DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2021.4.6

УДК 517.442 Дата поступления статьи: 12.05.2021
ББК 511 Дата принятия статьи: 05.09.2021

ОТРАЖЕНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ

Андрей Валерианович Павлов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики-1,
Московский институт радиотехники, электроники и автоматики —
Российский технологический университет
avpavlovmgu@my-post.ru
https://orcid.org/0000-0002-1082-2222
просп. Вернадского, 78, 117454 г. Москва, Российская Федерация

Аннотация. В статье доказано, что функция, совпадающая с отраженной относительно некоторой точки функцией, может быть отражением исходной функции относительно некоторой другой точки. Двойное отражение приводит к периодичности произвольной аналитической функции в достаточно общих условиях. Приведен пример, в котором четная функция становится периодической, как результат сдвигов и отражений оносительно двух точек. Аналогичный результат получается, если рассмотреть поле сдвигов $F(p)$, у которого каждое значение в точке с действительной частью А является результатом сдвига вправо значений функции $f(p)$ на $2A$ в той же точке (мы сдвинули значения прямой линии с действительной частью $-A$). Можно использовать совпадение всех значений такого поля на прямых линиях с действительными частями A+B со значениями результата двух сдвигов на величины $2A$ и $2B$ функций $f(p)$ и $f(p-2A)$ соответственно. Если поле $F(p)$ сдвинуть в обратную сторону на те же значения, то мы получим исходную регулярную в левой полуплоскости функцию. Результат обратного сдвига можно рассматривать как результат двух сдвигов (первый относительно точки $(0,0)$, второй относительно точки $(-A,0)$ функции $f(p+2A)$). Результаты сдвигов налево функции $f(p)$ образуют новое поле $G(p)$, которое совпадает с исходной регулярной функцией $f(p)$. Данный факт эквивалентен периодичности $f(p)$. Значения поля $F(p)$ сопряжены во всех точках правой полуплоскости значениям исходной регулярной функции $f(p)$, если она действительна на всей мнимой оси. Данный факт тоже приводит к совпадению функции $f(p)$ с константой в случае регулярности функции в левой полуплоскости. Поле $F(p)$ совпадает с полем сдвигов функции $f(p)$.

Ключевые слова: аналитическая функция, двойное отражение, периодичность, четные функции, сдвинутые функции, поле комплексных значений.

Введение

Заметка посвящена более подробному изложению краткого результата предложения 2 статьи [3]. Основной результат изложен в теореме 1. Из данного результата формально следуют основные результаты статей [3–6], относящихся к преобразованию Лапласа [1], но тема данной заметки не имеет прямого отношения к результатам этих статей. В качестве иллюстрации результата теоремы 1 приведем пример, доказывающий возможность переодичности функции как результат отражения ее значений относительно какой-либо точки.

В примере используются определение А-симметриии: если в исходной системе координат уравнение комплексной функции равно $z = f(p)$, то уравнение $z = g(p) = f(2A - p)$ определяет симметричное отражение значений функции $f(p)$ относительно точки $B = (A, 0)$ ($g(p) = f(a - (p - a))$, если $f(a + (p - a)) = f(p)$); мы будем называть данное отображение A-симметрией.

Если произвольную функцию $f(p)$ сначало сдвинуть на величину $2A$ вправо, а затем отразить относительно точки $(A, 0)$, мы получим функцию $f(-p)$, которая совпадает с $f(p)$ в случае четной $f(p)$ (достаточно проследить перемещение оси $Re\, p = -A$ при таком преобразованиия). Затем сдвинем получившуюся функцию $f(p)$ снова на $2A$ вправо и отразим относительно точки $(2A, 0)$); виду исходной четности результат преобразования совпадет со сдвинутой вправо на величину $2A$ функцией $f(p - 2A)$. Так как результаты первого и второго преобразования совпадают с одной и той же функцией $f(-p) = f(p)$ (достаточно заметить, что второе преобразование аналогично первому, но сдвиг и отражение происходит с удвоенным значением параметров, следовательно результат такого преобразования тоже $f(-p)$), мы получаем, что результат сдвига $f(p - 2A)$ совпадет с исходной функцией $f(p)$ как результат первого преобразования, то есть $f(p - 2A) = f(p)$, и функция $f(p)$ стала периордичной с периодом $2A$ (если $f(-p) = f(p)$ [1; 2]).

Данный факт иллюстрирует возможность двойной симметрии, приводящей к периодичности, которая доказана в теореме 1 без предположения четности исходной точки относиельно какой-либо точки $(A, 0)$. В данной теореме из существования одной А-симметрии выводися существование другой точки В-симмерии при $A \neq B$.

1. Основной результат

В теореме 1 в относительно общих условиях доказана возможность двойной симметрии аналитической функции [1].

Теорема 1. *Пусть функция $z = f(p)$ аналитична при всех $-4A < Re\, p < 4A$, $A \in (0, \infty)$.*

С точки зрения разных систем координат функция $z = f(2A - p)$, определяющая A-симметрию, должна получаться так же как результат B-симметрии из одного исходного регулярного в исходных координатах отображения $z = f(p)$, $B \neq A$.

Доказательство. Если сдвинуть начало координат в точку $(-A, 0)$, то уравнения исходных отображений $z = f(p)$ и $z = f(2A - p)$ в новых координатах совпадают с уравнениями сдвинутых направо исходными отображениями: $z = f(w - A), z = f(3A - w) = g(w), w = p + A$ (с точки зрения сопоставления точек комплексной плоскости данное сопоставление осталось прежним; мы использовали $z = f((4A - w) - A)$, и, если исходная функция $z = f(w - A)$, то точка исходного отражения $B = (-2A, 0)$ в новых координатах). Следовательно, в новых координатах эти две функции определяют исходное отображение и B-симметрию (симметрию в точке B). При этом значение в любой точке $W = 3A - w$ исходной функции f совпадает со значением функции $g(w)$ B-симметрии в точке w, симметричной относительно точки B, ввиду неизменности сопоставления точек, симметричных относительно B для разных систем координат. С другой стороны B-симметрия в новых координатах совпадает с D-симметрией в точке $D = (3A/2, 0)$ в новых координатах в том смысле, что значение $g(w) = f(3A - w)$ (то же самое как в B-симметрии) суть значение функции $g(w)$ в точке w, симметричной относительно точки $W = 3A - w$ уже для новой точки симмтрии D (по определению функции $z = f(3A - w)$ в новых координатах), [1]. Мы получили, что результат B-симметрии является одновременно B-симметрией и D-симметрией ($B = (-2A, 0), D = (3A/2, 0)$ в новых координатах.

Теорема 1 доказана.

Из двойной симметрии вытекает, как и во введении, периодичность $f(-p)$, ввиду одновременного выполнения равенств $f(4A - w) = f(3A - w), A > 0$ [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1987. — 688 с.
2. Фихтенгольц, Л. П. Курс дифференциального и интегрального исчисления, II / Л. П. Фихтенгольц. — М. : Наука, 1969. — 800 с.
3. Pavlov, A. V. The regularity of the Laplace transform / A. V. Pavlov // Mathematical Physics and Computer Simulation. — 2019. — Vol. 22, № 1. — P. 5–11. — DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2019.1.1.
4. Pavlov, A. V. Permutability of Cosine and Sine Fourier Transforms / A. V. Pavlov // Journal Moscow University Mathematics Bulletin. — 2019. — Vol. 74, № 2. — P. 75–78.
5. Pavlov, A. V. About the equality of the transform of Laplace to the transform of Fourier / A. V. Pavlov // Issues of Analysis. — 2016. — Vol. 23, № 1. — P. 21–30.
6. Pavlov, A. V. The Fourier transform and new inversion formula of the Laplace transform / A. V. Pavlov // Math. notes. — 2011. — Vol. 90, № 6. — P. 793–796.

REFERENCES

1. Lavrentiev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo* [The Methods of Theory Functions of Complex Variable]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 688 p.
2. Fihtengoltz L.P. *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya, II* [The Course of Differential and Integral Calculus, II]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 800 p.

3. Pavlov A.V. The Regularity of the Laplace Transform. *Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2019, vol. 22, no. 1, pp. 5-11. DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2019.1.1.

4. Pavlov A.V. Permutability of Cosine and Sine Fourier Transforms. *Journal Moscow University Mathematics Bulletin*, 2019, vol. 74, no. 2, pp. 75-78.

5. Pavlov A.V. About the Equality of the Transform of Laplace to the Transform of Fourier. *Issues of Analysis*, 2016, vol. 23, no. 1, pp. 21-30.

6. Pavlov A.V. The Fourier Transform and New Inversion Formula of the Laplace Transform. *Math. notes*, 2011, vol. 90, no. 6, pp. 793-796.

REFLECTION OF REGULAR FUNCTIONS

Andrey V. Pavlov

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Higher Mathematics-1,
Moscow Institute of Radiotechnics, Electronics and Automatics —
Russian Technological University
avpavlovmgu@my-post.ru
https://orcid.org/0000-0002-1082-2222
Prosp. Vernadskogo, 78, 117454 Moscow, Russian Federation

Abstract. It is proved in article, that a function with reflection in relation to some point can be the double reflection of initial function in relation to some other points. The double reflection results in the periodicity of some analytical function. In a example we obtain a periodic odd function, if we move the result of two reflections. We obtain a similar result after consideration of the $F(p)$ field: $F(p) = f(p - 2A)$, if $p = x + iy$, $x = A$, for all A. The $F(A + B + iy)$ values equal to the $f(z - 2A - 2B)$ values in the $A + B + iy$ point as a result of two moving of the $f(p)$ function to the right for all y (at first we move the $f(-A + iy)$ on the $2A$ distance, after we move the the $F(p) = f(A + iy) = f(p)$ function on the $2B$ distance in relation to center in the $(A, 0)$ point); the result of the such double moving is equal to the values of initial field in the $A + B + iy$ point. The reflection of the $F(p)$ field in the $(A, 0)$ and $(A + B, 0)$ points is the $f(-p)$ regular function for all real A, B. We can move the $F(p)$ values in reverse direction (to the left). In the situation the values (in the left part of plane) are equal to the values of initial regular $f(p)$ function. As a result of two moving we obtain a new $G(p)$ field in relation to the $f(p)$ function after the movements to the left with the $(-A, 0)$ center. The regular $f(p)$ function is equal to the $G(p)$ field, if $p < -A$. It is proved, that the $f(p)$ function is periodic. We can use the $f(p) = u + iv$ equality, if $F(p) = u - iv$ (for the regular $f(p)$ functions with the real values on the imaginary axis). If the $f(p)$ function is regular in the left half of plane, the fact results in the equality $f(p) = c$ too, c=const. The $F(p)$ field is the field of the moved functions.

Key words: regular function, double reflection, periodicity, even functions, moved functions, field of complex values.