Continuity. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1969, vol. 75, no. 6, pp. 1266-1268.

ON THE RELATIONSHIP OF A CONVOLUTION TYPE TRANSFORMATION AND THE BEST APPROXIMATION OF PERIODIC FUNCTIONS

Yusufali Kh. Khasanov

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Department of Informatics and Information Systems,
Russian and Tajik Slavonic University
yukhas60@mail.ru
M. Tursunzade St, 30, 734025 Dushanbe, Republic of Tajikistan

Yosuman F. Kasimova

Postgraduate Student, Department of Informatics and Information Systems,
Russian and Tajik Slavonic University
yosu95@inbox.ru
M. Tursunzade St, 30, 734025 Dushanbe, Republic of Tajikistan

Abstract. The space L_p is understood as the collection of 2π periodic functions $f(x) \in L_p$, for which $|f(x)|^p$ is Lebesgue integral with the norm

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty),$$

for $p = \infty$

$$\|f\|_{L_\infty} = vrai \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|.$$

For spaces, consider L_p $(1 \le p \le \infty)$ transformations of the type

$$F(f;y;x;h) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-uh)dy(u),$$

where $f(x) \in L_p$, h is an arbitrary parameter, and $y(x)$ is an arbitrary function of bounded variation at $(-\infty,\infty)$ is not identically zero and satisfies the conditions

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy(u) = 0, \;\; V(y) = \int_{-\infty}^{\infty} |dy(u)| < \infty.$$

For transformations $F(f;y;x;h)$ in the works of H.S. Shapiro and J. Boman the general problem of possible dependencies is considered

$$G(f;y;h;p) = \| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-uh)dy(u)\|_{L_p}$$

for two different values $y_1(x)$ and $y_2(x)$.

In particular, if $f(x) \in L_p$ $(1 \le p \le \infty)$, and $y_1(x)$, $y_2(x)$ are two finite-dimensional on $(-\infty,\infty)$ functions for which, for $l > 0$ the condition $\widehat{y_2}(x) = x^l F(x)$, where $F(x)$ is the Fourier transform of some measure $\rho(x)$, then the inequality

$$W(y_2;f;h)_{L_p} \le M(y_1,y_2,\rho)\left\{\int_0^h W^\gamma(y_1;f;t)_{L_p}\frac{dt}{t} + h^\gamma \int_h^\infty W^\gamma(y_1;f;Bt)_{L_p}\frac{dt}{t^{\gamma l+1}}\right\}^{\frac{1}{\gamma}},$$

where

$$W(y;f;h)_{L_p} = \sup_{|t|\le h} \|G(f;y;h;\rho)\|_{L_p},$$

$\gamma = \min(2,\rho)$ for $1 \le p < \infty$ and $\gamma = 1$, if $p = \infty$, and $M(y_1,y_2,\rho)$ и B — are some constants.

Continuing and refining the results of H.S. Shapiro and J. Boman, M.F. Timan obtained order-sharp estimates both from above and below for the value $F(f;y;x;h)$ depending on the values of the best approximations of the function $f(x) \in L_p$ $(1 \le p \le \infty)$.

In this work, a number of results were obtained, which complement in some cases and refine the results of the above works of the authors. In order to generalize some of the results, the question of the relationship between the quantity $F(f;y;x;h)$ and best approximations $E_n(f)_(L_p)$ is studied.

Key words: periodic function, Fourier series, convolution type transformation, best approximations, Fourier transform, trigonometric polynomials, Fourier coefficients, bounded variation functions.