УДК 514.75
ББК 22.151

ОБ АНАЛОГЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДАРБУ В МНОГОМЕРНЫХ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Бодренко Ирина Ивановна

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры фундаментальной информатики и оптимального управления
Волгоградского государственного университета
bodrenko@mail.ru
Проспект Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. На гиперповерхностях F^n $(n \geq 2)$ с ненулевой гауссовой кривизной $K \neq 0$ в евклидовом пространстве E^{n+1} вводится симметрический ковариантный тензор третьей валентности $\Theta_{(n)}$. В случае $n = 2$ тензор $\Theta_{(n)}$ совпадает с тензором Дарбу Θ, определенным на двумерных поверхностях F^2 с ненулевой гауссовой кривизной $K \neq 0$ в E^3: $\Theta_{(2)} \equiv \Theta$. В работе изучаются свойства гиперповерхностей F^n с ненулевой гауссовой кривизной $K \neq 0$ в евклидовом пространстве E^{n+1}, на которых выполняется условие $\Theta_{(n)} \equiv 0$, при произвольном n.

Ключевые слова: тензор Дарбу, поверхность Дарбу, гауссова кривизна, вторая фундаментальная форма, гиперповерхность, многомерное евклидово пространство.

Введение

Пусть E^{n+1} — $(n+1)$-мерное $(n \geq 2)$ евклидово пространство с декартовыми прямоугольными координатами $(x^1, x^2, \ldots, x^{n+1})$, $<,>$ — скалярное произведение в E^{n+1}.

Пусть F^n — n-мерная связная поверхность в E^{n+1}, заданная в окрестности каждой своей точки $x \in F^n$ уравнениями

$$x^\alpha = \phi^{(\alpha)}(u^1, \ldots, u^n), \quad (u^1, \ldots, u^n) \in U, \quad \alpha = \overline{1, n+1},$$

где U — некоторая область параметрического пространства $(u^1, \ldots, u^n)$, $\phi^{(\alpha)} \in C^3(U)$. Векторное параметрическое уравнение $F^n \subset E^{n+1}$ имеет вид

$$\vec{r} = \vec{r}(u^1, \ldots, u^n) = \{\phi^{(1)}(u^1, \ldots, u^n), \ldots, \phi^{(n)}(u^1, \ldots, u^n), \phi^{(n+1)}(u^1, \ldots, u^n)\}.$$

Обозначим

$$\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}(u^1, \ldots, u^n)}{\partial u^i}, \quad \vec{r}_{ij} = \frac{\partial^2 \vec{r}(u^1, \ldots, u^n)}{\partial u^i \partial u^j}.$$

Пусть $\vec{n} = \vec{n}(u^1, \ldots, u^n)$ — единичный вектор нормали к F^n в окрестности точки x,

$$g_{ij} =< \vec{r}_i, \vec{r}_j >, \quad b_{ij} =< \vec{r}_{ij}, \vec{n} > \; -$$

коэффициенты первой и второй квадратичных форм гиперповерхности $F^n \subset E^{n+1}$ соответственно. Обозначим через Γ^m_{ij} и ∇_i соответственно символы Кристоффеля и операцию ковариантного дифференцирования, вычисленные относительно тензора g_{ij}.

Пусть $k_1(x), \ldots, k_n(x)$ — главные кривизны F^n в точке $x \in F^n$. Обозначим через K гауссову кривизну гиперповерхности $F^n \subset E^{n+1}$, тогда $K(x) = k_1(x)k_2(x)\ldots k_n(x)$ $\forall x \in F^n$.

Пусть на F^n выполняется условие: $K(x) \neq 0 \; \forall x \in F^n$. Определим на $F^n \subset E^{n+1}$ симметрический ковариантный тензор третьей валентности $\Theta_{(n)}$ формулой:

$$\underset{(n)}{\Theta_{ijm}} = \nabla_m b_{ij} - \frac{b_{ij}\nabla_m K + b_{jm}\nabla_i K + b_{mi}\nabla_j K}{(n+2)K}, \qquad i,j,m = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Замечание. В работе [3] на n-мерных поверхностях F^n $(n \geq 2)$ в евклидовом пространстве E^{n+p} $(p \geq 1)$ введен другой аналог тензора Дарбу. Обобщенный тензор Дарбу (см.: [3, с. 108, (3)]) — это ковариантный тензор шестой валентности $\Theta_{ijk,lmt}$, симметричный по группам индексов (i,j,k) и (l,m,t), тождественное обращение в ноль которого характеризует обобщенные поверхности Дарбу. В [3] дается классификация двумерных обобщенных поверхностей Дарбу F^2 в евклидовом пространстве E^{2+p} при произвольном p.

Обозначим через $\mathcal{D}_{(n)}$ множество гиперповерхностей F^n $(n \geq 2)$ с ненулевой гауссовой кривизной $K \neq 0$ в евклидовом пространстве E^{n+1}, на которых выполняется тождество

$$\underset{(n)}{\Theta_{ijm}} \equiv 0, \qquad i,j,m = \overline{1,n}, \tag{2}$$

Замечание. На двумерных поверхностях F^2 с ненулевой гауссовой кривизной $K \neq 0$ в евклидовом пространстве E^3 тензор Дарбу Θ — симметрический ковариантный тензор третьей валентности, определяется формулой

$$\Theta_{ijm} = \nabla_m b_{ij} - \frac{b_{ij}\nabla_m K + b_{jm}\nabla_i K + b_{mi}\nabla_j K}{4K}, \qquad i,j,m = 1,2.$$

Условие $\Theta \equiv 0$ является характеристическим признаком поверхностей Дарбу в E^3 — двумерных поверхностей второго порядка, не развертывающихся на плоскость.

Тензор $\Theta_{(n)}$, определенный в случае $n = 2$ формулой (1) на двумерных поверхностях F^2 ненулевой гауссовой кривизны $K \neq 0$ в E^3, совпадает с тензором Дарбу: $\Theta_{(2)} \equiv \Theta$. Таким образом, множество $\mathcal{D}_{(2)}$ исчерпывается поверхностями Дарбу в E^3.

Определение 1. *Вторая квадратичная форма b гиперповерхности F^n в евклидовом пространстве E^{n+1} называется циклически рекуррентной, если на F^n существует 1-форма μ такая, что выполняются соотношения:*

$$\nabla_m b_{ij} = \mu_m b_{ij} + \mu_i b_{jm} + \mu_j b_{mi}, \quad i,j,m = \overline{1,n}, \tag{3}$$

где $\mu_i = \mu_i(u^1, \ldots, u^n)$ — коэффициенты 1-формы $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i du^i$ в окрестности точки x.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если гиперповерхность F^n с ненулевой гауссовой кривизной $K \neq 0$ в евклидовом пространстве E^{n+1} имеет циклически рекуррентную вторую фундаментальную форму, то F^n принадлежит множеству $\mathcal{D}_{(n)}$.*

Замечание. В работе [2] доказано, что всякая невырожденная n-мерная $(n \geq 2)$ гиперповерхность второго порядка в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве E^{n+1} имеет циклически рекуррентную вторую фундаментальную форму.

Если гиперповерхность $F^n \subset E^{n+1}$ принадлежит множеству $\mathcal{D}_{(n)}$, то F^n имеет циклически рекуррентную вторую фундаментальную форму. При этом существуют гиперповерхности F^n нулевой гауссовой кривизны $K \equiv 0$ в евклидовом пространстве E^{n+1} с циклически рекуррентной второй фундаментальной формой. Примером является n-мерная цилиндрическая гиперповерхность в E^{n+1} с одномерной базой F^1 ненулевой кривизны в E^2.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Гиперповерхность F^n с ненулевой гауссовой кривизной $K \neq 0$ в евклидовом пространстве E^{n+1} принадлежит множеству $\mathcal{D}_{(n)}$ тогда и только тогда, когда на F^n в окрестности каждой точки $x \in F^n$ существуют координаты кривизны $(u^1, \ldots, u^n)$ такие, что выполняются соотношения*

$$K = \psi_{(i)}(u^i)k_i^{n+2},\ K^3 = \frac{k_i^{n+2}}{\psi_{(1)}(u^1)\ldots\psi_{(i-1)}(u^{i-1})\psi_{(i+1)}(u^{i+1})\ldots\psi_{(n)}(u^n)},\ i = \overline{1,n}, \tag{4}$$

где $\psi_{(i)}(u^i) \neq 0$, $i = \overline{1,n}$, — некоторые функции.

1. Гиперповерхности с циклически рекуррентной второй фундаментальной формой в евклидовом пространстве

Лемма 1. *Если гиперповерхность $F^n \subset E^{n+1}$ с ненулевой гауссовой кривизной $K \neq 0$ имеет циклически рекуррентную вторую фундаментальную форму, то 1-форма μ является точной дифференциальной формой: $\mu = df$, где функция f определена равенством*

$$f = \frac{1}{n+2}\ln|K|. \tag{5}$$

Доказательство. Гиперповерхность F^n в евклидовом пространстве E^{n+1} имеет n главных направлений $\{Y_t\}_{t=1}^n$ в каждой точке. Из условия (3) для главных направлений $\{Y_t\}_{t=1}^n$ имеем

$$\nabla_{Y_m}b(Y_i, Y_j) = \mu(Y_m)b(Y_i, Y_j) + \mu(Y_i)b(Y_j, Y_m) + \mu(Y_j)b(Y_m, Y_i), \quad i, j, m = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Учитывая, что главные направления $\{Y_t\}_{t=1}^n$ попарно ортогональны и сопряжены, из (6) находим

$$\nabla_{Y_m}b(Y_i, Y_j) = 0, \quad i \neq j \neq m \neq i. \tag{7}$$

В работе [1] установлены условия голономности главных направлений n-мерных подмногообразий F^n в евклидовом пространстве E^{n+p}. Согласно признаку голономности главных направлений подмногообразия (см.: [1, с. 544, (1)]), из уравнений (7) следует, что в окрестности точки $x \in F^n$ можно ввести локальные координаты $(u^1, \ldots, u^n)$ такие, что

$$\frac{\partial}{\partial u^1} = Y_1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial}{\partial u^n} = Y_n.$$

Условие (3) равносильно следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered} \nabla_i b_{ii} = 3\mu_i b_{ii}, \quad \nabla_j b_{ii} = \mu_j b_{ii} + 2\mu_i b_{ij}, \quad i \neq j, \\ \nabla_m b_{ij} = \mu_m b_{ij} + \mu_i b_{jm} + \mu_j b_{mi}, \quad i \neq j \neq m \neq i, \end{gathered} \tag{8}$$

где в силу уравнений Петерсона — Кодацци выполнены равенства:

$$\nabla_j b_{ii} = \nabla_i b_{ij}, \quad \nabla_m b_{ij} = \nabla_i b_{jm} = \nabla_j b_{mi}, \quad i, j, m = \overline{1, n}.$$

Не ограничивая общности, введем в окрестности $O(x)$ точки $x \in F^n$ координаты кривизны $(u^1, \ldots, u^n)$. В координатах $(u^1, \ldots, u^n)$ основные квадратичные формы гиперповерхности F^n записываются так:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n g_{ii}(du^i)^2, \quad II = \sum_{i=1}^n b_{ii}(du^i)^2.$$

Тогда в $O(x)$ система (8) приводится к виду

$$\frac{\partial b_{ii}}{\partial u^i} - \frac{b_{ii}}{g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial u^i} = 3\mu_i b_{ii}, \qquad \frac{\partial b_{jj}}{\partial u^i} - \frac{b_{jj}}{g_{jj}} \frac{\partial g_{jj}}{\partial u^i} = \mu_i b_{jj}, \quad j \neq i. \tag{9}$$

В $O(x)$ для главных кривизн k_m имеем:

$$k_m = \frac{b_{mm}}{g_{mm}} \neq 0, \quad m = \overline{1, n}. \tag{10}$$

Учитывая (10), из (9) получим

$$\frac{\partial \ln |k_i|}{\partial u^i} = 3\mu_i, \qquad \frac{\partial \ln |k_j|}{\partial u^i} = \mu_i, \quad i \neq j.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \ln |k_j|}{\partial u^i} = (n+2)\mu_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Отсюда, учитывая, что гауссова кривизна $K = k_1 \ldots k_n \neq 0$, имеем

$$\frac{\partial \ln |K|}{\partial u^i} = (n+2)\mu_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, в окрестности $O(x)$ произвольной точки $x \in F^n$ 1-форма μ записывается в виде

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i du^i = \frac{1}{n+2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln |K|}{\partial u^i} du^i = \frac{1}{n+2} \mathrm{d} \ln |K|,$$

и мы приходим к равенству (5).

Лемма 1 доказана.

2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Не ограничивая общности, введем в окрестности $O(x)$ произвольной точки $x \in F^n$ координатную сеть линий кривизны $(u^1, \ldots, u^n)$.

В силу леммы 1 в $O(x)$ имеем

$$\nabla_m b_{ij} = \mu_m b_{ij} + \mu_i b_{jm} + \mu_j b_{mi}, \quad i, j, m = \overline{1, n}, \tag{11}$$

где 1-форма $\mu = df$, функция f определена равенством (5).

Учитывая (5), запишем уравнения (11) в следующем виде:

$$\nabla_m b_{ij} = \frac{b_{ij} \nabla_m K + b_{jm} \nabla_i K + b_{mi} \nabla_j K}{(n+2)K}, \qquad i, j, m = \overline{1, n}. \tag{12}$$

Из (12) следует, что на F^n выполняется тождество (2).

Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 получим следующие утверждения.

Следствие 1. *Поверхность $F^2 \subset E^3$ с ненулевой гауссовой кривизной $K \neq 0$ имеет циклически рекуррентную вторую фундаментальную форму тогда и только тогда, когда F^2 есть поверхность Дарбу в E^3 или ее часть.*

Следствие 2. *Гиперповерхность $F^n \subset E^{n+1}$ с циклически рекуррентной второй фундаментальной формой имеет постоянную положительную гауссову кривизну $K = const > 0$ тогда и только тогда, когда F^n есть гиперсфера $S^n \subset E^{n+1}$ или ее часть.*

Следствие 3. *Пусть гиперповерхность $F^n \subset E^{n+1}$ постоянной положительной гауссовой кривизны $K = const > 0$ принадлежит множеству $\mathcal{D}_{(n)}$. Если F^n полна как риманово многообразие, тогда F^n есть гиперсфера $S^n \subset E^{n+1}$.*

Доказательство теоремы 2. Пусть F^n принадлежит множеству $\mathcal{D}_{(n)}$. Тогда на F^n выполняются уравнения (3), где 1-форма $\mu = df$, функция f определена равенством (5). Не ограничивая общности, введем в окрестности $O(x)$ произвольной точки $x \in F^n$ координатную сеть линий кривизны $(u^1, \ldots, u^n)$. Тогда в $O(x)$ из уравнений (3) придем к системе уравнений (9). Из (9) находим

$$\frac{\partial \ln(|K|/|k_i|^{n+2})}{\partial u^j} = 0, \quad i \neq j, \quad \frac{\partial \ln(|K|^3/|k_i|^{n+2})}{\partial u^i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{13}$$

Следовательно, на F^n выполняются соотношения (4).

Докажем обратное утверждение. Пусть $(u^1, \ldots, u^n)$ — координаты кривизны в $O(x)$. Из уравнений (4) получим систему уравнений (13). Запишем (13) в следующем виде:

$$\frac{1}{n+2}\frac{\partial \ln(|K|)}{\partial u^j} = \frac{\partial \ln(|k_i|)}{\partial u^j}, \quad i \neq j, \quad \frac{1}{n+2}\frac{\partial \ln(|K|)}{\partial u^i} = \frac{1}{3}\frac{\partial \ln(|k_i|)}{\partial u^i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (14)$$

Рассмотрим на F^n 1-форму μ. Пусть в $O(x)$ $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i du^i$, где компоненты $\mu_i = \mu_i(u^1, \ldots, u^n)$ в окрестности $O(x)$ определены по формулам

$$\mu_i(u^1, \ldots, u^n) = \frac{1}{n+2}\frac{\partial \ln(|K|)}{\partial u^i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (15)$$

Тогда из (14), используя (15), получим

$$\frac{\partial \ln(|k_i|)}{\partial u^j} = \mu_i, \quad i \neq j, \quad \frac{\partial \ln(|k_i|)}{\partial u^i} = 3\mu_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Отсюда приходим к (9). Следовательно, на F^n выполняются уравнения (3), где μ_i вычисляются по формулам (15).

Применение теоремы 1 завершает доказательство.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аминов, Ю. А. Условие голономности главных направлений подмногообразия / Ю. А. Аминов // Математические заметки. — 1987. — Т. 41, № 4. — С. 543–548.

2. Бодренко, И. И. О гиперповерхностях с циклически рекуррентной второй фундаментальной формой в евклидовом пространстве / И. И. Бодренко // Вестник ВолГУ. Сер. 1, Математика. Физика. — 2010. — № 13. — С. 23–35.

3. Фоменко, В. Т. Об одном обобщении поверхностей Дарбу / В. Т. Фоменко // Математические заметки. — 1990. — Т. 48, № 2. — С. 107–113.

REFERENCES

1. Aminov Yu.A. Uslovie golonomnosti glavnykh napravleniy podmnogoobraziya [Condition of holonomicity of characteristic directions of a submanifold]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 1987, vol. 41, no. 4, pp. 543–548.

2. Bodrenko I.I. O giperpoverkhnostyakh s tsiklicheski rekurrentnoy vtoroy fundamental'noy formoy v evklidovom prostranstve [On hypersurfaces with cyclic recurrent the second fundamental form in Euclidean space]. *Vestnik VolGU. Ser. 1, Matematika. Fizika* [Journal of Volgograd State University, series 1, Mathematics. Physics], 2010, no. 13, pp. 23–35.

3. Fomenko V.T. Ob odnom obobschenii poverkhnostey Darbu [A generalization of the Darboux surfaces]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 1990, vol. 48, no. 2, pp. 107–113.

ON ANALOG OF DARBOUX SURFACES IN MANY-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACES

Bodrenko Irina Ivanovna

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor, Department of Fundamental Informatics and Optimal Control
Volgograd State University
bodrenko@mail.ru
Prospekt Universitetskij, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. The Darboux tensor, symmetric covariant three-valent tensor Θ, was determined on two-dimensional surfaces with nonzero Gaussian curvature $K \neq 0$ in Euclidean space E^3. The term $\Theta \equiv 0$ is the characteristic condition of Daroux surfaces in E^3.

The symmetric covariant three-valent tensor $\Theta_{(n)}$ is determined on hypersurfaces F^n $(n \geq 2)$ with nonzero Gaussian curvature $K \neq 0$ in Euclidean space E^{n+1}. If $n = 2$ then tensor $\Theta_{(n)}$ is coincided with the Darboux tensor Θ: $\Theta_{(2)} \equiv \Theta$.

Let $\mathcal{D}_{(n)}$ be a set of hypersurfaces F^n $(n \geq 2)$ with nonzero Gaussian curvature $K \neq 0$ in Euclidean spaces E^{n+1}, on which the following condition holds $\Theta_{(n)} \equiv 0$. The set $\mathcal{D}_{(2)}$ becomes exhausted by Daroux surfaces in E^3. The properties of hypersurfaces $F^n \subset E^{n+1}$ from the set $\mathcal{D}_{(n)}$ for $n \geq 2$ are studied in this article.

The necessary and sufficient conditions, for which hypersurface F^n with nonzero Gaussian curvature $K \neq 0$ in Euclidean space E^{n+1} belongs to the set $\mathcal{D}_{(n)}$ $(n \geq 2)$, are derived. It was proved that hypersurface $F^n \subset E^{n+1}$ with nonzero Gaussian curvature $K \neq 0$ belongs to the set $\mathcal{D}_{(n)}$ $(n \geq 2)$ if and only if there exist coordinates of curvature $(u^1, \ldots, u^n)$, in neighborhood $O(x) \subset F^n$ of every point $x \in F^n$, such that the following conditions hold:

$$K = \psi_{(i)}(u^i) k_i^{n+2},$$

$$K^3 = \frac{k_i^{n+2}}{\psi_{(1)}(u^1) \ldots \psi_{(i-1)}(u^{i-1}) \psi_{(i+1)}(u^{i+1}) \ldots \psi_{(n)}(u^n)}, \quad i = \overline{1, n},$$

where $k_1, \ldots, k_n$ are the principal curvatures F^n, $K = k_1 k_2 \ldots k_n$ is Gaussian curvature of F^n, $\psi_{(i)}(u^i) \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, are certain functions.

It was proved that every cyclic recurrent hypersurface $F^n \subset E^{n+1}$ with nonzero Gaussian curvature $K \neq 0$ belongs to the set $\mathcal{D}_{(n)}$ $(n \geq 2)$.

The characteristic property of hypersphere $S^n \subset E^{n+1}$ was derived. It was proved that connected complete hypersurface F^n of constant positive Gaussian curvature $K = \text{const} > 0$ in Euclidean space E^{n+1}, belonging to the set $\mathcal{D}_{(n)}$ $(n \geq 2)$, is sphere $S^n \subset E^{n+1}$.

Key words: Darboux tensor, Darboux surface, Gaussian curvature, second fundamental form, hypersurface, many-dimensional Euclidean space.