DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2021.4.1

УДК 517.956.46
ББК 22.161.62

Дата поступления статьи: 25.04.2021
Дата принятия статьи: 23.09.2021

МЕТОД СУММАРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Мурат Хамидбиевич Бештоков

Кандидат физико-математических наук, доцент,
ведущий научный сотрудник отдела вычислительных методов,
Институт прикладной математики и автоматизации
Кабардино-Балкарского научного центра РАН
beshtokov-murat@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-2968-9211
ул. Шортанова, 89а, 360000 г. Нальчик, Российская Федерация

Валентина Аркадьевна Водахова

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и
дифференциальных уравнений,
Институт физики и математики
Кабардино-Балкарского государственного университета
v.a.vod@yandex.ru
ул. Чернышевского, 175, 360000 г. Нальчик, Российская Федерация

Мухамед Хабалович Шхануков-Лафишев

Доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник отдела
математического моделирования геофизических процессов,
Институт прикладной математики и автоматизации
Кабардино-Балкарского научного центра РАН
lafishev@yandex.ru
ул. Шортанова, 89а, 360000 г. Нальчик, Российская Федерация

Аннотация. Работа посвящена изучению первой начально-краевой задачи для многомерного псевдопараболического уравнения третьего порядка. В предположении существования регулярного решения поставленной задачи получена априорная оценка в дифференциальной форме, откуда следует единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным. Построена локально-одномерная разностная схема и для ее решения получена априорная оценка в разностной форме. Доказаны устойчивость и сходимость локально-одномерной разностной схемы. Проведены численные расчеты на тестовых примерах, иллюстрирующие полученные в данной работе теоретические выкладки.

Ключевые слова: краевые задачи, априорная оценка, модифицированное уравнение влагопереноса, псевдопараболическое уравнение, локально-одномерная схема, устойчивость и сходимость схемы, аддитивность схемы.

Введение

Краевые задачи для псевдопараболических уравнений и более общего класса уравнений — уравнений Соболевского типа — возникают при изучении фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах [1; 5], движений почвенной влаги [8; 16; 20], а также при описании тепломассопереноса [6; 7; 12; 13; 19], волновых процессов и во многих других областях.

Широкий спектр результатов по исследованию начальных и начально-краевых задач для сильно нелинейных уравнений псевдопараболического типа, а также вопросов локальной разрешимости, условий разрушения решений и глобальной во времени разрешимости был получен в [10].

Краевые задачи для различных классов уравнений третьего порядка изучались в работах [4; 17; 18]. Разностным методам решения краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка посвящены работы [2; 3; 11]. Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка изучены в работе [15].

Данная работа посвящена рассмотрению локально-одномерной схемы (ЛОС) для псевдопараболического уравнения в p-мерном параллелепипеде. В предположении существования регулярного решения рассматриваемой задачи получена априорная оценка в дифференциальной форме, откуда следует единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным. Получена априорная оценка в разностной форме для решения локально-одномерной разностной схемы. Доказаны устойчивость и сходимость локально-одномерной разностной схемы. Проведены численные расчеты тестовых примеров, иллюстрирующие полученные в данной работе теоретические выкладки.

1. Постановка задачи

В цилиндре $Q_T = G \times (0 < t \le T]$, основанием которого служит p-мерный прямоугольный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, ..., x_p) : 0 < x_\alpha < l_\alpha,\ \alpha = 1, 2, ..., p\}$ с границей Γ, $\overline{G} = G + \Gamma$, рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + \mu \frac{\partial}{\partial t} Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u\Big|_{\Gamma} = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \overline{G} = G + \Gamma, \tag{3}$$

где $Lu = \sum\limits_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u$; $L_\alpha u = \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)$; $0 < c_0 \le k_\alpha(x) \le c_1$; $\mu = \text{const} > 0$; c_0, c_1 — положительные постоянные; $Q_T = G \times (0 < t \le T]$; $\alpha = \overline{1,p}$.

Как отмечено в работе [16], второе слагаемое в правой части уравнения (1) очень мало при впитывании и велико при испарении.

Далее предполагается, что решение дифференциальной задачи (1)–(3) существует и обладает нужными по ходу изложения производными. Относительно коэффициентов задачи (1)–(3) предположим, что они обладают таким количеством непрерывных производных, которое необходимо для обеспечения нужной гладкости решения $u(x,t)$ в цилиндре Q_T.

2. Априорная оценка в дифференциальной форме

Предполагая существование регулярного решения дифференциальной задачи (1)–(3) в цилиндре $\overline{Q}_T$, методом энергетических неравенств получим априорную оценку для ее решения. Для этого умножим уравнение (1) скалярно на u и преобразуем полученное тождество:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, u\right) = \Big(Lu, u\Big) + \left(\mu\frac{\partial}{\partial t}Lu, u\right) + \Big(f(x,t), u\Big), \tag{4}$$

где скалярное произведение и норма вводятся следующим образом:

$$(u,v) = \int\limits_G uv dx, \quad (u,u) = \|u\|_0^2, \quad u_x^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} u_{x_\alpha}^2, \quad \|u\|^2_{L_2(0,l_\alpha)} = \int\limits_0^{l_\alpha} u^2(x,t)dx_\alpha.$$

Преобразуем интегралы, входящие в тождество (4), с учетом (2):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, u\right) = \int\limits_G \frac{\partial u}{\partial t} u dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2, \tag{5}$$

$$\Big(Lu, u\Big) = \left(\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), u\right) = \int\limits_G \sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)u dx =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_G \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)u dx = -\sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_G k_\alpha(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2 dx, \tag{6}$$

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial t}Lu, u\right) = \left(\mu\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), u\right) = \mu\int\limits_G \sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)u dx =$$

$$= -\frac{\mu}{2}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_G k_\alpha(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2 dx. \tag{7}$$

Для оценки последнего слагаемого в правой части (4) применим неравенство Коши

$$\Big(f(x,t),u\Big)=\int\limits_G f(x,t)udx\leq\frac{1}{2}\|f\|_0^2+\frac{1}{2}\|u\|_0^2. \tag{8}$$

Подставляя (5)–(8) в тождество (4), получаем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2+\frac{\mu}{2}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_G k_\alpha(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2dx+\sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_G k_\alpha(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2dx\leq\frac{1}{2}\|u\|_0^2+\frac{1}{2}\|f\|_0^2.$$

Откуда следует неравенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_G k_\alpha(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2dx+\sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_G k_\alpha(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2dx\leq M_1\|u\|_0^2+M_2\|f\|_0^2, \tag{9}$$

где M_1, M_2 зависят только от входных данных задачи (1)–(3).

Проинтегрируем (9) по τ от 0 до t, тогда получим

$$\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2+\|u_x\|_{2,Q_t}^2\leq M_3\int_0^t\|u\|_0^2d\tau+M_4\left(\int_0^t\|f\|_0^2d\tau+\|u_0(x)\|^2_{W_2^1(G)}\right), \tag{10}$$

где M_3, M_4 зависят только от входных данных задачи (1)–(3). Применяя лемму Гронуолла [9] к (10), находим неравенство

$$\int_0^t\|u\|_0^2d\tau\leq M_5\left(\int_0^t\|f\|_0^2d\tau+\|u_0(x)\|^2_{W_2^1(G)}\right), \tag{11}$$

где M_5 зависит только от входных данных задачи (1)–(3). Учитывая (11), из (10) получаем априорную оценку

$$\|u\|^2_{W_2^1(G)}+\|u_x\|_{2,Q_t}^2\leq M(t)\left(\int_0^t\|f\|_0^2d\tau+\|u_0(x)\|^2_{W_2^1(G)}\right), \tag{12}$$

где $M(t)$ зависит только от входных данных задачи (1)–(3).

Из априорной оценки (12) следует единственность решения исходной задачи (1)–(3), а также непрерывная зависимость решения задачи от входных данных на каждом временном слое в норме пространства $W_2^1(G)$.

3. Построение локально-одномерной разностной схемы

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_α с шагом h_α, $h_\alpha=l_\alpha/N_\alpha$, $\alpha=1,2,...,p$. Совокупность $\overline{\omega}_h$ точек $\left(x_1^{(i_1)},x_2^{(i_2)},...,x_\alpha^{(i_\alpha)},...,x_p^{(i_p)}\right)$ пересечения этих плоскостей назовем узлами разностной сетки.

$$\overline{\omega}_h=\prod_{\alpha=1}^{p}\overline{\omega}_{h_\alpha},\qquad \overline{\omega}_{h_\alpha}=\{x_\alpha^{(i_\alpha)}=i_\alpha h_\alpha,\quad i_\alpha=0,1,...,N_\alpha,\quad N_\alpha h_\alpha=l_\alpha,\quad \alpha=1,2,...,p\}.$$

Множество узлов, принадлежащих границе Г, назовем граничными узлами, $\gamma_h = (x_i \in \Gamma)$, где $\gamma_{-\alpha}$ — левый граничный узел $x_\alpha = 0$, а $\gamma_{+\alpha}$ — правый граничный узел $x_\alpha = l_\alpha$.

На отрезке $[0,T]$ введем равномерную сетку $\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0,1,...,j_0\}$ с шагом $\tau = T/j_0$. Каждый из отрезков $[t_j, t_{j+1}]$ разобьем на p частей точками $t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \tau\frac{\alpha}{p}$, $\alpha = 1,2,...,p-1$ и обозначим через Δ_α полуинтервал $(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}, t_{j+\frac{\alpha}{p}}]$, $\alpha = 1,2,...,p$.

Уравнение (1) перепишем в виде

$$\Re u = \frac{\partial u}{\partial t} - Lu - \mu\frac{\partial}{\partial t}Lu - f(x,t) = 0,$$

или

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\Re_\alpha u = 0,\ \ \Re_\alpha u = \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u - \mu\frac{\partial}{\partial t}Lu_\alpha - f_\alpha,$$

где $f_\alpha(x,t)$ — произвольные функции, удовлетворяющие условию нормировки $\sum\limits_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f$.

На каждом полуинтервале Δ_α, $\alpha = 1,2,...,p$, будем последовательно решать задачи

$$\Re_\alpha\vartheta_{(\alpha)} = \frac{1}{p}\frac{\partial\vartheta_{(\alpha)}}{\partial t} - L_\alpha\vartheta_{(\alpha)} - \mu\frac{\partial}{\partial t}L\vartheta_\alpha - f_\alpha = 0,\ \ x \in G,\ \ t \in \Delta_\alpha,\ \ \alpha = 1,2,...,p, \tag{13}$$

$$\vartheta_{(\alpha)} = 0, \quad x_\alpha \in \Gamma_\alpha,$$

полагая при этом (см.: [14, с. 522])

$$\vartheta_{(1)}(x,0) = u_0(x),\ \ \vartheta_{(\alpha)}(x,t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}) = \vartheta_{(\alpha-1)}(x,t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}),\ \ \alpha = 2,3,...,p,\ \ j = 0,1,...,j_0-1,$$

$$\vartheta_{(1)}(x,t_j) = \vartheta_{(p)}(x,t_j), \quad j = 1,2,...,j_0,$$

и Γ_α — множество граничных точек по направлению x_α.

Аппроксимируя каждое уравнение (13) с номером α на полуинтервале $t_{j+\frac{\alpha-1}{p}} < t \le t_{j+\frac{\alpha}{p}}$ двухслойной неявной схемой с весами, получим цепочку p-одномерных схем (ЛОС):

$$\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha\Big(\sigma_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} + (1-\sigma_\alpha)y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}\Big) + \mu\Lambda_\alpha y_{\bar{t}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}},$$

где

$$\Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} = \Big(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big)_{x_\alpha};\quad a_\alpha = k_\alpha(x^{(-0,5\alpha)});\quad \bar{t} = t^{j+1/2};$$

$$x^{(-0,5\alpha)} = (x_1,...,x_{\alpha-1},\ x_\alpha - 0,5h_\alpha,\ x_{\alpha+1},...,\ x_p),\ \ \mu = \text{const} > 0.$$

Будем считать $\sigma_\alpha = \dfrac{1}{2}$. Тогда получим

$$y_{\bar{t}_\alpha} = \Lambda_\alpha\Big(0,5\Big(y^{j+\frac{\alpha}{p}} + y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}\Big) + \mu y_{\bar{t}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big) + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \tag{14}$$

$$y^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big|_{\gamma_{h,\alpha}} = 0,\ \ j = 0,1,...,j_0,\ \ \alpha = 1,2,...,p, \tag{15}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \tag{16}$$

где $y_{\bar{t}_\alpha} = \dfrac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\frac{\tau}{p}}$.

4. Погрешность аппроксимации

Пусть $u = u(x,t)$ — решение задачи (1)–(3), а $y^{j+\frac{\alpha}{p}}$, $\alpha = 1,2,...,p$ — решение задачи (14)–(16). Характеристикой точности ЛОС является разность $z^{j+1} = y^{j+1} - u^{j+1}$. Промежуточные значения $y^{j+\frac{\alpha}{p}}$ будем сравнивать с $u^{j+\frac{\alpha}{p}} = u(x, t_{j+\frac{\alpha}{p}})$, полагая $z^{j+\frac{\alpha}{p}} = y^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha}{p}}$.

Подставляя $y^{j+\frac{\alpha}{p}} = z^{j+\frac{\alpha}{p}} + u^{j+\frac{\alpha}{p}}$ в разностную схему (14)–(16), получим для погрешности $z_{(\alpha)} = z^{j+\frac{\alpha}{p}}$ задачу

$$\frac{z^{j+\frac{\alpha}{p}} - z^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha\Big(0,5\Big(z^{j+\frac{\alpha}{p}} + z^{j+\frac{\alpha-1}{p}}\Big) + \mu z_{\bar{t}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big) +$$

$$+ \Lambda_\alpha\Big(0,5\Big(u^{j+\frac{\alpha}{p}} + u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}\Big) + \mu u_{\bar{t}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big) - \frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} + \varphi^{j+\frac{\alpha}{p}},$$

$$z^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big|_{\gamma_{h,\alpha}} = 0, \ z(x,0) = 0,$$

или

$$z_{\bar{t}_\alpha} = \Lambda_\alpha\Big(0,5\Big(z_{(\alpha)} + z_{(\alpha-1)}\Big) + \mu z_{\bar{t}_\alpha}\Big) + \Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}},$$

$$z_{(\alpha)} = 0, \ x \in \gamma_{h,\alpha}, \ z(x,0) = 0, \ z_{(\alpha)} = z^{j+\frac{\alpha}{p}},$$

$$\Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \Lambda_\alpha\Big(0,5\Big(u_{(\alpha)} + u_{(\alpha-1)}\Big) + \mu u_{\bar{t}_\alpha} + \varphi_{(\alpha)} - u_{\bar{t}_\alpha}.$$

Вводя обозначение

$$\mathring{\psi}_\alpha = \Big(L_\alpha u + \mu L_\alpha u_t + f_\alpha - \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^{j+1/2}$$

и замечая, что $\sum\limits_{\alpha=1}^{p} \mathring{\psi}_\alpha = 0$, если $\sum\limits_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f$, представим погрешность $\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}$ в виде суммы $\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \mathring{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*$, где

$$\psi_\alpha^* = \Big(0,5\Lambda_\alpha\Big(u_{(\alpha)} - (u_{(\alpha-1)}\Big) - \Big(L_\alpha u\Big)^{j+\frac{1}{2}} + \Big(\mu\Lambda_\alpha u_{\bar{t}_\alpha} - \mu L_\alpha u_{t_\alpha}^{j+\frac{1}{2}}\Big) +$$

$$+ \Big(\varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} - f_\alpha^{j+\frac{1}{2}}\Big) - \Big(\frac{u_{(\alpha)} - u_{(\alpha-1)}}{\tau} - \frac{1}{p}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^{j+\frac{1}{2}}\Big),$$

то есть $\psi_\alpha = \mathring{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*, \ \mathring{\psi}_\alpha = O(1), \ \sum\limits_{\alpha=1}^{p} \mathring{\psi}_\alpha = 0, \ \psi_\alpha^* = O(h_\alpha^2 + \tau)$.

Итак, имеем цепочку одномерных схем при каждом $\alpha = 1,2,...,p$. Каждое уравнение (14) номера α в отдельности не аппроксимирует уравнение (1), но аппроксимирует уравнение $\Re_\alpha \vartheta_{(\alpha)} = 0$ в обычном смысле, и сумма погрешностей аппроксимации $\psi = \psi_1 + \psi_2 + ... + \psi_p$ стремится к нулю при $\tau \to 0$ и $|h| \to 0$. Поэтому система разностных уравнений (14) является аддитивной схемой. Итак, для погрешности $z = y - u$ имеем задачу

$$z_{\bar{t}_\alpha} = \Lambda_\alpha\Big(0,5\Big(z_{(\alpha)} + z_{(\alpha-1)}\Big) + \mu z_{\bar{t}_\alpha}\Big) + \Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \tag{17}$$

$$z\Big|_{\gamma_{h,\alpha}} = 0, \quad z(x,0) = 0. \tag{18}$$

5. Априорная оценка в разностной форме

Умножая уравнение (14) скалярно на $0,5\Big(y_{(\alpha)}+y_{(\alpha-1)}\Big)+\mu y_{\bar{t}_\alpha}$, получим

$$0,5\Big(y_{\bar{t}_\alpha},y_{(\alpha)}+y_{(\alpha-1)}\Big)_\alpha+\mu\|y_{\bar{t}_\alpha}\|^2_{L_2(\alpha)}-$$

$$-\Big(\Lambda_\alpha\Big(0,5(y_{(\alpha)}+y_{(\alpha-1)})+\mu y_{\bar{t}_\alpha}\Big),0,5(y_{(\alpha)}+y_{(\alpha-1)})+\mu y_{\bar{t}_\alpha}\Big)_\alpha=$$

$$=\Big(\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}},0,5\Big(y_{(\alpha)}+y_{(\alpha-1)}\Big)+\mu y_{\bar{t}_\alpha}\Big)_\alpha, \tag{19}$$

где

$$\Big(u,v\Big)=\sum_{x\in\omega_h}uvH,\quad H=\prod_{\alpha=1}^{p}h_\alpha,\quad \Big(u,v\Big)_\alpha=\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1}u_{i_\alpha}v_{i_\alpha}h_\alpha,\quad \Big(u,v\Big]_\alpha=\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha}u_{i_\alpha}v_{i_\alpha}h_\alpha.$$

Преобразуем слагаемые, входящие в (19), с учетом граничных условий и разностного аналога теоремы вложения (см.: [14, с. 120]). Получим:

$$0,5\Big(y_{(\alpha)}-y_{(\alpha-1)},y_{(\alpha)}+y_{(\alpha-1)}\Big)_\alpha+\mu\|y_{\bar{t}_\alpha}\|_0^2\tau+\Big(a_\alpha,\Big(0,5\Big(y_{(\alpha)}-y_{(\alpha-1)}\Big)+\mu y_{\bar{t}_\alpha}\Big)^2_{\bar{x}_\alpha}\Big)_\alpha\tau\le$$

$$\le\frac{1}{4\varepsilon}\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\alpha)}\tau+\varepsilon\frac{l_\alpha^2}{8}\Big\|\Big(0,5\Big(y_{(\alpha)}+y_{(\alpha-1)}\Big)+\mu y_{\bar{t}_\alpha}\Big)_{\bar{x}_\alpha}\Big\|^2_{L_2(\alpha)}\tau,$$

или

$$0,5\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\alpha)}+\mu\|y_{\bar{t}_\alpha}\|^2_{L_2(\alpha)}\tau+\Big(c_0-\varepsilon\frac{l_0^2}{8}\Big)\Big\|\Big(0,5\Big(y_{(\alpha)}-y_{(\alpha-1)}\Big)+\mu y_{\bar{t}_\alpha}\Big)_{\bar{x}_\alpha}\Big\|^2_{L_2(\alpha)}\tau\le$$

$$\le\frac{1}{4\varepsilon}\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\alpha)}\tau+0,5\|y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}\|^2_{L_2(\alpha)},\ l_0=\max_\alpha l_\alpha. \tag{20}$$

После суммирования (20) по $i_\beta\ne i_\alpha$, $\beta=1,2,...,p$ при $\varepsilon=\dfrac{c_0}{4l_0^2}$ получим

$$0,5\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\omega_h)}+\mu\|y_{\bar{t}_\alpha}\|^2_{L_2(\omega_h)}\tau+\frac{c_0}{2}\Big\|\Big(0,5\Big(y_{\alpha)}-y_{(\alpha-1)}\Big)+\mu y_{\bar{t}_\alpha}\Big)_{\bar{x}_\alpha}\Big\|^2_{L_2(\omega_h)}\tau\le$$

$$\le\frac{l_0^2}{c_0}\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\omega_h)}\tau+0,5\|y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}\|^2_{L_2(\omega_h)}. \tag{21}$$

Суммируем (21) сначала по $\alpha=1,2,...,p$

$$0,5\,\|y^{j+1}\|^2_{L_2(\omega_h)}+\mu\sum_{\alpha=1}^{p}\|y_{\bar{t}_\alpha}\|^2_{L_2(\omega_h)}\tau+\frac{c_0}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\Big\|\Big(0,5\Big(y_{\alpha)}-y_{(\alpha-1)}\Big)+\mu y_{\bar{t}_\alpha}\Big)_{\bar{x}_\alpha}\Big|^2_{L_2(\omega_h)}\tau\le$$

$$\le\frac{l_0^2}{c_0}\sum_{\alpha=1}^{p}\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\omega_h)}\tau+0,5\|y^j\|^2_{L_2(\omega_h)},$$

а затем по j' от 0 до j

$$\|y^{j+1}\|^2_{L_2(\omega_h)} + 2\mu\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|y_{\bar t_\alpha}\|^2_{L_2(\omega_h)} +$$

$$+ c_0\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\Big\|\Big(0,5\Big(y^{j'+\frac{\alpha}{p}} + y^{j'+\frac{\alpha-1}{p}}\Big) + \mu y_{\bar t_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)_{\bar x_\alpha}\Big|^2_{L_2(\omega_h)} \le$$

$$\le \frac{2l_0}{c_0}\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\omega_h)} + \|u_0(x)\|^2_{L_2(\omega_h)}. \tag{22}$$

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Локально-одномерная схема (14)–(16) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (14)–(16) справедлива оценка (22).*

6. Сходимость локально-одномерной схемы

Решение задачи для погрешности $z_{(\alpha)} = z^{j+\frac{\alpha}{p}}$ будем искать в виде суммы $z_{(\alpha)} = \upsilon_{(\alpha)} + \eta_{(\alpha)}$, где $\eta_{(\alpha)}$ определяется условиями (см.: [14, с. 528]):

$$\frac{\eta_{(\alpha)} - \eta_{(\alpha-1)}}{\tau} = \mathring{\psi}_\alpha,\ x \in \omega_{h_\alpha} + \gamma_\alpha,\ \alpha = 1, 2, ..., p, \tag{23}$$

$$\eta(x, 0) = 0.$$

Отсюда находим $\eta^{j+1} = \eta_{(p)} = \eta^j + \tau\Big(\mathring{\psi}_1 + \mathring{\psi}_2 + ... + \mathring{\psi}_p\Big) = \eta^j = ... = \eta^0 = 0$, для $j = 0, 1, ..., j_0$, так как $\eta(x, 0) = 0$. Для $\eta_{(\alpha)}$ имеем $\eta_{(\alpha)} = \tau\Big(\mathring{\psi}_1 + \mathring{\psi}_2 + ... + \mathring{\psi}_\alpha\Big) = -\tau\Big(\mathring{\psi}_{\alpha+1} + ... + \mathring{\psi}_p\Big) = O(\tau)$.

Функция $\upsilon_{(\alpha)}$ определяется условиями:

$$\upsilon_{\bar t_\alpha} = \Lambda_\alpha\Big(0,5\Big(\upsilon_{(\alpha)} + \upsilon_{(\alpha-1)}\Big) + \mu\upsilon_{\bar t_\alpha}\Big) + \tilde\psi_\alpha,\ x \in \omega_h,\ \alpha = 1, 2, ..., p, \tag{24}$$

$$\tilde\psi_\alpha = \psi^*_\alpha + \Lambda_\alpha\Big(\eta_{(\alpha)} + \eta_{(\alpha-1)}\Big) + \mu\Lambda_\alpha\eta_{\bar t_\alpha}.$$

Если существуют непрерывные в замкнутой области $\overline{Q}_T$ производные $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}$, $\alpha \ne \beta$, то $\Lambda_\alpha\eta_{(\alpha)} = -\tau\Lambda_\alpha\Big(\mathring{\psi}_{\alpha+1} + ... + \mathring{\psi}_p\Big) = O(\tau)$, так как $\eta_{(\alpha)}$ определяется из уравнения (23). Будем считать, что $\mu = \mu(\tau)$ стремится к нулю как и τ (то есть $\mu = O(\tau), \mu \in (0, \tau]$), тогда $\tilde\psi_\alpha = O(h_\alpha^2 + \tau)$.

Решение задачи (24) оценим с помощью теоремы 1.

Так как $\eta^j = 0$, $\eta_{(\alpha)} = O(\tau)$, то $\|z^j\| \le \|\upsilon^j\|$, тогда из оценки (22) следует утверждение.

Теорема 2. *Пусть задача (1)–(3) имеет единственное непрерывное в* $\overline{Q}_T$ *решение* $u(x,t)$ *и существуют непрерывные* Q_T *производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2},\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial t},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2},\quad \alpha = 1,2,...,p,\quad \alpha \neq \beta,$$

тогда локально-одномерная схема (14)–(16) сходится со скоростью $O(|h|^2+\tau)$*, так что*

$$\|y^{j+1}-u^{j+1}\|_1 \le M\Big(|h|^2+\tau\Big),\quad |h|^2 = h_1^2+h_2^2+...+h_p^2,\ j=1,2,...,$$

где $M = \text{const} > 0$ *не зависит от* τ *и* h_α*;* $\mu = O(\tau)$*,* $\mu \in (0,\tau]$*;*

$$\|y^{j+1}\|_1 = \|y^{j+1}\|^2_{L_2(\omega_h)} + 2\mu \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|y_{\bar t_\alpha}\|^2_{L_2(\omega_h)} +$$

$$+ c_0 \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \Big\| \Big(0,5(y^{j'+\frac{\alpha}{p}} + y^{j'+\frac{\alpha-1}{p}}) + \mu y_{\bar t_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)^2_{\bar x_\alpha}\Big]\Big|^2_{L_2(\omega_h)}.$$

Замечание 1. Полученные в данной работе результаты справедливы и в случае, когда

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q_\alpha(x,t)u(x,t),$$

если $|k_{\alpha t}(x,t), q_\alpha(x,t)| \le c_2$.

7. Результаты численного эксперимента

Коэффициенты уравнения и граничных условий задачи (1)$-$(3) подбираются таким образом, чтобы точным решением задачи была функция $u(x_1,x_2,t) = e^t(x_1^3 - l_1x_1^2)(x_2^3 - l_2x_2^2)$.

Ниже в таблицах 1–3 при уменьшении размера сетки приводятся изменения максимального значения погрешности ($z = y - u$) и порядка сходимости ПС) в нормах $|[\cdot]|_0$ и $\|\cdot\|_{C(\bar w_{h\tau})}$, где $\|y\|_{C(\bar w_{h\tau})} = \max\limits_{(x_i,t_j)\in \bar w_{h\tau}} |y|$, когда $h = \sqrt{\tau}$, $\mu = 0,1\,\tau$, $\mu = \tau$, $\mu = 10\,\tau$. Погрешность уменьшается в соответствии с порядком аппроксимации $O(|h|^2+\tau)$. Порядок сходимости определяется по следующей формуле: ПС$= \log_{\frac{h_1}{h_2}} \dfrac{|[z_1]|_0}{|[z_2]|_0}$, где z_i — это погрешность, соответствующая h_i.

Заключение

Настоящая работа посвящена изучению первой начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка в p-мерном параллелепипеде. В предположении существования регулярного решения рассматриваемой задачи получена априорная оценка решения в дифференциальной форме, откуда следует единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным. Построена локально-одномерная разностная схема и для ее решения получена априорная оценка в разностной форме. Доказаны устойчивость и сходимость локально-одномерной разностной схемы. Проведены численные расчеты на тестовых примерах, иллюстрирующие полученные в данной работе теоретические выкладки.

Таблица 1

$\mu = 0.1\tau$	$h = \sqrt{\tau}$	$\max\limits_{0<j<m} \|[z^j]\|_0$	ПС в $\|[\cdot]\|_0$	$\|z\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$	ПС в $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$
0,00025	1/20	0,057710797		0,189397602	
0,0000625	1/40	0,016911749	1,7708	0,060197781	1,6536
0,0000156	1/80	0,004498392	1,9105	0,016556651	1,8623
0,0000039	1/160	0,001152122	1,9651	0,004296175	1,9463
0,0000009	1/320	0,000290934	1,9855	0,001091661	1,9765

Таблица 2

$\mu = \tau$	$h = \sqrt{\tau}$	$\max\limits_{0<j<m} \|[z^j]\|_0$	ПС в $\|[\cdot]\|_0$	$\|z\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$	ПС в $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$
0,0025	1/20	0,039455664		0,118419311	
0,000625	1/40	0,015632359	1,3357	0,054218784	1,1270
0,000156	1/80	0,004821030	1,6971	0,018377096	1,5609
0,000039	1/160	0,001307758	1,8822	0,005188275	1,8246
0,000009	1/320	0,000336338	1,9591	0,001350971	1,9413

Таблица 3

$\mu = 10\tau$	$h = \sqrt{\tau}$	$\max\limits_{0<j<m} \|[z^j]\|_0$	ПС в $\|[\cdot]\|_0$	$\|z\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$	ПС в $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$
0,025	1/20	0,184385227		0,499145325	
0,00625	1/40	0,131402676	0,4887	0,387724356	0,3644
0,00156	1/80	0,062711258	1,0672	0,205996093	0,9124
0,00039	1/160	0,021631656	1,5356	0,078851858	1,3854
0,00009	1/320	0,006199708	1,8029	0,023959349	1,7186

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблат, Г. И. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах / Г. И. Баренблат, Ю. П. Желтов, И. Н. Кочина // Прикладная математика и механика. — 1960. — № 25 (5). — С. 852–864.

2. Бештоков, М. Х. Дифференциальные и разностные краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений третьего порядка и разностные методы их численной реализации / М. Х. Бештоков // Журн. вычислит. матем. и матем. физ. — 2017. — № 57 (12). — С. 2021–2041.

3. Бештоков, М. Х. Разностный метод решения нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами / М. Х. Бештоков // Журн. вычислит. матем. и матем. физ. — 2016. — № 56 (10). — С. 1780–1794.

4. Водахова, В. А. Нелокальная задача для нагруженного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками / В. А. Водахова, З. Х. Гучаева // Успехи современного естествознания. — 2014. — № 7. — С. 90–92.

5. Дзекцер, Е. С. Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах / Е. С. Дзекцер // Докл. АН СССР. — 1975. — № 220 (3). — С. 540–543.

6. Канчукоев, В. З. Краевые задачи для уравнений тепломассообмена и их аппроксимация устойчивыми разностными схемами / В. З. Канчукоев, М. Х. Шхануков // Краевые задачи для уравнений смешанного типа и родственные проблемы функционального анализа и прикладной математики. — 1979. — № 2. — С. 143–150.

7. Канчукоев, В. З. Краевые задачи для уравнений псевдопараболического и смешанного гиперболо-псевдопараболического типов и их приложения к расчету тепломассообмена в почвогрунтах / В. З. Канчукоев // САПР и АСПР в мелиорации. — Нальчик : Изд-во КБГУ, 1983. — С. 131–138.

8. Кочина, Н. И. Вопросы регулирования уровня грунтовых вод при поливах / Н. И. Кочина // Докл. АН СССР. — 1973. — № 213 (1). — С. 51–54.

9. Ладыженская, О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. — М. : Наука, 1973. — 407 с.

10. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А. А. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер. — М. : Физматлит, 2007. — 736 с.

11. Локально-одномерная разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью / Ф. М. Нахушева, В. А. Водахова, Ф. Х. Кудаева, З. В. Абаева. // Современные проблемы науки и образования. — Электрон. текстовые дан. — Режим доступа: https://science-education.ru/ru/article/view?id=20894. — Загл. с экрана.

12. Нерпин, С. В. Энерго- и массообмен в системе почва — растение — воздух / С. В. Нерпин, А. Ф. Чудновский. — Л. : Гидрометеоиздат, 1975. — 358 с.

13. Рубинштейн, Л. И. К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах / Л. И. Рубинштейн // Известия АН СССР. Сер. геогр. — 1948. — № 12 (1). — С. 27–45.

14. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. — М. : Наука, 1983. — 616 с.

15. Солдатов, А. П. Краевые задачи с общим нелокальным условием Самарского А.А. для псевдопараболического уравнения высокого порядка / А. П. Солдатов, М. Х. Шхануков // Докл. АН СССР. — 1987. — № 297 (3). — С. 547–552.

16. Чудновский, А. Ф. Теплофизика почв / А. Ф. Чудновский. — М. : Наука, 1976. — 352 с.

17. Шхануков, М. Х. Об одном методе решения краевых задач для уравнений третьего порядка / М. Х. Шхануков // Докл. АН СССР. — 1982. — № 256 (6). — С. 1327–1330.

18. Юлдашев, Т. К. Нелокальная краевая задача для неоднородного псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром / Т. К. Юлдашев // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2017. — № 1 (38). — С. 42–54. — DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2017.1.5.

19. Chen, P. J. On a theory of heat conduction involving two temperatures / P. J. Chen, M. E. Curtin // Jornal Angew. Math. Phys. — 1968. — № 19. — P. 614–627.

20. Hallaire, M. L'eau et la production vegetable / M. Hallaire // Institut National de la Recherche Agronomique. — 1964. — № 9. — P. 17–29.

REFERENCES

1. Barenblat G.I., Zheltov Yu.P., Kochina I.N. Ob osnovnykh predstavleniyakh teorii filtratsii odnorodnykh zhidkostey v treshchinovatykh porodakh [On the Basic Concepts of the

Theory of Filtration of Homogeneous Fluids in Fractured Rocks]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1960, no. 25 (5), pp. 852-864.

2. Beshtokov M.Kh. Differentsialnye i raznostnye kraevye zadachi dlya nagruzhennykh psevdoparabolicheskikh uravneniy tretyego poryadka i raznostnye metody ikh chislennoy realizatsii [Differential and Difference Boundary Value Problem for Loaded Third Order Pseudo-Parabolic Differential Equations and Difference Methods for Their Numerical Solution]. *Zhurn. vychislit. matem. i matem. fiz.*, 2017, no. 57 (12), pp. 2021-2041.

3. Beshtokov M.Kh. Raznostnyy metod resheniya nelokalnoy kraevoy zadachi dlya vyrozhdayushchegosya psevdoparabolicheskogo uravneniya tretyego poryadka s peremennymi koeffitsientami [Difference Method for Solving a Nonlocal Boundary Value Problem for a Degenerating Third Order Pseudo-Parabolic Equation with Variable Coefficients]. *Zhurn. vychislit. matem. i matem. fiz.*, 2016, no. 56 (10), pp. 1780-1794.

4. Vodakhova V.A., Guchaeva Z.Kh. Nelokalnaya zadacha dlya nagruzhennogo uravneniya tretyego poryadka s kratnymi kharakteristikami [Nonlocal Problem for a Loaded Third-Order Equation with Multiple Characteristics]. *Uspekhi sovremennogo estestvoznaniya*, 2014, no. 7, pp. 90-92.

5. Dzektser E.S. Uravneniya dvizheniya podzemnykh vod so svobodnoy poverkhnostyu v mnogosloynykh sredakh [Equations of Motion of Groundwater with a Free Surface in Multilayer Media]. *Dokl. AN SSSR*, 1975, no. 220 (3), pp. 540-543.

6. Kanchukoev V.Z., Shkhanukov M.Kh. Kraevye zadachi dlya uravneniy teplomassoobmena i ikh approksimatsiya ustoychivymi raznostnymi skhemami [Boundary Value Problems for Heat and Mass Transfer Equations and Their Approximation by Stable Difference Schemes]. *Kraevye zadachi dlya uravneniy smeshannogo tipa i rodstvennye problemy funktsionalnogo analiza i prikladnoy matematiki*, 1979, no. 2, pp. 143-150.

7. Kanchukoev V.Z. Kraevye zadachi dlya uravneniy psevdoparabolicheskogo i smeshannogo giperbolo-psevdoparabolicheskogo tipov i ikh prilozheniya k raschetu teplomassoobmena v pochvogruntakh [Boundary Value Problems for Equations of Pseudo-Parabolic and Mixed Hyperbolic-Pseudo-Parabolic Types and Their Applications to the Calculation of Heat and Mass Transfer in Soils]. *SAPR i ASPR v melioratsii.* Nalchik, Izd-vo KBGU, 1983, pp. 131-138.

8. Kochina N.I. Voprosy regulirovaniya urovnya gruntovykh vod pri polivakh [Groundwater Level Regulation Issues During Irrigation]. *Dokl. AN SSSR*, 1973, no. 213 (1), pp. 51-54.

9. Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki* [Boundary Value Problems of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 407 p.

10. Sveshnikov A.A., Alshin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D. *Lineynye i nelineynye uravneniya sobolevskogo tipa* [Linear and Nonlinear Sobolev Type Equations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007. 736 p.

11. Nakhusheva F.M., Vodakhova V.A., Kudaeva F.Kh., Abaeva Z.V. *Lokalno-odnomernaya raznostnaya skhema dlya uravneniya diffuzii drobnogo poryadka s sosredotochennoy teployomkostyu* [A Locally One-Dimensional Difference Scheme for a Fractional-Order Diffusion Equation with a Concentrated Heat Capacity]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya.* URL: https://science-education.ru/ru/article/view?id=20894.

12. Nerpin S.V., Chudnovskiy A.F. *Energo- i massoobmen v sisteme pochva — rastenie — vozdukh* [Energy and Mass Transfer in the Soil — Plant — Air System]. Leningrad, Gidrometeoizdat, 1975. 358 p.

13. Rubinshteyn L.I. K voprosu o protsesse rasprostraneniya tepla v geterogennykh sredakh [To the Question of the Process of Heat Propagation in Heterogeneous Media]. *Izvestiya AN SSSR. Cer. geogr.* [Izvestiya AN SSSR. Ser. geogr], 1948, no. 12 (1), pp. 27-45.

14. Samarskyy A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* [The Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 616 p.

15. Soldatov A.P., Shkhanukov M.Kh. Kraevye zadachi s obshchim nelokalnym usloviem Samarskogo A.A. dlya psevdoparabolicheskogo uravneniya vysokogo poryadka [Boundary Value Problems with a General Nonlocal Condition Samarskii A.A. for a High-Order Pseudoparabolic Equation]. *Dokl. AN SSSR*, 1987, no. 297 (3), pp. 547-552.

16. Chudnovskyy A.F. *Teplofizika pochv* [Thermal Physics of Soils]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 352 p.
17. Shkhanukov M.Kh. Ob odnom metode resheniya kraevykh zadach dlya uravneniy tretyego poryadka [A Method for Solving Boundary Value Problems for a Third-Order Equation]. *Dokl. AN SSSR*, 1982, no. 256 (6), pp. 1327-1330.
18. Yuldashev T.K. Nelokalnaya kraevaya zadacha dlya neodnorodnogo psevdoparabolicheskogo integro-differentsialnogo uravneniya s vyrozhdennym yadrom [Nonlocal Boundary Value Problem for an Inhomogeneous Pseudoparabolic Integro-Differential Equation with a Degenerate Kernel]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [The Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2017, no. 1 (38), pp. 42-54. DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2017.1.5.
19. Chen P.J., Curtin M.E. On a Theory of Heat Conduction Involving Two Temperatures. *Jornal Angew. Math. Phys.*, 1968, no. 19, pp. 614-627.
20. Hallaire M. L'eau et la Production Vegetable. *Institut National de la Recherche Agronomique*, 1964, no. 9, pp. 17-29.

SUMMARY APPROXIMATION METHOD FOR A THIRD ORDER MULTIDIMENSIONAL PSEUDOPARABOLIC EQUATION

Murat Kh. Beshtokov

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Leading Researcher,
Department of Computational Methods,
Institute of Applied Mathematics and Automation,
Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS
beshtokov-murat@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-2968-9211
Shortanova St, 89a, 360000 Nalchik, Russian Federation

Valentina A. Vodakhova

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Algebra and Differential Equations,
Institute of Physics and Mathematics,
Kabardino-Balkarian State University
v.a.vod@yandex.ru
Chernyshevskogo St, 175, 360000 Nalchik, Russian Federation

Mukhamed Kh. Shkhanukov-Lafishev

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Chief Researcher, Department of Mathematical Modeling of Geophysical Processes,
Institute of Applied Mathematics and Automation,
Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS
lafishev@yandex.ru
Shortanova St, 89a, 360000 Nalchik, Russian Federation

Abstract. In this paper we study the first initial-boundary value problem for a multidimensional pseudoparabolic equation of the third order. Assuming the existence of a regular solution to the problem posed, an a priori estimate is obtained in differential form, which implies the uniqueness and stability of the solution with respect to the right-hand side and initial data. A locally one-dimensional difference scheme is constructed and an a priori estimate in the difference form is obtained for its solution. The stability and convergence of the locally one-dimensional difference scheme are proved. Numerical calculations are performed using test examples to illustrate the theoretical calculations obtained in this work.

Key words: boundary value problems, a priori estimation, modified moisture transfer equation, pseudoparabolic equation, locally one-dimensional scheme, stability and convergence of the scheme, schema additivity.