www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2022.1.1

УДК 517.958
ББК 22.19

Дата поступления статьи: 03.03.2021
Дата принятия статьи: 20.08.2021

ЯВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СОКРАЩЕННЫХ В РАЗМЕРНОСТИ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА И НАВЬЕ — СТОКСА НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Максим Леонидович Зайцев

Бизнес,
mlzaytsev@gmail.com, mlzaytsev@mail.ru
г. Москва, Российская Федерация

Вячеслав Борисович Аккерман

Кандидат физико-математических наук,
профессор факультета машиностроения и аэрокосмической техники,
Университет Западной Вирджинии
Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu
WV 26506-6106 г. Моргантаун, США

Аннотация. Получены в явном виде системы интегро-дифференциальных уравнений, в которых производные по времени отсутствуют и которые являются следствиями нестационарных уравнений Эйлера и Навье — Стокса несжимаемой жидкости. Использован метод редукции переопределенных систем дифференциальных уравнений, предложенный ранее авторами. Эволюция всего потока в объеме задается изменяющимися во времени данными на некоторой поверхности этого потока. Получены также нестационарные новые интегральные уравнения, которые определяют эволюцию потока.

Ключевые слова: переопределенные системы дифференциальных уравнений, размерность дифференциальных уравнений, гидродинамика, уравнения Эйлера, уравнения Навье — Стокса.

Введение

В приложениях нелинейность уравнений гидродинамики часто является одним из препятствий для изучения многих явлений, таких как турбулентность, движение гидродинамических разрывов, в частности, распространение фронтов химических реакций и др. [8–11; 14]. При их моделировании в практических задачах часто приходится составлять очень тонкую численную сетку по пространству и времени, что требует больших вычислительных мощностей и затрат времени. В связи с этим большой научный интерес представляют различные способы сведения полной системы гидродинамических уравнений по объему к системе уравнений на поверхности [4–6; 12; 13]. Подобная процедура позволяет уменьшить размерность задачи на единицу ($3D \to 2D$, $2D \to 1D$), что существенно сокращает необходимые вычислительные мощности. В частности, соответствующая компьютерная программа могла бы напрямую (пользуясь информацией только на поверхности) рассчитать гидродинамические разрывы с учетом вязкости, образования звука и других изменений плотности газов и жидкостей. Например, при исчезающе малой вязкости задача описания потенциального обтекания на плоскости сводится к интегральному уравнению на границе области (задачи Дирихле, Неймана) [8; 11]. Это уравнение связывает тангенциальную и нормальную составляющие скорости. Зная одну из них на границе обтекаемого тела, можно определить весь внешний поток.

В данной работе мы преобразовываем нестационарные уравнения Эйлера и Навье — Стокса к «стационарным» интегро-дифференциальным уравнениям, у которых производные по времени отсутствуют. Особенность данной работы заключается в том, что все сокращенные в размерности уравнения получены в явном виде в отличие от предыдущих работ авторов [1; 2], где предлагались до 200–300 уравнений с сокращенной размерностью.

В научном сообществе существует мнение, что сокращение размерности (сокращения числа переменных) в уравнениях гидродинамики на достаточно произвольном решении невозможно. В данной работе мы показываем, что на достаточно малом отрезке времени это возможно для классических решений, удовлетворяющих заранее заданной достаточно произвольной задаче Коши.

Данная статья не направлена на решение соответствующей Миллениум Проблемы.

1. Уравнения Эйлера

Рассмотрим уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости в виде [8]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} + \nabla P = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \omega + \nabla\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + P\right) = 0, \tag{1}$$

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u}, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \tag{3}$$

где $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$. Эти уравнения описывают движение несжимаемой жидкости или газа в пространстве $\mathbb{R}^3$ или в ограниченном объеме пространства $\mathbb{R}^3$ и во времени t. Здесь $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = (u_x, u_y, u_z)$ — скорость частицы жидкости в точке $(\mathbf{r}, t)$; $P(\mathbf{r}, t)$ — давление жидкости или газа, нормированное на постоянную плотность в точке $(\mathbf{r}, t)$, где

$\mathbf{r} = (x, y, z)$. Рассмотрим лагранжевы переменные начального положения частиц газа и времени $\mathbf{r}_0, t$ (то есть разметку), определяемые следующим образом

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t),\ \mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) \ \text{ и } \ \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t),\ \mathbf{r}_0|_{t=0} = \mathbf{r},\ \mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{r}_0. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $t = t$. Из системы уравнений (1)–(3), учитывая определение (4), следует, что выполняются соотношения [4; 5]

$$\omega \cdot \nabla \mathbf{r}_0 = \omega_0(\mathbf{r}_0), \tag{5}$$

$$\frac{\partial(x_0, y_0, z_0)}{\partial(x, y, z)} = 1, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{r}_0 = 0, \tag{7}$$

где $\omega_0 = \nabla \times \mathbf{u}_0$; $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0(\mathbf{r})$ — начальное распределение скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ при $t = 0$. Из (5)–(7) следует, что

$$\omega(\mathbf{r}_0, t) = \omega_0 \cdot \nabla_0 \mathbf{r}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}_0} = \frac{\partial(x_0, y_0, z_0)}{\partial(x, y, z)} = 1, \tag{9}$$

где $\nabla_0 = (\partial/\partial x_0, \partial/\partial y_0, \partial/\partial z_0)$.

Если мы имеем поток жидкости или газа во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ и достаточно быстро убывающий на бесконечности, то выражение для скорости $\mathbf{u}$ может быть записано в следующем виде [11, гл. IV, § 5]:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi} \nabla_r \times \int \frac{\omega(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \omega(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}', \tag{10}$$

где $\nabla_r = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$. Здесь и далее интегрирование ведется во всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Учитывая (8), (9), перейдем в подынтегральном выражении в формуле (10) к переменным Лагранжа (4)

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \omega(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t)) \times \omega(\mathbf{r}'_0, t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t)|^3} \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathbf{r}'_0} d^3\mathbf{r}'_0 =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{r} - \mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t)) \times \frac{(\omega_0(\mathbf{r_0}') \cdot \nabla_0)\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t)|^3} d^3\mathbf{r}'_0, \tag{11}$$

где $\nabla_0 = (\partial/\partial x'_0, \partial/\partial y'_0, \partial/\partial z'_0)$. Из (11), используя определение переменных Лагранжа (4), находим

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(\mathbf{r}_0, t) = -\frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) - \mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t)) \times \frac{(\omega_0(\mathbf{r_0}') \cdot \nabla_0)\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) - \mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t)|^3} d^3\mathbf{r}'_0. \tag{12}$$

Продифференцируем выражения (12) по лагранжеву времени t. Тогда, используя уравнения Эйлера (1)–(3), получим

$$-\nabla P = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}(\mathbf{r}_0, t) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)\right)\times\frac{(\omega_0(\mathbf{r_0}')\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)|^3}d^3\mathbf{r}'_0 -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t))\times\frac{(\omega_0(\mathbf{r_0}')\cdot\nabla_0)\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)|^3}d^3\mathbf{r}'_0 + \tag{13}$$

$$+\frac{3}{4\pi}\int(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t))\times$$

$$\times\left(\frac{(\omega_0(\mathbf{r_0}')\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)|^5}(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t))\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)\right)\right)d^3\mathbf{r}'_0.$$

Используя (9), находим, что компоненты вектора градиента давления ∇P в переменных Лагранжа (4) выражаются следующим образом

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial(P,y,z)}{\partial(x,y,z)}=\frac{1}{\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}}\frac{\partial(P,y,z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}=\frac{\partial(P,y,z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}. \tag{14}$$

Аналогично получаем, что

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial(x,P,z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial(x,y,P)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}. \tag{16}$$

Таким образом, формально в переменных Лагранжа мы имеем «стационарную» систему из семи интегро-дифференциальных уравнений (9), (12), (13) от семи неизвестных функций $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t), P(\mathbf{r}_0,t)$ и $\partial\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$, где размерность снижена в явном виде. Система уравнений (9), (12), (13) является следствием системы уравнений (1)–(3) и должна допускать параметрическое семейство решений (зависимость от времени t). Каждое конкретное решение должно выделяться данными на некоторой поверхности. В двумерном случае эта система уравнений будет несколько проще. Выражение (13) можно дифференцировать по времени еще раз и получать новые соотношения. Сформулируем утверждение.

Теорема 1. *Если уравнения* (1)–(3) *имеют решение* $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\in C^2(\mathbb{R}^3\times[0,T])\,, P = P(\mathbf{r},t)\in C^2(\mathbb{R}^3\times[0,T])\,, T>0$, *достаточно быстро убывающее на бесконечности вместе со своими пространственными производными, то существуют переменные Лагранжа* (4) *на промежутке времени* $[0,T]$ *и выполняются интегральные соотношения* (9), (12), (13) *при условии, что интегралы в* (12) *и* (13) *сходятся.*

Формально интегральные уравнения (12) в переменных Лагранжа определяют эволюцию потока (с начальным условием $\mathbf{r}|_{t=0}=\mathbf{r}_0$) и являются следствиями уравнений Эйлера. В случае, если имеются границы у потока жидкости или газа, например, твердые стенки, то выражения (10), получаемые из теоремы Гельмгольца, несколько усложняются [11], но уравнения, аналогичные (9), (12), (13), также можно получить.

2. Уравнения Навье — Стокса

Рассмотрим уравнения Навье — Стокса в трехмерном потоке в виде [4; 8]:

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\nabla P=-\nu\nabla\times\omega, \tag{17}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\omega - (\omega\nabla)u = \nu\Delta\omega, \tag{18}$$

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u}, \tag{19}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \tag{20}$$

где $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$; $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ — оператор Лапласа; $\nu >$ > 0. Эти уравнения описывают движение вязкой несжимаемой жидкости или газа в пространстве $\mathbb{R}^3$ или в ограниченном объеме пространства $\mathbb{R}^3$ и во времени t. Здесь ν — коэффициент вязкости; $\mathbf{u}(\mathbf{r_0}, t) = (u_x, u_y, u_z)$ — скорость частицы жидкости в точке $(\mathbf{r}, t)$; $P(\mathbf{r}, t)$ — давление жидкости или газа, нормированное на постоянную плотность, в точке $(\mathbf{r}, t)$; $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

Уравнения (18) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + ((\mathbf{u} + \alpha)\nabla)\omega, \tag{21}$$

где вектор $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ определяется из системы линейных относительно него уравнений

$$(\alpha\nabla)\omega = -(\omega\nabla)\mathbf{u} - \nu\Delta\omega. \tag{22}$$

Будем рассматривать только решения уравнений (17)–(20) $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ на некотором промежутке времени $t \in [0, T]$, $T > 0$ и $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, для которых выполняется условие на якобиан:

$$\left|\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{r}}\right| > \varepsilon > 0,\ \forall\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3,\ \forall t \in [0, T]. \tag{23}$$

В частности, это означает, что, исходя из условия (23), каждая компонента вектора $\omega = \omega(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{u}$ не имеет локального экстремума в $\mathbb{R}^3$, то есть нет точек, где у какой-нибудь компоненты вектора $\omega = \omega(\mathbf{r}, t)$ одновременно все производные по пространству равны нулю. Рассмотрим замену переменных (см. приложение А)

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \alpha(\mathbf{r}, t), \mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) \text{ и } \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t), t = t, \mathbf{r}_0|_{t=0} = \mathbf{r}, \mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{r}_0. \tag{24}$$

Здесь $\mathbf{r} = (x, y, z), \mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. В силу условия (23) замену переменных (24) можно сделать на некотором промежутке времени $t \in [0, T'], T > T' > 0$ (см. приложение А). Положим также, что на этом промежутке времени выполняется

$$\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{r}_0}\right| > 0. \tag{25}$$

В этих переменных $(\mathbf{r}_0, t)$ (24) выражения (21) запишутся в виде

$$\frac{\partial\omega(\mathbf{r}_0, t)}{\partial t} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + ((\mathbf{u} + \alpha)\nabla)\omega = 0. \tag{26}$$

Выражение (26) означает, что

$$\omega = \omega_0(\mathbf{r}_0), \tag{27}$$

где $\omega_0(\mathbf{r}_0)$ — начальное распределение завихренности ω.

Пусть мы имеем поток жидкости или газа во всем пространстве $\mathbb{R}^3$, имеющий условие на бесконечности такое, что выражение для скорости u может быть записано в виде [11, гл. IV, § 5]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi}\nabla_r \times \int \frac{\omega(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\times\omega(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}'. \tag{28}$$

Здесь и далее интегрирование ведется во всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Перейдем в выражении (28) к новым переменным (24), используя (25), (27). Имеем

$$\mathbf{u}(\mathbf{r_0},t) = -\frac{1}{4\pi}\int (\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)) \times \frac{\omega_0(\mathbf{r_0}')}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)|^3}\left|\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathbf{r_0}'}\right| d^3\mathbf{r}'_0. \tag{29}$$

Выражение (24) означает, что

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \mathbf{u}(\mathbf{r_0},t) + \alpha(\mathbf{r_0},t). \tag{30}$$

Вектор α может быть записан в переменных (24) из формул (22) аналогично (14)–(16).

Продифференцируем выражения (29) по времени t в переменных $(\mathbf{r_0},t)$. Тогда

$$\begin{gathered}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{r_0},t) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{r_0},t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)\right)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r_0},t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)|^3} \times \omega_0(\mathbf{r}'_0)\left|\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathbf{r}'_0}\right| d^3\mathbf{r}'_0 - \\ -\frac{1}{4\pi}\int (\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)) \times \frac{\omega_0(\mathbf{r}'_0)\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathbf{r}'_0}\right|}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)|^3} d^3\mathbf{r}'_0 + \\ +\frac{3}{4\pi}\int (\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)) \times \omega_0(\mathbf{r}'_0)\frac{(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t))\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{r_0},t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)\right)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)|^5}\left|\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathbf{r}'_0}\right| d^3\mathbf{r}'_0,\end{gathered} \tag{31}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathbf{r}'_0}\right| = \frac{\partial\left(\frac{\partial x'(\mathbf{r}'_0,t)}{\partial t}, y', z'\right)}{\partial \mathbf{r}'_0} + \frac{\partial\left(x', \frac{\partial y'(\mathbf{r}'_0,t)}{\partial t}, z'\right)}{\partial \mathbf{r}'_0} + \frac{\partial\left(x', y', \frac{\partial z'(\mathbf{r}'_0,t)}{\partial t}\right)}{\partial \mathbf{r}'_0}.$$

Используя уравнение Навье — Стокса в форме (17)–(20), имеем

$$\begin{gathered}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{r}_0,t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{r},t) + (u(\mathbf{r}_0,t)+\alpha(\mathbf{r}_0,t))\cdot\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r},t) = \\ = \alpha(\mathbf{r}_0,t)\cdot\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r},t) - \nabla P - \nu\nabla\times\omega,\end{gathered} \tag{32}$$

$$\Delta(P+\frac{1}{2}\mathbf{u}^2) = \nabla\cdot[\mathbf{u}\times\omega]. \tag{33}$$

Вектор α и все производные в выражении (32) могут быть записаны в переменных (24) аналогично (14)–(16). Согласно формуле для решений уравнения Пуассона (33) [11, гл. IV, § 5] имеем

$$P(\mathbf{r},t) + \frac{1}{2}\mathbf{u}(\mathbf{r},t)^2 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\nabla_r\cdot[\mathbf{u}(\mathbf{r}',t)\times\omega(\mathbf{r}',t)]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int \nabla_{r'} \cdot \left(\frac{[\mathbf{u}(\mathbf{r}',t)\times \omega(\mathbf{r}',t)]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) d^3\mathbf{r}' -$$

$$\frac{1}{4\pi}\int [\mathbf{u}(\mathbf{r}',t)\times \omega(\mathbf{r}',t)]\cdot \nabla_{r'} \cdot \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) d^3\mathbf{r}' =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot[\mathbf{u}(\mathbf{r}',t)\times \omega(\mathbf{r}',t)]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}'. \tag{34}$$

Перейдем в выражении (34) к переменным (24), используя (25), (27). Имеем

$$P(\mathbf{r}_0,t)+\frac{1}{2}\mathbf{u}(\mathbf{r}_0,t)^2 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0',t))\cdot[\mathbf{u}(\mathbf{r}_0',t)\times \omega_0(\mathbf{r}_0')]}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0',t)|^3}\left|\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathbf{r}_0'}\right| d^3\mathbf{r}_0'. \tag{35}$$

Таким образом, формально в переменных (24) мы имеем «стационарную» систему из 13-ти интегро-дифференциальных уравнений (29)–(32), (35) от 13-ти неизвестных функций $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t), \mathbf{u}(\mathbf{r}_0,t), P(\mathbf{r}_0,t), \partial\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$ и $\partial\mathbf{u}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$, где размерность снижена в явном виде. Система уравнений (29)–(32), (35) также должна допускать параметрическое семейство решений (зависимость от времени t). Каждое конкретное решение должно выделяться данными на некоторой поверхности. Сформулируем следующий результат.

Теорема 2. *Если уравнения* (17)–(20) *имеют решение* $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\in C^4(\mathbb{R}^3\times[0,T]), P = P(\mathbf{r},t)\in C^4(\mathbb{R}^3\times[0,T])$, $T>0$, *с условием на бесконечности* (28) *и* (34), *и для которого справедливо* (23), *то в переменных* (24) *выполняются интегральные соотношения* (29)–(32), (35) *на некотором промежутке времени* $[0,T']$, $T>T'>0$ *при условии, что интегралы в* (29), (2) *и* (35) *сходятся.*

В двумерном случае, чтобы получить похожую «стационарную» систему, необходимо несколько изменить замену переменных (24). Выражение (2) также можно еще раз продифференцировать по времени и получить новые соотношения.

Формально интегральные уравнения (29), (30) в переменных (24) определяют эволюцию потока (с начальным условием $\mathbf{r}|_{t=0}=\mathbf{r}_0$) для достаточно малого промежутка времени и являются следствиями уравнений Навье — Стокса. Если имеются границы у потока жидкости или газа, например, твердые стенки, то выражения (28), находящиеся из теоремы Гельмгольца, несколько усложняются [11], но уравнения, аналогичные (29)–(32), (35), также можно получить.

Заметим, что в силу условия (23) должно выполняться $|\omega_0(\mathbf{r}_0)/\partial\mathbf{r}_0|^2>\varepsilon>0, \forall\mathbf{r}_0\in\mathbb{R}^3$. В случае если это не выполняется, то наши рассуждения становятся нестрогими. Сделаем замену $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)=\mathbf{U}(\mathbf{r},t)+\mathbf{u}_0(\mathbf{r})-\mathbf{U}_0(\mathbf{r})$, где $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$, $\operatorname{div}\mathbf{u}_0(\mathbf{r})=0$ — начальное распределение скорости $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$; а $\mathbf{U}_0(\mathbf{r})$, $\operatorname{div}\mathbf{U}_0(\mathbf{r})=0$ — начальное распределение новой величины $\mathbf{U}=\mathbf{U}(\mathbf{r},t)$; Если $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$ таково, что условие (23) для $\omega_0(\mathbf{r})=\nabla\times\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$ не выполняется, то выберем $\mathbf{U}_0(\mathbf{r})$ таким, чтобы $|\partial\mathbf{w}_0(\mathbf{r}/\partial\mathbf{r})|^2>\varepsilon>0, \forall\mathbf{r}\in\mathbb{R}^3$, где $\mathbf{w}_0(\mathbf{r})=\nabla\times(U)_0(\mathbf{r})$. Для новой неизвестной величины $\mathbf{U}=\mathbf{U}(\mathbf{r},t)$ вместо (17)–(20) получаем новую систему уравнений:

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}+(\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{U}+(\beta\cdot\nabla)\mathbf{U}+(\mathbf{U}\cdot\nabla)\beta+(\beta\cdot\nabla)\beta+\nabla P=-\nu\nabla\times\mathbf{w}+\nu\Delta\beta, \tag{36}$$

$$\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}+\big(\mathbf{U}\nabla\big)\mathbf{w}+(\beta\nabla)\mathbf{w}+\big((\beta+\mathbf{U})\nabla\big)(\nabla\times\beta)-$$
$$-((\mathbf{w}+\nabla\times\beta)\nabla)(\mathbf{U}+\beta)=\nu\Delta(\mathbf{w}+\nabla\times\beta), \tag{37}$$

$$\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{U}, \tag{38}$$
$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \tag{39}$$

где $\beta = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) - \mathbf{U}_0(\mathbf{r})$. Уравнения (37) также можно преобразовать к уравнениям вида (21). Но вектор α определяется теперь из системы линейных относительно него уравнений вида

$$(\alpha\nabla)\mathbf{w} = (\beta\nabla)\mathbf{w} + ((\beta+\mathbf{U})\nabla)(\nabla\times\beta) - ((\mathbf{w}+\nabla\times\beta)\nabla)(\mathbf{U}+\beta) - \nu\Delta(\mathbf{w}+\nabla\times\beta). \tag{40}$$

В этом случае замена переменных (24) будет корректна на малом промежутке времени $t \in [0, T], T > 0$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что на некотором промежутке времени $t \in [0, T']$, $T > T' > 0$ в переменных (24) с учетом (40) выполняются слегка измененные интегральные соотношения (29)–(32), (35).

Заключение

В данной работе мы получили «стационарные» системы интегро-дифференциальных уравнений, которые являются следствиями нестационарных уравнений Эйлера и Навье — Стокса несжимаемой жидкости. Если к ним задать корректную задачу, то мы можем определить весь нестационарный поток в объеме без решения нестационарной задачи. Достаточно задать изменяющиеся во времени данные только на некоторой поверхности этого потока. Получены также интегральные уравнения в новых переменных [лагранжевых (4) и псевдолагранжевых (24)], которые определяют эволюцию потока.

В предыдущих работах авторов размерность сокращалась путем редукции переопределенных систем дифференциальных уравнений [1–3; 7]. В этом методе в случае удачного выбора дополнительного уравнения связи у переопределенных систем дифференциальных уравнений происходит редукция до систем УрЧП размерности меньшей, чем у исходных систем УрЧП. Способ, который применяется для сокращения размерности у уравнений Эйлера и Навье — Стокса в данной работе, фактически является частным случаем указанного выше. В роли уравнений связи выступают сами уравнения Эйлера и Навье — Стокса, а размерность сокращается у интегральных уравнений (12) и (29), (30). Поскольку в системах (12) и (29), (30) есть интегрирование по пространству, то редукция по пространственным переменным данным методом невозможна. Однако, если этот способ немного обобщить, то можно получить редуцированную систему интегральных уравнений, где производные по пространству у неизвестных отсутствуют.

Интегральные уравнения (29)–(32), (35) могут быть применены для исследования сложных вихрей в атмосфере. Например, если на летящем объекте установить приборы, измеряющие данные для интегро-дифференциальных уравнений (29)–(32), (35) на своей поверхности, то, зная профиль завихренности $\omega_0(\mathbf{r})$ в некоторый момент времени, можно, решая эти уравнения, в режиме реального времени отслеживать вихревую деятельность на расстоянии от этого объекта. Это важно для безопасности авиационного транспорта.

Приложение А. Особенности некоторых векторных полей

Исследуем замену переменных (24) в общем случае. Пусть $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ — векторное поле в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, $t \in [0, T]$, $T > 0$. Имеем

$$\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (\alpha\nabla)\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0, \tag{41}$$

где вектор α определяется из системы линейных относительно него уравнений

$$-(\alpha\nabla)\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \tag{42}$$

Рассмотрим замену переменных $\mathbf{r}=\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)$, $t=t$, $\mathbf{r},\mathbf{r}_0\in\mathbb{R}^3$, $t\in[0,T]$, $T>0$:

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}=\alpha(\mathbf{r},t),\mathbf{r}=\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)\text{ и }\mathbf{r}_0=\mathbf{r}_0(\mathbf{r},t),t=t,\mathbf{r}_0|_{t=0}=\mathbf{r},\mathbf{r}|_{t=0}=\mathbf{r}_0. \tag{43}$$

Здесь $\mathbf{r}=(x,y,z)$, $\mathbf{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $t=t$. В новых переменных $(\mathbf{r}_0,t)$ (43) выражение (41) запишется в виде

$$\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r_0},t)}{\partial t}=\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t}+(\alpha\nabla)\mathbf{A}(\mathbf{r_0},t)=0 \tag{44}$$

или

$$\mathbf{A}(\mathbf{r_0},t)=\mathbf{A_0}(\mathbf{r_0}), \tag{45}$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)|_{t=0}=\mathbf{A_0}(\mathbf{r})$.

Для существования замены переменных (43) $\mathbf{r}=\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_0\in\mathbb{R}^3$, $t\in[0,T]$, $T>0$ по теореме Коши — Пикара достаточно потребовать «липшицевость» правой части выражений (43). Для этого достаточно, чтобы векторное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ имело ограниченные непрерывные производные до второго порядка в $\mathbb{R}^3\times[0,T]$, $T>0$ и выполнялось условие для якобиана

$$\left|\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{r}}\right|>\varepsilon>0\text{ для любых }\mathbf{r}\in\mathbb{R}^3,t\in[0,T]. \tag{46}$$

Таким образом, если в данном случае векторное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ ограничено в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ при $t=0$, то из (45) следует, что $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ ограничено и для любого $t\in[0,T]$, $T>0$.

Имеем

$$\operatorname{div}\alpha=\frac{\partial\left(\frac{dx}{dt},y,z\right)}{\partial(x,y,z)}+\frac{\partial\left(x,\frac{dy}{dt},z\right)}{\partial(x,y,z)}+\frac{\partial\left(x,y,\frac{dz}{dt}\right)}{\partial(x,y,z)}=\frac{\frac{d\Delta}{dt}}{\Delta}, \tag{47}$$

где $\Delta=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{r}_0}\neq 0$ в силу взаимнооднозначности преобразования (43). С другой стороны, в принятых предположениях относительно векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$

$$|\operatorname{div}\alpha|<C,C>0\text{ для любых }\mathbf{r}\in\mathbb{R}^3,t\in[0,T]. \tag{48}$$

Сравнивая (47) и (48), находим, что

$$\frac{\frac{d|\Delta|}{dt}}{|\Delta|}<C \tag{49}$$

или, интегрируя по t обе части неравенства (49) и учитывая что $\Delta=1$, при $t=0$,

$$|\Delta|<\exp(CT). \tag{50}$$

Можно получить следующую оценку, используя (50),

$$\int\limits_{\infty} |\mathbf{A}(\mathbf{r},t)|d^3\mathbf{r} = \int\limits_{\infty} |\mathbf{A}_0(\mathbf{r}_0)||\Delta|d^3\mathbf{r}_0 < \exp(CT)\int\limits_{\infty} |\mathbf{A}_0(\mathbf{r}_0)|d^3\mathbf{r}_0, \text{ для любого } t \in [0,T]. \tag{51}$$

Если интеграл в левой части (51) существует для любого $t \in [0,T]$, то для него верна указанная выше оценка (51).

Если условия на производные («липшицевость») и (46) для векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ не выполняются, но выполняются для некоторого поля $\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \mathbf{B}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, t \in$ $\in [0,T], T > 0$, то аналогично можно получить, что

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}_0(\mathbf{r}_0) + \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) - \mathbf{B}(\mathbf{r}), \tag{52}$$

где $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r},t)$ определяется из (43), но вектора α вместо (42) определяются из системы уравнений

$$-(\alpha\nabla)(\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \mathbf{B}(\mathbf{r})) = \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t}.$$

Приложение В. Достаточные условия корректности редуцированной системы интегро-дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему из семи интегро-дифференциальных уравнений (9), (12), (13). Как было указано выше, выражение (13) можно дифференцировать по времени еще раз и получать новые соотношения и соответственно получать новые уравнения помимо (9), (12), (13). Найдем условия, при которых из этих редуцированных уравнений будут прямо следовать уравнения Эйлера (1)–(3).

Продифференцируем два раза уравнение (9) по лагранжеву времени t:

$$\frac{\partial(\frac{\partial x}{\partial t}, y, z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} + \frac{\partial(x, \frac{\partial y}{\partial t}, z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} + \frac{\partial(x, y, \frac{\partial z}{\partial t})}{\partial(x_0,y_0,z_0)} = 0, \tag{53}$$

$$\frac{\partial(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, y, z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} + \frac{\partial(x, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} + \frac{\partial(x, y, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2})}{\partial(x_0,y_0,z_0)} +$$
$$+ 2\frac{\partial(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} + 2\frac{\partial(\frac{\partial x}{\partial t}, y, \frac{\partial z}{\partial t})}{\partial(x_0,y_0,z_0)} + 2\frac{\partial(x, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t})}{\partial(x_0,y_0,z_0)} = 0. \tag{54}$$

Продифференцируем выражения (14)–(16) по лагранжеву времени t:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \frac{\partial(\frac{\partial P}{\partial t}, y, z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} + \frac{\partial(P, \frac{\partial y}{\partial t}, z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} + \frac{\partial(P, y, \frac{\partial z}{\partial t})}{\partial(x_0,y_0,z_0)}, \tag{55}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{\partial(\frac{\partial x}{\partial t}, P, z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} + \frac{\partial(x, \frac{\partial P}{\partial t}, z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} + \frac{\partial(x, P, \frac{\partial z}{\partial t})}{\partial(x_0,y_0,z_0)}, \tag{56}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) = \frac{\partial(\frac{\partial x}{\partial t}, y, P)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} + \frac{\partial(x, \frac{\partial y}{\partial t}, P)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} + \frac{\partial(x, y, \frac{\partial P}{\partial t})}{\partial(x_0,y_0,z_0)}. \tag{57}$$

Продифференцируем уравнение (13) по лагранжеву времени t:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla P) = {} & -\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)\right)\times\frac{(\omega_0(\mathbf{r}'_0)\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)|^3}d^3\mathbf{r}'_0- \\
& -\frac{2}{4\pi}\int\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)\right)\times\frac{(\omega_0(\mathbf{r}'_0)\cdot\nabla_0)\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)|^3}d^3\mathbf{r}'_0+ \\
& +\frac{3}{2\pi}\int\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)\right)\times\frac{(\omega_0(\mathbf{r}'_0)\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)|^5}\left(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)\right)\times \\
& \times\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)\right)d^3\mathbf{r}'_0- \\
& -\frac{1}{4\pi}\int\left(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)\right)\times\frac{(\omega_0(\mathbf{r}'_0)\cdot\nabla_0)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)|^3}d^3\mathbf{r}'_0+ \\
& +\frac{3}{2\pi}\int\left(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)\right)\times\frac{(\omega_0(\mathbf{r}'_0)\cdot\nabla_0)\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)|^5}\left(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)\right)\times \\
& \times\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)\right)d^3\mathbf{r}'_0+ \\
& +\frac{3}{4\pi}\int\left(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)\right)\times \\
& \times\left(\frac{(\omega_0(\mathbf{r}'_0)\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)|^5}\left(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)\right)\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)\right)\right)d^3\mathbf{r}'_0+ \\
& +\frac{3}{4\pi}\int\left(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)\right)\times\left(\frac{(\omega_0(\mathbf{r}'_0)\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)|^5}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)\right)^2\right)d^3\mathbf{r}'_0- \\
& -\frac{15}{4\pi}\int\left(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)\right)\times \\
& \times\left(\frac{(\omega_0(\mathbf{r}'_0)\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)|^7}\left(\left(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)\right)\right)^2\right)d^3\mathbf{r}'_0,
\end{aligned}
\tag{58}
$$

где $\nabla_0=(\partial/\partial x'_0,\partial/\partial y'_0,\partial/\partial z'_0)$.

В итоге мы имеем переопределенную систему из 15-ти интегро-дифференциальных уравнений в объеме (9), (12), (13), (53), (54) и (58) от 11-ти неизвестных функций $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)$, $P(\mathbf{r}_0,t)$, $\partial P(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$, $\partial\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$ и $\partial^2\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t^2$, из которой можно составить решение исходной системы уравнений (1)–(3). Пусть система уравнений (9), (12), (13), (53), (54) и (58) допускает некоторое параметрическое семейство решений $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)$, $P(\mathbf{r}_0,t)$, $\partial P(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$, $\partial\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$ и $\partial^2\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t^2$, где $t\in[0,T]$, $T>0$ — параметр такой, что $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)=\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)$, $P(\mathbf{r}_0,t)$, $\partial P(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$, $\partial\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$ и $\partial^2\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t^2$ просто как обозначения неизвестных функций, которые просто зависят от параметра t и $\mathbf{r}_0$. Тогда из (11) и (12) следует, что $\partial\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t|_{t=0}=\mathbf{u}_0(\mathbf{r}_0)$. Продифференцируем уравнение (9) по t и вычтем его почленно из (53). Имеем

$$
\frac{\partial(\delta_{x1},y,z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}+\frac{\partial(x,\delta_{y1},z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}+\frac{\partial(x,y,\delta_{z1})}{\partial(x_0,y_0,z_0)}=0, \tag{59}
$$

где

$$\delta_{r1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(\mathbf{r}_0, t) - \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)], \;\; \delta_{r1} = (\delta_{x1}, \delta_{y1}, \delta_{z1}). \tag{60}$$

Аналогично продифференцируем уравнение (53) по t и вычтем его почленно из (54). Находим, что

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(\delta_{x2}, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} + \frac{\partial(x, \delta_{y2}, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} + \frac{\partial(x, y, \delta_{z2})}{\partial(x_0, y_0, z_0)} + \\ &+ \frac{\partial(\delta_{x1}, \frac{\partial y}{\partial t}, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} + \frac{\partial(\delta_{x1}, y, \frac{\partial z}{\partial t})}{\partial(x_0, y_0, z_0)} + \frac{\partial(x, \delta_{y1}, \frac{\partial z}{\partial t})}{\partial(x_0, y_0, z_0)} = 0, \\ &+ \frac{\partial(\frac{\partial x}{\partial t}, \delta_{y1}, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} + \frac{\partial(\frac{\partial x}{\partial t}, y, \delta_{z1})}{\partial(x_0, y_0, z_0)} + \frac{\partial(x, \frac{\partial y}{\partial t}, \delta_{z1})}{\partial(x_0, y_0, z_0)} = 0, \end{aligned} \tag{61}$$

где

$$\delta_{r2} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}(\mathbf{r}_0, t) - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(\mathbf{r}_0, t)\right], \;\; \delta_{r2} = (\delta_{x2}, \delta_{y2}, \delta_{z2}). \tag{62}$$

Аналогично продифференцируем уравнения (12) по переменной t и вычтем их почленно из (13). Имеем

$$-\nabla P - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right] = \delta_{r2}, \tag{63}$$

$$\begin{aligned} \delta_{r2} = &-\frac{1}{4\pi}\int (\delta_{r1} - \delta_{r'1}) \times \frac{(\omega_0(\mathbf{r}'_0)\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) - \mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t)|^3} d^3\mathbf{r}'_0 - \\ &- \frac{1}{4\pi}\int (\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) - \mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t)) \times \frac{(\omega_0(\mathbf{r}'_0)\cdot\nabla_0)\delta_{r'1}}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) - \mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t)|^3} d^3\mathbf{r}'_0 + \\ &+ \frac{3}{4\pi}\int (\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) - \mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t)) \times \left(\frac{(\omega_0(\mathbf{r}'_0)\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) - \mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t)|^5}(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) - \mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t))\cdot(\delta_{r1} - \delta_{r'1})\right) d^3\mathbf{r}'_0, \end{aligned} \tag{64}$$

где

$$\delta_{r'1} = \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t}(\mathbf{r}'_0, t) - \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t)].$$

Аналогично продифференцируем уравнения (13) по t и вычтем их почленно из (58). Имеем

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla P) + \frac{\partial}{\partial t}[\nabla P] = \\ &-\frac{1}{4\pi}\int (\delta_{r2} - \delta_{r'2}) \times \frac{(\omega_0(\mathbf{r}'_0)\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) - \mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t)|^3} d^3\mathbf{r}'_0 - \\ &- \frac{1}{4\pi}\int \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t)\right) \times \frac{(\omega_0(\mathbf{r}'_0)\cdot\nabla_0)\delta_{r'1}}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) - \mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t)|^3} d^3\mathbf{r}'_0 + \\ &+ \frac{3}{4\pi}\int \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t)\right) \times \frac{(\omega_0(\mathbf{r}'_0)\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) - \mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t)|^5}(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) - \mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t))\cdot(\delta_{r1} - \delta_{r'1}) d^3\mathbf{r}'_0 - \\ &- \frac{1}{4\pi}\int (\delta_{r1} - \delta_{r'1}) \times \frac{(\omega_0(\mathbf{r}'_0)\cdot\nabla_0)\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) - \mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t)|^3} d^3\mathbf{r}'_0 - \\ &- \frac{1}{4\pi}\int (\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) - \mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t)) \times \frac{(\omega_0(\mathbf{r}'_0)\cdot\nabla_0)\delta_{r'2}}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) - \mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0, t)|^3} d^3\mathbf{r}'_0 + \end{aligned}$$

$$+\frac{3}{4\pi}\int(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t))\times\frac{(\omega_0(\mathbf{r}'_0)\cdot\nabla_0)\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)|^5}(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t))\cdot(\delta_{r1}-\delta_{r'1})d^3\mathbf{r}'_0+$$

$$+\frac{3}{4\pi}\int(\delta_{r1}-\delta_{r'1})\times\frac{(\omega_0(\mathbf{r}'_0)\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)|^5}(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t))\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)\right)d^3\mathbf{r}'_0d^3\mathbf{r}'_0+$$

$$+\frac{3}{4\pi}\int(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t))\times\frac{(\omega_0(\mathbf{r}'_0)\cdot\nabla_0)\delta_{r'1}}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)|^5}(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t))\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)\right)d^3\mathbf{r}'_0+$$

$$+\frac{3}{4\pi}\int(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t))\times\frac{(\omega_0(\mathbf{r}'_0)\cdot\nabla_0)\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)|^5}(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t))\cdot(\delta_{r2}-\delta_{r'2})d^3\mathbf{r}'_0+$$

$$+\frac{3}{4\pi}\int(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t))\times\frac{(\omega_0(\mathbf{r}'_0)\cdot\nabla_0)\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)|^5}(\delta_{r1}-\delta_{r'1})\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)\right)d^3\mathbf{r}'_0d^3\mathbf{r}'_0-$$

$$-\frac{15}{4\pi}\int(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\times\left(\frac{(\omega_0(\mathbf{r}'_0)\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^7}\left((\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'\right)\right)((\mathbf{r}-\mathbf{r}')(\delta_{r1}-\delta_{r'1}))\right)d^3\mathbf{r}'_0, \tag{65}$$

где

$$\delta_{r'2}=\frac{\partial^2\mathbf{r}'}{\partial t^2}(\mathbf{r}'_0,t)-\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\mathbf{r}'}{\partial t}(\mathbf{r}'_0,t)\right].$$

Здесь

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla P)+\frac{\partial}{\partial t}[\nabla P]=-\begin{pmatrix}\frac{\partial(\delta_p,y,z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}+\frac{\partial(P,\delta_{y1},z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}+\frac{\partial(P,y,\delta_{z1})}{\partial(x_0,y_0,z_0)}\\ \frac{\partial(\delta_x,P,z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}+\frac{\partial(x,\delta_p,z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}+\frac{\partial(x,P,\delta_{z1})}{\partial(x_0,y_0,z_0)}\\ \frac{\partial(\delta_{x1},y,P)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}+\frac{\partial(x,\delta_{y1},P)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}+\frac{\partial(x,y,\delta_p)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}\end{pmatrix}, \tag{66}$$

$$\delta_p=\frac{\partial P}{\partial t}(\mathbf{r}_0,t)-\frac{\partial}{\partial t}[P(\mathbf{r}_0,t)]. \tag{67}$$

Пусть на некоторой поверхности S в пространстве $\mathbb{R}^3$ известны величины $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)$, $P(\mathbf{r}_0,t)$, $\partial P(\mathbf{r}_0,t)/\partial t, \partial\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$ и $\partial^2\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t^2$, которые согласуются следующим образом:

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}(\mathbf{r}_0,t)-\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)]=0,\mathbf{r}_0\in S,t\in[0,T], \tag{68}$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t^2}(\mathbf{r}_0,t)-\frac{\partial}{\partial t}[\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}(\mathbf{r}_0,t)]=0,\mathbf{r}_0\in S,t\in[0,T], \tag{69}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}(\mathbf{r}_0,t)-\frac{\partial}{\partial t}[P(\mathbf{r}_0,t)]=0,\mathbf{r}_0\in S,t\in[0,T]. \tag{70}$$

Пусть мы имеем решение системы уравнений (9), (12), (13), (53), (54) и (58) от неизвестных функций $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)$, $P(\mathbf{r}_0,t)$, $\partial P(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$, $\partial\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$ и $\partial^2\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t^2$, которые заданы на поверхности S и согласуются по условиям (68)–(70). Пусть на этом решении линейная система (59), (61), (64), (65) из 8 интегро-дифференциальных уравнений и 7 неизвестных δ_{r1}, δ_{r2}, δ_p с условием на поверхности S

$$\delta_{r'1}=0,\ \delta_{r2}=0,\ \delta_p=0,\ \mathbf{r}_0\in S,\ t\in[0,T] \tag{71}$$

имеет только нулевое решение в пространстве $\mathbb{R}^3$. Тогда согласно самому способу получения системы уравнений (59), (61), (64), (65) для решения $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)$, $P(\mathbf{r}_0,t)$, $\partial P(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$,

$\partial\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$ и $\partial^2\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t^2$ выполняются соотношения (68)–(70), но во всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Кроме того, из уравнения (63) следует, что

$$0 = -\nabla P - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}\right] = -\nabla P - \frac{\partial^2}{\partial t^2}[\mathbf{r}]. \tag{72}$$

Система уравнений (72) с учетом уравнений (9), (14)–(16) является системой уравнений Эйлера в переменных Лагранжа. Скорость и давление тогда будут определяться по формулам $\mathbf{u} = \partial\mathbf{r}/\partial t(\mathbf{r}_0(\mathbf{r},t),t), P = P(\mathbf{r}_0(\mathbf{r},t),t)$.

Следует отметить, что величины $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)$, $P(\mathbf{r}_0,t)$, $\partial P(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$, $\partial\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$ и $\partial^2\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t^2$ не могут быть заданы на поверхности S произвольно. Они фиксируются заранее из начального распределения $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)|_{t=0} = \mathbf{r}_0$, $\partial\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}_0)$ во всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Эти данные могут быть найдены, например, из независимых экспериментальных измерений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аккерман, В. Б. Снижение размерности в уравнениях гидродинамики / В. Б. Аккерман, М. Л. Зайцев // ЖВММФ. — 2011. — Т. 51, № 8. — С. 1518–1530.

2. Зайцев, М. Л. Гипотеза об упрощении переопределенных систем дифференциальных уравнений и ее применение к уравнениям гидродинамики / М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2015. — № 2. — С. 5–27.

3. Зайцев, М. Л. Еще один способ нахождения частных решений уравнений математической физики / М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2016. — № 6 (37). — С. 119–127. — DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.6.11.

4. Зайцев, М. Л. Задача обтекания и сокращение размерности в уравнениях Навье — Стокса / М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман // Труды МФТИ. — 2015. — Т. 7, № 3. — С. 18–30.

5. Зайцев, М. Л. К нелинейной теории движения поверхностей гидродинамических разрывов / М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман // ЖЭТФ. — 2009. — Т. 135, № 4. — С. 800–819.

6. Зайцев, М. Л. Метод описания стационарного фронта реакции в двухмерном потоке / М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман // Письма в ЖЭТФ. — 2010. — Т. 92, № 11. — С. 813–816.

7. Зайцев, М. Л. Редукция переопределенных систем дифференциальных уравнений математической физики / М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2017. — Т. 20, № 4. — С. 43–67. — DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.4.5.

8. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М., 1986. — 736 с.

9. Математическая теория горения и взрыва / Я. Б. Зельдович, Г. И. Баренблат, В. Б. Либрович, Г. М. Махвиладзе. — М. : Наука, 1980. — 478 с.

10. Самарский, А. А. Разностные методы решения задач газовой динамики / А. А. Самарский, Ю. П. Попов. — М. : Наука, 1980. — 352 с.

11. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1977. — 742 с.

12. Book, D. L. Rayleigh-Taylor instability in the “shallow-water” approximation / D. L. Book, E. Ott, A. L. Sulton // Phys. Fluids. — 1974. — Vol. 17, № 4. — P. 676–678.

13. Ott, E. Nonlinear evolution of the Rayleigh — Taylor instability of thin layer / E. Ott // Phys. Rev. Lett. — 1972. — Vol. 29. — P. 1429–1432.

14. Williams, F. A. Combustion Theory / F. A. Williams. — Menlo Park, CA : Benjamin Cummings, 1985. — 708 p.

REFERENCES

1. Akkerman V.B., Zaytsev M.L. Snizhenie razmernosti v uravneniyakh gidrodinamiki [Dimension Reduction in Fluid Dynamics Equations]. *ZhVMMF*, 2011, vol. 51, no. 8, pp. 1518-1530.

2. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Gipoteza ob uproshchenii pereopredelennykh sistem differentsialnykh uravneniy i ee primenenie k uravneniyam gidrodinamiki [Hypothesis on Reduction of Overdetermined Systems of Differential Equations and Its Application to Equations of Hydrodynamics]. *Vestnik VGU. Seriya: Fizika. Matematika*, 2015, no. 2, pp. 5-27.

3. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Eshche odin sposob nakhozhdeniya chastnykh resheniy uravneniy matematicheskoy fiziki [Another Method for Finding Particular Solutions of Equations of Mathematical Physics]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universitetv. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2016, no. 6 (37), pp. 119-127. DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.6.11.

4. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Zadacha obtekaniya i sokrashchenie razmernosti v uravneniyakh Navye — Stoksa [Flow Problem and Dimension Reduction in the Navier — Stokes Equations]. Trudy MFTI, 2015, vol. 7, no. 3, pp. 18–30.

5. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. K nelineynoy teorii dvizheniya poverkhnostey gidrodinamicheskikh razryvov [Nonlinear Theory for the Motion of Hydrodynamic Discontinuity Surfaces]. *ZhETF*, 2009, vol. 135, no. 4, pp. 800-819.

6. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Metod opisaniya statsionarnogo fronta reaktsii v dvukhmernom potoke [Method for Describing the Steady-State Reaction Front in a Two-Dimensional Flow]. *Pisma v ZhETF*, 2010, vol. 92, no. 11, pp. 813-816.

7. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Reduktsiya pereopredelennykh sistem differentsialnykh uravneniy matematicheskoy fiziki [Reduction of Overdetermined Differential Equations of Mathematical Physics]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2017, vol. 20, no. 4, pp. 43-67. DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.4.5.

8. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika: Gidrodinamika* [Course of Theoretical Physics: Fluid Mechanics]. Moscow, 1986. 736 p.

9. Zeldovich Ya.B., Barenblat G.I., Librovich V.B., Makhviladze G.M. *Matematicheskaya teoriya goreniya i vzryva* [Mathematical Theory of Combustion and Explosion]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 478 p.

10. Samarskiy A.A., Popov Yu.P. *Raznostnye metody resheniya zadach gazovoy dinamiki* [Difference Methods for Solving Problems of Gas Dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 352 p.

11. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 742 p.

12. Book D.L., Ott E., Sulton A.L. Rayleigh-Taylor Instability in the "Shallow-Water" Approximation. *Phys. Fluids.*, 1974, vol. 17, no. 4, pp. 676-678.

13. Ott E. Nonlinear Evolution of the Rayleigh — Taylor Instability of Thin Layer. *Phys. Rev. Lett.*, 1972, vol. 29, pp. 1429-1432.

14. Williams F.A. *Combustion Theory*. Menlo Park, CA, Benjamin Cummings, 1985. 708 p.

EXPLICIT REPRESENTATION OF THE EULER AND NAVIER — STOKES EQUATIONS OF INCOMPRESSIBLE FLUID WITH REDUCED DIMENSIONALITY IN INTEGRAL FORM

Maksim L. Zaytsev

Business,
mlzaytsev@gmail.com, mlzaytsev@mail.ru
Moscow, Russian Federation

Vyacheslav B. Akkerman

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Department of Mechanical and Aerospace Engineering,
West Virginia University
Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu
WV 26506-6106 Morgantown, USA

Abstract. In this paper, we have obtained "stationary" systems of integral-differential equations, which are consequences of the non-stationary Euler and Navier — Stokes equations of an incompressible fluid, and for which there are no time derivatives. If we set a correct problem for them, then we can determine the entire non-stationary flow in the volume without solving the nonstationary problem. It is enough to specify time-varying data only on some surface of this stream. The method of reduction of overdetermined systems of differential equations, proposed earlier by the authors, is used. In this method, in the case of a successful choice of the additional constraint equation, the overdetermined systems of differential equations are reduced to PDE systems of dimension less than that of the original PDE systems. The Euler and Navier — Stokes equations themselves act as the constraint equations, and the dimension is reduced for the integral equations, which are obtained using the Helmholtz theorem on the expansion of an arbitrary vector field into vortex and potential components. The peculiarity of this work lies in the fact that all the equations reduced in dimension are obtained in an explicit form, in contrast to the previous works of the authors, where up to 200–300 equations with reduced dimensions were proposed. In reduced systems of integral-differential equations, there is integration over space, therefore, reduction over spatial variables by given method is impossible. If this method is generalized a little, then we can obtain a reduced system of integral equations, where the unknowns have no derivatives with respect to space, but integration over space remains. Non-stationary new integral equations are also obtained, which determine the evolution of the flow. In Appendices A and B, sufficient conditions for the correctness of the reduced system of integral-differential equations are derived. Conditions are found under which the Euler equations follow directly from these reduced equations. It is shown how the time-varying data on some surface of this stream should be related. The change of variables, which is used in the reduction of the Navier — Stokes equations, is also investigated. The resulting integral equations can be used to study complex vortices in the atmosphere. For example, if devices measuring data on its surface are installed on a flying object, then, knowing the vorticity profile $\omega_0(\mathbf{r})$ at a certain moment in time, it is possible, by solving these equations, to track vortex activity at a distance from this object in real time.

Key words: overdetermined systems of differential equations, dimension of differential equations, hydrodynamics, Euler equations, Navier — Stokes equations.