УДК 517.51
ББК 22.161.6

# АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ [1]

**Болучевская Анна Владимировна**

Ассистент кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики
Волгоградского государственного университета
a.v.boluch@gmail.com
Проспект Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

**Аннотация.** В работе рассматривается кусочно-гладкая аппроксимация решений эллиптической системы дифференциальных уравнений определенного вида, построенная по точным и приближенным значениям в узлах триангуляции. Приближающие отображения используются для аппроксимации дифференциала решения этой системы с погрешностью, не зависящей от степени вырожденности треугольников.

**Ключевые слова:** кусочно-гладкая аппроксимация, аппроксимация дифференциала, триангуляция, эллиптическая система уравнений, погрешность аппроксимации.

## Введение

В задачах аппроксимации производных функции по значениям этой функции в узлах триангуляции [7] серьезной проблемой является зависимость погрешности аппроксимации от углов треугольников (проблема возникает при аппроксимации производных неизвестной функции производными приближающей) (см., напр., [4; 8; 9]). При этом наличие треугольников с углами, не удовлетворяющими определенным условиям, может привести к возрастанию погрешности или невозможности аппроксимации производных вообще.

В статье рассматриваются кусочно-гладкие аппроксимации решений эллиптической системы дифференциальных уравнений определенного вида, построенные по точным и приближенным значениям в узлах триангуляции. Чтобы решить вышеобозначенную проблему, эти аппроксимации используются для построения специального отображения, приближающего дифференциал решения системы с погрешностью, не зависящей от степени вырожденности треугольников.

Перейдем к точным формулировкам.

## 1. Аппроксимация дифференциалов решений эллиптической системы по точным значениям

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — область, в которой задана последовательность $\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$ конечных наборов точек.

Для каждого такого набора рассмотрим его триангуляцию $T_m$. Для всякого треугольника $S \in T_m$ определим длину $d_S$ максимальной его стороны. Положим

$$d_m = \max_{S \in T_m} d_S.$$

Будем рассматривать такие наборы точек $P_m$ и их триангуляции $T_m$, для которых

$$d_m \to 0 \text{ при } m \to \infty \tag{1}$$

и

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists m_0 \in \mathbb{N}: \, \forall m > m_0 \, \forall x \in D \, \exists a \in P_m \text{ такая, что } |a - x| < \varepsilon. \tag{2}$$

Условие (2) означает, что $P_m$ является $\varepsilon$-сетью при всех достаточно больших $m$.

Пусть $f\colon D \to D^*$, $D^* \subset \mathbb{R}^2$ — отображение вида

$$f(x) = (U(x), V(x)), x \in D, x = (x_1, x_2),$$

где $U, V \in C^2(D)$ являются решениями эллиптической системы уравнений [6]

$$\begin{cases} a\dfrac{\partial U}{\partial x_1}(x) + b\dfrac{\partial U}{\partial x_2}(x) = \dfrac{\partial V}{\partial x_2}(x), \\ d\dfrac{\partial U}{\partial x_1}(x) + c\dfrac{\partial U}{\partial x_2}(x) = -\dfrac{\partial V}{\partial x_1}(x), \end{cases} \tag{3}$$

а $a = a(x), b = b(x), c = c(x), d = d(x) \in C^1(D)$, $ac - \left(\frac{b+d}{2}\right)^2 > 0$ всюду в $D$ в силу эллиптичности системы.

Заметим, что если отображение $f(z) = U(x_1, x_2) + iV(x_1, x_2), z = x_1 + ix_2$ осуществляет гомеоморфное отображение области $D$ на область $D^*$, то $f(z)$ — квазиконформно [1].

Рассмотрим сначала кусочно-гладкую аппроксимацию решений системы (3) по точным значениям в узлах $T_m$.

Для всякого $T_m$ построим приближающее $f$ отображение $f_m\colon D \to D^*$, $f_m(x) = (U_m(x), V_m(x))$ такое, что $U_m, V_m$ — кусочно-гладкие функции и

$$f_m(p) = f(p) \text{ для любой точки } p \in P_m. \tag{4}$$

Обозначим $d_x f$ — дифференциал $f$ в точке $x \in D$, $d_x f_m$ — дифференциал $f_m$ в точке $x \in D$ и

$$\| A \| = \sum_{i,j} |a_{ij}|,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Необходимо отметить, что при приближении отображения $d_x f$ отображением $d_x f_m$ погрешность аппроксимации зависит от степени вырожденности треугольников сети $T_m$.

Если для каждого треугольника в качестве погрешности аппроксимации рассматривать величину

$$e(S) = \sup_{x \in S} \| J_f(x) - J_{f_m}(x) \|,$$

где $S$ — произвольный треугольник из $T_m$, $J_f(x)$ и $J_{f_m}(x)$ — матрицы Якоби отображений $f$ и $f_m$ в точке $x$ соответственно, то пример, демонстрирующий такую зависимость, построен в [2].

Таким образом, возникает следующая задача. Для всякого $S \in T_m$, используя функции $U_m$, $V_m$ и коэффициенты системы (3), требуется построить отображение $A_m(x)$, $x \in S$, аппроксимирующее $d_x f$ так, чтобы погрешность аппроксимации вида

$$e(S) = \sup_{x \in S} \| J_f(x) - A_m(x) \|$$

не зависела от степени вырожденности треугольника $S$.

Для всякого $m$ рассмотрим треугольник $S \in T_m$. Обозначим вершины $S$ как $p_0, p_1, p_2$, так, чтобы точки $p_0$ и $p_1$ образовывали максимальную сторону.

Напомним также, что модулем непрерывности [5] отображения $g \colon X \to \mathbb{R}^m, X \subset \subset \mathbb{R}^n$ называется функция

$$\omega(\delta) = \sup_{|x'-x| \leq \delta} |g(x') - g(x)|, \ x, x' \in X, \delta > 0.$$

Для доказательства основных результатов понадобятся две вспомогательные леммы.

**Лемма 1.** *Пусть $h \colon D \to \mathbb{R}, h \in C^1(D)$ — некоторая функция. Обозначим $\omega(t)$ — модуль непрерывности градиента $h$.*

*Тогда выполнено*

$$\frac{|h(p_1) - h(p_0) - \langle \nabla h(p_0), p_1 - p_0 \rangle|}{|p_1 - p_0|} \leq \frac{1}{d_m} \int\limits_0^{d_m} \omega(t) dt.$$

***Доказательство.*** Пусть $t \in [0,1], x \in S$. Тогда имеем

$$\nabla h(p_0 + t(x - p_0)) - \nabla h(p_0) = R(p_0 + t(x - p_0)),$$

где, согласно определению модуля непрерывности, для функции $R(p_0 + t(x - p_0))$ выполнено

$$|R(p_0 + t(x - p_0))| \leq \omega(|t(x - p_0)|).$$

Данное равенство умножим скалярно на вектор $x - p_0$ и проинтегрируем по $t$. Тогда имеем

$$h(x) - h(p_0) = \langle \nabla h(p_0), x - p_0 \rangle + \int\limits_0^1 \langle R(p_0 + t(x - p_0)), x - p_0 \rangle dt.$$

Откуда, учитывая условие на $|R(p_0 + t(x - p_0))|$,

$$\frac{|h(p_1) - h(p_0) - \langle \nabla h(p_0), p_1 - p_0 \rangle|}{|p_1 - p_0|} \leq \frac{1}{d_S} \int\limits_0^{d_S} \omega(t) dt.$$

В силу монотонности функции

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \omega(t)dt, \tau > 0$$

получим

$$\frac{1}{d_S}\int\limits_0^{d_S} \omega(t)dt \leq \frac{1}{d_m}\int\limits_0^{d_m} \omega(t)dt.$$

Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Пусть функция $h\colon D \to \mathbb{R}, h \in C^2(D)$ является решением квазилинейного эллиптического дифференциального уравнения второго порядка [3], тогда*

$$\frac{|h(p_1) - h(p_0) - \langle \nabla h(p_0), p_1 - p_0\rangle|}{|p_1 - p_0|} \leq C_1 r^{-\alpha}\frac{d_m^\alpha}{\alpha + 1},$$

*где $r = \operatorname{dist}(S, \partial D), \alpha > 0$, $\alpha$ зависит от коэффициентов эллиптического уравнения, а $C_1$ зависит от коэффициентов эллиптического уравнения, функции $h$ и величин $r, \operatorname{diam} D$.*

***Доказательство.*** Пусть $t \in [0, 1]$. Тогда, поскольку $h$ — решение эллиптического дифференциального уравнения второго порядка, выполнено [3]

$$|\nabla U(p_0 + t(x - p_0)) - \nabla U(p_0)| \leq C_1 r^{-\alpha}|t(x - p_0)|^\alpha.$$

Далее, проводя доказательство, аналогичное доказательству леммы 1, получим требуемое.

Лемма доказана.

Пусть теперь в $D$ задана прямоугольная декартова система координат. Обозначим через $l$ вектор $p_1 - p_0$ (наибольшая сторона треугольника $S$), через $\varphi$ — угол в положительном направлении (против часовой стрелки) между этим вектором и осью абсцисс.

Пусть также $\omega_1(t), \omega_2(t)$ — модули непрерывности градиентов функций $U_m, V_m$ соответственно и

$$l_1(d_m) = \frac{1}{d_m}\int\limits_0^{d_m} \omega_1(t)dt, \quad l_2(d_m) = \frac{1}{d_m}\int\limits_0^{d_m} \omega_2(t)dt.$$

Положим $\gamma = a\sin^2\varphi + c\cos^2\varphi - (b + d)\sin\varphi\cos\varphi$ и

$$K_1 = K_1(a, b, c, d, \varphi) = \frac{c\cos\varphi - b\sin\varphi}{\gamma}, \quad K_2 = K_2(a, b, c, d, \varphi) = \frac{\sin\varphi}{\gamma},$$
$$K_3 = K_3(a, b, c, d, \varphi) = \frac{a\sin\varphi - d\cos\varphi}{\gamma}, \quad K_4 = K_4(a, b, c, d, \varphi) = -\frac{\cos\varphi}{\gamma},$$
$$K_5 = K_5(a, b, c, d, \varphi) = -\frac{(ac - bd)\sin\varphi}{\gamma}, \quad K_6 = K_6(a, b, c, d, \varphi) = \frac{c\cos\varphi - d\sin\varphi}{\gamma},$$
$$K_7 = K_7(a, b, c, d, \varphi) = \frac{(ac - bd)\cos\varphi}{\gamma}, \quad K_8 = K_8(a, b, c, d, \varphi) = \frac{a\sin\varphi - b\cos\varphi}{\gamma}.$$

Тогда верна следующая теорема.

**Теорема 1.** *Если* $\forall x \in S$ *матрица отображения* $A_m(x)$ *имеет вид:*

$$\begin{pmatrix} K_1\frac{\partial U_m}{\partial l}(x) + K_2\frac{\partial V_m}{\partial l}(x) & K_3\frac{\partial U_m}{\partial l}(x) + K_4\frac{\partial V_m}{\partial l}(x) \\ K_5\frac{\partial U_m}{\partial l}(x) + K_6\frac{\partial V_m}{\partial l}(x) & K_7\frac{\partial U_m}{\partial l}(x) + K_8\frac{\partial V_m}{\partial l}(x) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

*то справедлива оценка:*

$$e(S) \leq M_1 d_m^{\alpha} + M_2 d_m^{\beta} + M_3\big(\omega_1(d_m) + l_1(d_m)\big) + M_4\big(\omega_2(d_m) + l_2(d_m)\big),$$

*где* $\alpha = \alpha(a,b,c,d) > 0, \beta = \beta(a,b,c,d) > 0, M_1 = M_1(a,b,c,d,U,r,\ \operatorname{diam} D,\varphi), M_2 =$ $= M_2(a,b,c,d,V,r,\operatorname{diam} D,\varphi), M_3 = M_3(a,b,c,d,\varphi), M_4 = M_4(a,b,c,d,\varphi)$*,*
$r = \operatorname{dist}(S,\partial D)$.

***Доказательство.*** Преобразуем систему координат путем переноса ее в точку $p_0$ и поворота на угол $\varphi$ следующим образом:

$$\begin{cases} X_1 = (x_1 - x_1^0)\cos\varphi + (x_2 - x_2^0)\sin\varphi, \\ X_2 = -(x_1 - x_1^0)\sin\varphi + (x_2 - x_2^0)\cos\varphi, \end{cases} \tag{6}$$

где $(X_1, X_2)$ — новые координаты точки $x$, $p_0 = (x_1^0, x_2^0)$.

Тогда $U(x) = U(x_1(X_1,X_2), x_2(X_1,X_2))$, и матрица $A_m(x)$ преобразуется к виду:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x) & L_1\frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x) + L_2\frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x) \\ \frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x) & L_3\frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x) + L_4\frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x) \end{pmatrix},$$

где

$$L_1 = L_1(a,b,c,d,\varphi) = \frac{b\sin^2\varphi - d\cos^2\varphi + (a-c)\sin\varphi\cos\varphi}{\gamma},$$
$$L_2 = L_2(a,b,c,d,\varphi) = -\frac{1}{\gamma}, L_3 = L_3(a,b,c,d,\varphi) = \frac{ac - bd}{\gamma},$$
$$L_4 = L_4(a,b,c,d,\varphi) = \frac{d\sin^2\varphi - b\cos^2\varphi + (a-c)\sin\varphi\cos\varphi}{\gamma}.$$

Кроме того, матрица $J_f(x) - A_m(x)$ примет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial X_1}(x) - \frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x) & \frac{\partial U}{\partial X_2}(x) - \left(L_1\frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x) + L_2\frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x)\right) \\ \frac{\partial V}{\partial X_1}(x) - \frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x) & \frac{\partial V}{\partial X_2}(x) - \left(L_3\frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x) + L_4\frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x)\right) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \| J_f(x) - A_m(x) \| &= \left|\frac{\partial U}{\partial X_1}(x) - \frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x)\right| + \left|\frac{\partial V}{\partial X_1}(x) - \frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x)\right| + \\ &+ \left|\frac{\partial U}{\partial X_2}(x) - \left(L_1\frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x) + L_2\frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x)\right)\right| + \\ &+ \left|\frac{\partial V}{\partial X_2}(x) - \left(L_3\frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x) + L_4\frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x)\right)\right|. \end{aligned} \tag{7}$$

Для оценки погрешности аппроксимации оценим слагаемые в правой части полученного равенства.

Заметим, что для первого слагаемого справедливо

$$\left|\frac{\partial U}{\partial X_1}(x)-\frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x)\right|\le\left|\frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x)-\frac{\partial U_m}{\partial X_1}(p_0)\right|+\left|\frac{\partial U_m}{\partial X_1}(p_0)-\frac{\partial U}{\partial X_1}(p_0)\right|+ \\ +\left|\frac{\partial U}{\partial X_1}(p_0)-\frac{\partial U}{\partial X_1}(x)\right|.$$

В силу (4) имеем

$$U_m(p_i)=U(p_i),$$
$$V_m(p_i)=V(p_i),\quad i=0,1,2.$$

Отсюда, поскольку функции $U,V,U_m,V_m$ — дифференцируемы в $S$, то получим

$$\begin{cases} U_m(p_0)+\langle\nabla U_m(p_0),p_1-p_0\rangle+\xi_1(p_1-p_0)=U(p_0)+\quad\langle\nabla U(p_0),p_1-p_0\rangle+ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +r_1(p_1-p_0), \\ V_m(p_0)+\langle\nabla V_m(p_0),p_1-p_0\rangle+\xi_2(p_1-p_0)=V(p_0)+\quad\langle\nabla V(p_0),p_1-p_0\rangle+ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +r_2(p_1-p_0), \end{cases}$$

где $r_1(p_1-p_0),r_2(p_1-p_0),\xi_1(p_1-p_0),\xi_2(p_1-p_0)$ — остаточные члены при разложении по формуле Тейлора в точке $p_0$ функций $U,V,U_m,V_m$ соответственно.

Раскладывая векторы $\nabla U_m(p_0)-\nabla U(p_0)$, $\nabla V_m(p_0)-\nabla V(p_0)$, $p_1-p_0$ по базису, образованному в результате поворота системы координат, будем иметь

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial U_m}{\partial X_1}(p_0)-\frac{\partial U}{\partial X_1}(p_0)\right)(X_1^1-X_1^0)\quad+\left(\frac{\partial U_m}{\partial X_2}(p_0)-\frac{\partial U}{\partial X_2}(p_0)\right)(X_2^1-X_2^0)= \\ \qquad\qquad\qquad\qquad =r_1(p_1-p_0)-\xi_1(p_1-p_0), \\ \left(\frac{\partial V_m}{\partial X_1}(p_0)-\frac{\partial V}{\partial X_1}(p_0)\right)(X_1^1-X_1^0)\quad+\left(\frac{\partial V_m}{\partial X_2}(p_0)-\frac{\partial V}{\partial X_2}(p_0)\right)(X_2^1-X_2^0)= \\ \qquad\qquad\qquad\qquad =r_2(p_1-p_0)-\xi_2(p_1-p_0), \end{cases}$$

где $p_1=(X_1^1,X_2^1)$.

Поскольку $X_1^0=X_2^0=0$ и $X_2^1=0$, получим

$$\begin{cases} \frac{\partial U_m}{\partial X_1}(p_0)-\frac{\partial U}{\partial X_1}(p_0)=\frac{r_1(p_1-p_0)-\xi_1(p_1-p_0)}{X_1^1}=\frac{r_1(p_1-p_0)}{d_S}-\frac{\xi_1(p_1-p_0)}{d_S}, \\ \frac{\partial V_m}{\partial X_1}(p_0)-\frac{\partial V}{\partial X_1}(p_0)=\frac{r_2(p_1-p_0)-\xi_2(p_1-p_0)}{X_1^1}=\frac{r_2(p_1-p_0)}{d_S}-\frac{\xi_2(p_1-p_0)}{d_S}. \end{cases}\tag{8}$$

Система (3) является эллиптической в $D$. Следовательно, дифференцируя первое уравнение системы по $x_2$, второе — по $x_1$ и складывая уравнения, получим, что всюду в $D$ функция $U$ удовлетворяет следующему линейному эллиптическому уравнению второго порядка

$$a\frac{\partial^2U}{\partial x_1^2}(x)+(d+b)\frac{\partial^2U}{\partial x_1\partial x_2}(x)+c\frac{\partial^2U}{\partial x_2^2}(x)+\left(\frac{\partial a}{\partial x_1}(x)+\frac{\partial d}{\partial x_2}(x)\right)\frac{\partial U}{\partial x_1}(x)+ \\ +\left(\frac{\partial b}{\partial x_1}(x)+\frac{\partial c}{\partial x_2}(x)\right)\frac{\partial U}{\partial x_2}(x)=0.\tag{9}$$

Тогда, в силу леммы 1 и леммы 2, выполнено

$$\frac{|r_1(p_1 - p_0)|}{d_S} = \frac{|U(p_1) - U(p_0) - \langle \nabla U(p_0), p_1 - p_0 \rangle|}{d_S} \leq C_1 r^{-\alpha} \frac{d_m^\alpha}{\alpha + 1}$$

и

$$\frac{|\xi_1(p_1 - p_0)|}{d_S} = \frac{|U_m(p_1) - U_m(p_0) - \langle \nabla U_m(p_0), p_1 - p_0 \rangle|}{d_S} \leq l_1(d_m),$$

где $C_1 = C_1(a, b, c, d, U, r, \operatorname{diam} D)$.

Тогда из первого уравнения системы (8) получаем

$$\left| \frac{\partial U_m}{\partial X_1}(p_0) - \frac{\partial U}{\partial X_1}(p_0) \right| \leq \frac{|r_1(p_1 - p_0)|}{d_S} + \frac{|\xi(p_1 - p_0)|}{d_S} \leq C_1 r^{-\alpha} \frac{d_m^\alpha}{\alpha + 1} + l_1(d_m).$$

Также, ввиду эллиптичности (9), для всех $x \in S$ можем оценить [3]

$$\left| \frac{\partial U}{\partial X_1}(x) - \frac{\partial U}{\partial X_1}(p_0) \right| \leq |\nabla U(x) - \nabla U(p_0)| \leq C_1 r^{-\alpha} |x - p_0|^\alpha \leq C_1 r^{-\alpha} d_m^\alpha.$$

Кроме того,

$$\left| \frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x) - \frac{\partial U_m}{\partial X_1}(p_0) \right| \leq \omega_1(d_m).$$

Оценим теперь первое слагаемое в равенстве (7)

$$\left| \frac{\partial U}{\partial X_1}(x) - \frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x) \right| \leq \omega_1(d_m) + l_1(d_m) + \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1} C_1 r^{-\alpha} d_m^\alpha.$$

Заметим, что функция $V$ также всюду в $D$ удовлетворяет линейному эллиптическому уравнению

$$\frac{a}{A}\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}(x) + \frac{d + b}{A}\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}(x) + \frac{c}{A}\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}(x) +$$
$$+ \left( \frac{\partial \left(\frac{a}{A}\right)}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial \left(\frac{b}{A}\right)}{\partial x_2}(x) \right) \frac{\partial V}{\partial x_1}(x) + \left( \frac{\partial \left(\frac{d}{A}\right)}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial \left(\frac{c}{A}\right)}{\partial x_2}(x) \right) \frac{\partial V}{\partial x_2}(x) = 0,$$

где $A = ac - bd$.

Таким образом, для второго слагаемого равенства (7) выполнено

$$\left| \frac{\partial V}{\partial X_1}(x) - \frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x) \right| \leq \omega_2(d_m) + l_2(d_m) + \frac{\beta + 2}{\beta + 1} C_2 r^{-\beta} d_m^\beta,$$

где $C_2 = C_2(a, b, c, d, V, r, \operatorname{diam} D)$.

Для оценки третьего и четвертого слагаемого обозначим

$$q_1 = \omega_1(d_m) + l_1(d_m) + \frac{\alpha+2}{\alpha+1} C_1 r^{-\alpha} d_m^{\alpha},$$
$$q_2 = \omega_2(d_m) + l_2(d_m) + \frac{\beta+2}{\beta+1} C_2 r^{-\beta} d_m^{\beta}.$$

В результате поворота системы координат система (3) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial X_2}(x) = L_1 \dfrac{\partial U}{\partial X_1}(x) + L_2 \dfrac{\partial V}{\partial X_1}(x), \\ \dfrac{\partial V}{\partial X_2}(x) = L_3 \dfrac{\partial U}{\partial X_1}(x) + L_4 \dfrac{\partial V}{\partial X_1}(x). \end{cases}$$

Тогда из этой системы и уже полученных оценок имеем:

$$\left| \frac{\partial U}{\partial X_2}(x) - \left( L_1 \frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x) + L_2 \frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x) \right) \right| =$$
$$= \left| L_1 \left( \frac{\partial U}{\partial X_1}(x) - \frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x) \right) + L_2 \left( \frac{\partial V}{\partial X_1}(x) - \frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x) \right) \right| \le |L_1| q_1 + |L_2| q_2,$$
$$\left| \frac{\partial V}{\partial X_2}(x) - \left( L_3 \frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x) + L_4 \frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x) \right) \right| =$$
$$= \left| L_3 \left( \frac{\partial U}{\partial X_1}(x) - \frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x) \right) + L_4 \left( \frac{\partial V}{\partial X_1}(x) - \frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x) \right) \right| \le |L_3| q_1 + |L_4| q_2.$$

Отсюда

$$\| J_f(x) - A_m(x) \| \le$$
$$\le d_m^{\alpha} \frac{\alpha+2}{\alpha+1} C_1 r^{-\alpha} \left(1 + |L_1| + |L_3|\right) + d_m^{\beta} \frac{\beta+2}{\beta+1} C_2 r^{-\beta} \left(1 + |L_2| + |L_4|\right) +$$
$$+ \left(\omega_1(d_m) + l_1(d_m)\right)\left(1 + |L_1| + |L_3|\right) + \left(\omega_2(d_m) + l_2(d_m)\right)\left(1 + |L_2| + |L_4|\right).$$

Далее, обозначая

$$M_1 = \frac{\alpha+2}{\alpha+1} C_1 r^{-\alpha} \left(1 + \sup_{x\in S}|L_1| + \sup_{x\in S}|L_3|\right),$$
$$M_2 = \frac{\beta+2}{\beta+1} C_2 r^{-\beta} \left(1 + \sup_{x\in S}|L_2| + \sup_{x\in S}|L_4|\right),$$
$$M_3 = 1 + \sup_{x\in S}|L_1| + \sup_{x\in S}|L_3|,$$
$$M_4 = 1 + \sup_{x\in S}|L_2| + \sup_{x\in S}|L_4|,$$

получаем требуемое.

**Следствие 1.** *Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^2$ задана последовательность $\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$ конечных наборов точек и их триангуляций $T_m$. Тогда, если выполнены условия* (1), (2) *и $G \Subset D$ — произвольная компактно вложенная подобласть, то*

$$\max_{S\in T_m, S\subset G} e(S) = \max_{S\in T_m, S\subset G} \sup_{x\in S} \| J_f(x) - A_m(x) \| \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

## 2. Аппроксимация дифференциалов решений эллиптической системы по приближенным значениям

Рассмотрим теперь кусочно-гладкую аппроксимацию решений системы (3) по приближенным значениям в узлах $T_m$.

Для всякого $T_m$ построим приближающее $f$ отображение $f_m\colon D \to D^*$, $f_m(x) = (U_m(x), V_m(x))$ такое, что $U_m, V_m$ — кусочно-гладкие функции и

$$|U_m(p) - U(p)| < \delta,$$
$$|V_m(p) - V(p)| < \delta,$$

для любой точки $p \in P_m, \delta > 0$.

Поставим ту же задачу и будем использовать такие же обозначения, как в разделе 1.

Кроме того, пусть для всякого натурального $m$ существует отображение $f_m^*\colon D \to D^*$, $f_m^*(x) = (U_m^*(x), V_m^*(x))$, которое является приближающим $f$ отображением, таким что $U_m^*, V_m^*$ — кусочно-гладкие функции и

$$f_m^*(p) = f(p) \text{ для любой точки } p \in P_m.$$

Обозначим $\omega_1^*(t), \omega_2^*(t)$ — модули непрерывности градиентов функций $U_m^*, V_m^*$ соответственно и

$$l_1^*(d_m) = \frac{1}{d_m}\int\limits_0^{d_m} \omega_1^*(t)dt, \quad l_2^*(d_m) = \frac{1}{d_m}\int\limits_0^{d_m} \omega_2^*(t)dt.$$

Тогда верна следующая теорема.

**Теорема 2.** *Если $\forall x \in S$ матрица отображения $A_m(x)$ имеет вид* (5)*, то справедлива оценка:*

$$e(S) \le M_1 d_m^\alpha + M_2 d_m^\beta + N_1\left(\omega_1^*(d_m) + l_1^*(d_m) + \frac{2\delta}{d_S}\right) + N_2\left(\omega_2^*(d_m) + l_2^*(d_m) + \frac{2\delta}{d_S}\right) + $$
$$+ (N_1 + M_3)\left(\omega_1(d_m) + l_1(d_m)\right) + (N_2 + M_4)\left(\omega_2(d_m) + l_2(d_m)\right),$$

*где $\alpha = \alpha(a,b,c,d) > 0, \beta = \beta(a,b,c,d) > 0, M_1 = M_1(a,b,c,d,U,r,\operatorname{diam} D,\varphi)$, $M_2 = M_2(a,b,c,d,V,r,\operatorname{diam} D,\varphi), M_3 = M_3(a,b,c,d,\varphi), M_4 = M_4(a,b,c,d,\varphi)$, $N_1 = N_1(a,b,c,d,\varphi)$, $N_2 = N_2(a,b,c,d,\varphi), r = \operatorname{dist}(S,\partial D)$.*

***Доказательство.*** Пусть, согласно теореме 1, используя функции $U_m^*, V_m^*$ и коэффициенты системы (3), в $S$ построено приближающее $d_x f$ отображение $A_m^*(x)$ вида

$$\begin{pmatrix} K_1\frac{\partial U_m^*}{\partial l}(x) + K_2\frac{\partial V_m^*}{\partial l}(x) & K_3\frac{\partial U_m^*}{\partial l}(x) + K_4\frac{\partial V_m^*}{\partial l}(x) \\ K_5\frac{\partial U_m^*}{\partial l}(x) + K_6\frac{\partial V_m^*}{\partial l}(x) & K_7\frac{\partial U_m^*}{\partial l}(x) + K_8\frac{\partial V_m^*}{\partial l}(x) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$\| J_f(x) - A_m(x) \| \leq \| J_f(x) - A_m^*(x) \| + \| A_m^*(x) - A_m(x) \| . \tag{10}$$

В теореме 1 получена оценка

$$\| J_f(x) - A_m^*(x) \| \leq M_1 d_m^{\alpha} + M_2 d_m^{\beta} + M_3\big(\omega_1^*(d_m) + l_1^*(d_m)\big) + M_4\big(\omega_2^*(d_m) + l_2^*(d_m)\big). \tag{11}$$

Поскольку элементы матрицы $A_m^*(x) - A_m(x) = (a_{ij})$ имеют вид

$$\begin{aligned}
a_{11} &= K_1\left(\frac{\partial U_m^*}{\partial l}(x) - \frac{\partial U_m}{\partial l}(x)\right) + K_2\left(\frac{\partial V_m^*}{\partial l}(x) - \frac{\partial V_m}{\partial l}(x)\right),\\
a_{12} &= K_3\left(\frac{\partial U_m^*}{\partial l}(x) - \frac{\partial U_m}{\partial l}(x)\right) + K_4\left(\frac{\partial V_m^*}{\partial l}(x) - \frac{\partial V_m}{\partial l}(x)\right),\\
a_{21} &= K_5\left(\frac{\partial U_m^*}{\partial l}(x) - \frac{\partial U_m}{\partial l}(x)\right) + K_6\left(\frac{\partial V_m^*}{\partial l}(x) - \frac{\partial V_m}{\partial l}(x)\right),\\
a_{22} &= K_7\left(\frac{\partial U_m^*}{\partial l}(x) - \frac{\partial U_m}{\partial l}(x)\right) + K_8\left(\frac{\partial V_m^*}{\partial l}(x) - \frac{\partial V_m}{\partial l}(x)\right),
\end{aligned}$$

то для оценки $\| A_m^*(x) - A_m(x) \|$ необходимо исследовать $\left|\frac{\partial U_m^*}{\partial l}(x) - \frac{\partial U_m}{\partial l}(x)\right|$ и $\left|\frac{\partial V_m^*}{\partial l}(x) - \frac{\partial V_m}{\partial l}(x)\right|$.

Имеем

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial U_m^*}{\partial l}(x) - \frac{\partial U_m}{\partial l}(x)\right| \leq \left|\frac{\partial U_m^*}{\partial l}(x) - \frac{\partial U_m^*}{\partial l}(p_0)\right| + \left|\frac{\partial U_m^*}{\partial l}(p_0) - \frac{\partial U_m}{\partial l}(p_0)\right| +\\
+ \left|\frac{\partial U_m}{\partial l}(p_0) - \frac{\partial U_m}{\partial l}(x)\right|.
\end{aligned} \tag{12}$$

Так как $\omega_1^*(t)$ — модуль непрерывности градиента функции $U_m^*$, то для первого слагаемого выполнено

$$\left|\frac{\partial U_m^*}{\partial l}(x) - \frac{\partial U_m^*}{\partial l}(p_0)\right| = |\langle \nabla U_m^*(x) - \nabla U_m^*(p_0), l_0\rangle| \leq |\nabla U_m^*(x) - \nabla U_m^*(p_0)| \leq \omega_1^*(d_m), \tag{13}$$

где $l_0$ — орт направления $l$.

Аналогично, поскольку $\omega_1(t)$ — модуль непрерывности градиента функции $U_m$, то для третьего слагаемого выполнено

$$\left|\frac{\partial U_m}{\partial l}(x) - \frac{\partial U_m}{\partial l}(p_0)\right| \leq \omega_1(d_m). \tag{14}$$

Из определений отображений $f$ и $f_m$ для $i = 0, 1, 2$ имеем

$$\begin{aligned}
&|U_m(p_i) - U(p_i)| < \delta, \\
&|V_m(p_i) - V(p_i)| < \delta, \\
&U_m^*(p_i) = U(p_i), \\
&V_m^*(p_i) = V(p_i).
\end{aligned} \tag{15}$$

Оценим теперь второе слагаемое в неравенстве (12).

В силу (15) для $i = 0, 1, 2$ получим

$$|U_m(p_i) - U_m^*(p_i)| = |U_m(p_i) - U(p_i) + U(p_i) - U_m^*(p_i)| = |U_m(p_i) - U(p_i)| < \delta.$$

Поскольку функции $U_m, U_m^*$ — дифференцируемы в $S$, то выполнено

$$\begin{aligned}
&U_m(p_1) - U_m^*(p_1) = \\
&= U_m(p_0) - U_m^*(p_0) + \langle \nabla U_m(p_0) - \nabla U_m^*(p_0), p_1 - p_0 \rangle + r_1(p_1 - p_0) - r_1^*(p_1 - p_0),
\end{aligned}$$

где $r_1(p_1 - p_0), r_1^*(p_1 - p_0)$ — остаточные члены при разложении по формуле Тейлора в точке $p_0$ функций $U_m, U_m^*$ соответственно.

Тогда

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\partial U_m}{\partial l}(p_0) - \frac{\partial U_m^*}{\partial l}(p_0) \right| = \frac{1}{|p_1 - p_0|} \, |\langle \nabla U_m(p_0) - \nabla U_m^*(p_0), p_1 - p_0 \rangle| \leq \\
&\leq \frac{|U_m(p_1) - U_m^*(p_1)|}{|p_1 - p_0|} + \frac{|U_m(p_0) - U_m^*(p_0)|}{|p_1 - p_0|} + \frac{|r_1(p_1 - p_0) - r_1^*(p_1 - p_0)|}{|p_1 - p_0|}.
\end{aligned}$$

В доказательстве теоремы 1 показано, что справедлива оценка

$$\frac{|r_1^*(p_1 - p_0)|}{|p_1 - p_0|} \leq l_1^*(d_m).$$

Аналогичная оценка может быть получена для $\frac{|r_1(p_1 - p_0)|}{|p_1 - p_0|}$.

Следовательно,

$$\left| \frac{\partial U_m}{\partial l}(p_0) - \frac{\partial U_m^*}{\partial l}(p_0) \right| \leq \frac{2\delta}{d_S} + l_1(d_m) + l_1^*(d_m).$$

Таким образом, учитывая это неравенство, а также неравенства (13), (14), получаем

$$\left| \frac{\partial U_m}{\partial l}(x) - \frac{\partial U_m^*}{\partial l}(x) \right| \leq \frac{2\delta}{d_S} + l_1(d_m) + l_1^*(d_m) + \omega_1(d_m) + \omega_1^*(d_m).$$

Проведя аналогичные рассуждения, имеем

$$\left| \frac{\partial V_m}{\partial l}(x) - \frac{\partial V_m^*}{\partial l}(x) \right| \leq \frac{2\delta}{d_S} + l_2(d_m) + l_2^*(d_m) + \omega_2(d_m) + \omega_2^*(d_m).$$

Теперь справедлива оценка

$$\| A_m^*(x) - A_m(x) \| \le C_1 \left( \frac{2\delta}{d_S} + l_1(d_m) + l_1^*(d_m) + \omega_1(d_m) + \omega_1^*(d_m) \right) + \\ + C_2 \left( \frac{2\delta}{d_S} + l_2(d_m) + l_2^*(d_m) + \omega_2(d_m) + \omega_2^*(d_m) \right),$$

где

$$C_1 = |K_1| + |K_3| + |K_5| + |K_7|,$$
$$C_2 = |K_2| + |K_4| + |K_6| + |K_8|.$$

Тогда из (10), (11) имеем

$$\| df(x) - A_m(x) \| \le M_1 d_m^\alpha + M_2 d_m^\beta + C_1 \left( \omega_1^*(d_m) + l_1^*(d_m) + \frac{2\delta}{d_S} \right) + \\ + C_2 \left( \omega_2^*(d_m) + l_2^*(d_m) + \frac{2\delta}{d_S} \right) + (C_1 + M_3)(\omega_1(d_m) + l_1(d_m)) + \\ + (C_2 + M_4)(\omega_2(d_m) + l_2(d_m)).$$

Обозначая

$$N_1 = \sup_{x\in S} |K_1| + \sup_{x\in S} |K_3| + \sup_{x\in S} |K_5| + \sup_{x\in S} |K_7|,$$
$$N_2 = \sup_{x\in S} |K_2| + \sup_{x\in S} |K_4| + \sup_{x\in S} |K_6| + \sup_{x\in S} |K_8|,$$

получим требуемое.

**Следствие 2.** *Пусть в области* $D \subset \mathbb{R}^2$ *задана последовательность* $\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$ *конечных наборов точек и их триангуляций* $T_m$. *Тогда, если выполнены условия* (1), (2), $G \Subset D$ *— произвольная компактно вложенная подобласть и*

$$\max_{S\in T_m, S\subset G} \frac{\delta}{d_S} \to 0, m \to \infty,$$

*то*

$$\max_{S\in T_m, S\subset G} e(S) = \max_{S\in T_m, S\subset G} \sup_{x\in S} \| J_f(x) - A_m(x) \| \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

## ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-97021-р_поволжье_а).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белинский, П. П. Общие свойства квазиконформных отображений / П. П. Белинский. — Новосибирск : Наука, 1974. — 95 с.

2. Болучевская, А. В. $C^1$-аппроксимация решений эллиптических систем кусочно-гладкими отображениями / А. В. Болучевская // Вестник ВолГУ. Сер. 1, Математика. Физика. — 2011. — № 2 (15). — С. 4–16.

3. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, М. Трудингер. — М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 464 с.

4. Клячин, В. А. $C^1$-аппроксимация поверхностей уровня функций, заданных на нерегулярных сетках / В. А. Клячин, Е. А. Пабат // Сиб. журн. индустр. мат. — 2010. — Т. 13, № 2 (42). — С. 69–78.

5. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. — М. : Дрофа, 2004. — Т. 2. — 720 с.

6. Курант, Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. — М. : Мир, 1964. — 830 с.

7. Препарата, Ф. Вычислительная геометрия / Ф. Препарата, М. Шеймос. — М. : Мир, 1989. — 478 с.

8. Субботин, Ю. Н. Зависимость оценок многомерной кусочно полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции / Ю. Н. Субботин // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — № 189. — С. 117–137.

9. Shewchuk, J. R. What is a good linear finite element? Interpolation, conditioning, anisotropy, and quality measures / J. R. Shewchuk. — Berkeley : Preprint, Department of Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California at Berkeley, 2002. — 70 p.

## *REFERENCES*

1. Belinskiy P.P. *Obschie svoystva kvazikonformnykh otobrazheniy* [General properties of quasiconformal mappings]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1974. 95 p.

2. Boluchevskaya A.V. $C^1$-approksimatsiya resheniy ellipticheskikh sistem kusochno-gladkimi otobrazheniyami [$C^1$-approximation of elliptic systems solutions by piecewise-smooth mappings]. *Vestnik VolGU. Ser. 1, Matematika. Fizika* [Journal of Volgograd State University, series 1, Mathematics. Physics], 2011, no. 2 (15), pp. 4–16.

3. Gilbarg D., Trudinger M. *Ellipticheskie differentsial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka* [Elliptic partial differential equations of second order]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 464 p.

4. Klyachin V.A., Pabat E.A. $C^1$-approksimatsiya poverkhnostey urovnya funktsiy, zadannykh na neregulyarnykh setkakh [$C^1$-approximation of level surfaces of functions defined on irregular grids]. *Sib. zhurn. industr. mat.* [Journal of Applied and Industrial Mathematics], 2010, vol. 13, no. 2 (42), pp. 69–78.

5. Kudryavtsev L.D. *Kurs matematicheskogo analiza* [Calculus], vol. 2. Moscow, Drofa Publ., 2004. 720 p.

6. Courant R. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial differential equations]. Moscow, Mir Publ., 1964. 830 p.

7. Preparata F., Shamos M. *Vychislitel'naya geometriya* [Computational geometry]. Moscow, Mir Publ., 1989. 478 p.

8. Subbotin Yu.N. Zavisimost' otsenok mnogomernoy kusochno polinomial'noy approksimatsii ot geometricheskikh kharakteristik triangulyatsii [Dependence of estimates of multidimentional piecewise-polynomial approximation on triangulation geometrical properties]. *Tr. Mat. in-ta AN SSSR* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 1989, no. 189, pp. 117–137.

9. Shewchuk J.R. *What is a good linear finite element? Interpolation, conditioning, anisotropy, and quality measures*. Berkeley, Preprint, Department of Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California at Berkeley, 2002. 70 p.

# APPROXIMATION OF DIFFERENTIALS OF ELLIPTIC SYSTEMS SOLUTIONS

**Boluchevskaya Anna Vladimirovna**
Assistant Teacher, Department of Computer Science and Experimental Mathematics
Volgograd State University
a.v.boluch@gmail.com
Prospekt Universitetskij, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

**Abstract.** We consider the elliptic system of differential equations and construct piecewise smooth approximation of its solution using precise and approximate values at the triangulation nodes. These piecewise smooth mappings are used to approximate the differential of the solution with an error that does not depend on the level of triangles degeneracy.

Let $\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$ be an array of finite sets of points in the domain $D \subset \mathbb{R}^2$. For every set we consider its triangulation $T_m$.

Suppose $d_m = \max\limits_{S \in T_m} d_S$ where $d_S$ is a length of the maximum side of a triangle $S \in T_m$.

Let $f\colon D \to D^*,\ D^* \subset \mathbb{R}^2$ be a mapping such that $f(x) = (U(x), V(x)), x \in D, x = (x_1, x_2)$, where $U, V \in C^2(D)$ are the solutions of the elliptic system

$$\begin{cases} a\dfrac{\partial U}{\partial x_1}(x) + b\dfrac{\partial U}{\partial x_2}(x) = \dfrac{\partial V}{\partial x_2}(x), \\ d\dfrac{\partial U}{\partial x_1}(x) + c\dfrac{\partial U}{\partial x_2}(x) = -\dfrac{\partial V}{\partial x_1}(x), \end{cases}$$

$a = a(x), b = b(x), c = c(x), d = d(x) \in C^1(D)$, $ac - \left(\frac{b+d}{2}\right)^2 > 0$ in $D$.

For every $T_m$ we construct an approximating mapping $f_m\colon D \to D^*$, $f_m(x) = (U_m(x),\ V_m(x))$, such that $U_m, V_m$ are piecewise smooth functions and

$$f_m(p) = f(p) \text{ for any } p \in P_m.$$

Suppose $d_x f$ is the differential of $f$ at the point $x \in D$, $J_f(x)$ is the Jacobian matrix of $f$ at the point $x$.

For every $S \in T_m$ we construct a mapping $A_m(x)$, $x \in S$ that approximates $d_x f$ using functions $U_m$, $V_m$ and coefficients of the elliptic system. We also show that the approximation error

$$e(S) = \sup_{x \in S} \| J_f(x) - A_m(x) \|$$

does not depend on the level of the triangle $S$ degeneracy.

The same results are obtained if we use an approximating mapping $f_m\colon D \to D^*$, $f_m(x) = (U_m(x),\ V_m(x))$, such that $U_m, V_m$ are piecewise smooth functions and

$$|U_m(p) - U(p)| < \delta,$$
$$|V_m(p) - V(p)| < \delta,$$

for any $p \in P_m, \delta > 0$.

**Key words:** piecewise smooth approximation, approximation of the differential, triangulation, elliptic system of equations, approximation error.