DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2022.2.3

УДК 517.9
ББК 22.161.6

Дата поступления статьи: 08.06.2021
Дата принятия статьи: 24.02.2022

ФОРМУЛА ПЕРВОГО РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО СЛЕДА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С РАЗРЫВНОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

Сергей Иванович Митрохин

Кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник,
научно-исследовательский вычислительный центр,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
mitrokhin-sergey@yandex.ru
Ленинские горы, 1, стр. 4, 119992 г. Москва, Российская Федерация

Аннотация. Изучаются спектральные свойства дифференциального оператора восьмого порядка с кусочно-гладким потенциалом и разрывной весовой функцией. При больших значениях спектрального параметра исследована асимптотика решений дифференциальных уравнений, задающих изучаемый оператор. С помощью полученной асимптотики определены условия «сопряжения» в точке разрыва коэффициентов, необходимость которых следует из физических соображений. Рассмотрены разделенные граничные условия, определяющие оператор. Исследована индикаторная диаграмма уравнения, корнями которого являются собственные значения оператора. Найдена асимптотика собственных значений изучаемого дифференциального оператора. С помощью метода Лидского — Садовничего вычислен первый регуляризованный след дифференциального оператора.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, спектральный параметр, разделенные граничные условия, индикаторная диаграмма, асимптотика собственных значений, регуляризованный след оператора.

Постановка задачи

Изучим спектральные свойства дифференциального оператора с разрывными коэффициентами, задаваемого на отрезке $[0;\pi]$ дифференциальными уравнениями

$$y_1^{(8)}(x) + q_1(x)y_1(x) = \lambda a^8 y_1(x), \quad 0 \leqslant x < x_1, \quad a > 0, \tag{1}$$

$$y_2^{(8)}(x) + q_2(x)y_2(x) = \lambda b^8 y_2(x), \quad x_1 < x \leqslant \pi, \quad b > 0, \tag{2}$$

с условиями «сопряжения» в точке x_1 разрыва коэффициентов

$$y_1(x_1 - 0) = y_2(x_1 + 0); \quad \frac{y_1^{(m)}(x_1 - 0)}{a^m} = \frac{y_2^{(m)}(x_1 + 0)}{b^m}, \quad m = 1, 2, \ldots, 7, \tag{3}$$

с граничными условиями

$$y_1^{(m_1)}(0) = y_1^{(m_2)}(0) = \cdots = y_1^{(m_7)}(0) = y_2^{(n_1)}(\pi) = 0, \tag{4}$$

$$m_1 < m_2 < \cdots < m_7; \quad m_k, n_1 \in \{0, 1, 2, \ldots, 7\}, \quad k = 1, 2, \ldots, 7.$$

Предполагается, что коэффициенты дифференциальных уравнений (1), (2) удовлетворяют следующим условиям гладкости:

$$q_1(x) \in C^8[0; x_1); \quad q_2(x) \in C^8(x_1; \pi]. \tag{5}$$

Уравнения (1), (2) можно записать в сокращенной векторной форме

$$\vec{y}^{(8)}(x) + \vec{Q}(x)\vec{y}(x) = \lambda\vec{\rho}(x)\vec{y}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$

$$\vec{y}(x) = \begin{cases} y_1(x), & 0 \leqslant x < x_1, \\ y_2(x), & x_1 < x \leqslant \pi; \end{cases} \quad \vec{\rho}(x) = \begin{cases} a^8, & 0 \leqslant x < x_1, \\ b^8, & x_1 < x \leqslant \pi; \end{cases}$$

$$\vec{Q}(x) = \begin{cases} q_1(x), & 0 \leqslant x < x_1, \\ q_2(x), & x_1 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

В уравнении (1)–(4) число λ ($\lambda \in \mathbb{C}$) — спектральный параметр, функция $\vec{Q}(x)$ — потенциал, функция $\vec{\rho}(x)$ — весовая функция, точка $x_1 \in (0, \pi)$ — точка разрыва коэффициентов. В случае отсутствия точки разрыва x_1 (то есть когда $\vec{Q} \in C^8[0, \pi]$) дифференциальный оператор был изучен в работе [13].

1. Исторический обзор

В работе [4] был впервые вычислен регуляризованный след дифференциального оператора в задаче Штурма — Лиувилля $-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x)$ с разделенными граничными условиями $y'(0) = 0, y'(\pi) = 0$, в предположении, что потенциал $q(x) \in C^1[0, \pi]$ и условии $\int_0^\pi q(t)dt = 0$: $\sum_{k=0}^{\infty}(\mu_k - \lambda_k) = \frac{q(0)+q(\pi)}{4}$, где μ_k — собственные числа оператора, а $\lambda_k = k^2$ — собственные числа того же оператора с $q(x) \equiv 0$.

Аналогичные проблемы были рассмотрены в работе [3]. В [13] изучены регуляризованные следы операторов с разделенными граничными условиями. В [6] предложен общий метод вычисления регуляризованных следов дифференциальных операторов в предположении регулярной разделимости корней уравнений на собственные значения операторов. Но во всех вышеперечисленных работах коэффициенты дифференциальных уравнений, задающих операторы, предполагались гладкими функциями.

Впервые формулы регуляризованных следов для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами были вычислены в работах автора [10; 11]. Для вычисления следов операторов порядка выше второго с разрывными коэффициентами на тот момент времени не было теоретической базы.

Изучение операторов с разрывными весовыми функциями было начато в работе [5]: рассмотрена сходимость разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора. Аналогичные вопросы для оператора четвертого порядка исследованы в [2]. В [9] автором рассмотрены спектральные свойства оператора второго порядка с кусочно-постоянной функцией. В работе [8] изучены операторы второго порядка с разрывными весовыми функциями, в том числе приведены примеры изоспектральных операторов (см. [15]). В настоящей работе мы продолжаем эти исследования: изучаем свойства оператора восьмого порядка с разрывной весовой функцией и вычисляем его регуляризованный след.

2. Асимптотика решений дифференциальных уравнений (1), (2) при больших значениях спектрального параметра λ

Пусть $\lambda = s^8$, $s = \sqrt[8]{\lambda}$, причем для корректности дальнейших выкладок зафиксируем ту ветвь арифметического корня восьмой степени, для которой $\sqrt[8]{1} = +1$. Пусть ω_k $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ — различные корни восьмой степени из единицы:

$$\begin{gathered}
\omega_k^8 = 1; \quad \omega_k = e^{\frac{2\pi i}{8}(k-1)},\ k = 1, 2, \ldots, 8; \quad \omega_1 = 1; \\
\omega_2 = e^{\frac{2\pi i}{8}} = \cos\left(\frac{2\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = z; \quad \omega_3 = e^{\frac{4\pi i}{8}} = z^2 = i; \ldots; \\
\omega_m = z^{m-1}, \quad \omega_{n+8} = \omega_m, \quad m = 1, 2, \ldots, 8; \quad \omega_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; \quad \omega_5 = -1; \\
\omega_6 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i; \quad \omega_7 = -i; \quad \omega_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.
\end{gathered} \tag{6}$$

Для чисел ω_k $(k = 1, 2, \ldots 8)$ из (6) справедливы следующие свойства:

$$\sum_{k=1}^{8} \omega_k^m = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, 7; \quad \sum_{k=1}^{8} \omega_k^m = 8; \quad m = 0,\ m = 8; \tag{7}$$

$$\sum_{k=0}^{7} \omega_m^k = 0, \quad m = 2, 3, \ldots, 8; \quad \sum_{k=0}^{7} \omega_m^k = 8, \quad m = 1. \tag{8}$$

Аналогично монографии [12, гл. 2] устанавливается следующее утверждение.

Теорема 1. *Общее решение дифференциальных уравнений* (1), (2) *представляется в виде*

$$y_1(x,s) = \sum_{k=1}^{8} C_{1k} y_{1k}(x,s); \quad y_1^{(m)}(x,s) = \sum_{k=1}^{8} C_{1k} y_{1k}^{(m)}(x,s), \quad m = 1, 2, \ldots, 7; \tag{9}$$

$$y_2(x,s) = \sum_{k=1}^{8} C_{2k} y_{2k}(x,s); \quad y_2^{(m)}(x,s) = \sum_{k=1}^{8} C_{2k} y_{2k}^{(m)}(x,s), \quad m = 1, 2, \ldots, 7; \tag{10}$$

при этом C_{1k}, C_{2k} $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ — *произвольные постоянные, причем для фундаментальных систем решений* $\{y_{1k}(x,s)\}_{k=1}^{8}$ *и* $\{y_{2k}(x,s)\}_{k=1}^{8}$ *при* $s \to \infty$ *справедливы следующие асимптотические формулы и оценки:*

$$y_{1k}(x,s) = e^{a\omega_k s x}\left[1 + \frac{\omega_k A_7(x)}{s^7} + \frac{A_8^0(x)}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|ax}}{s^9}\right)\right],\ k = 1, 2, \ldots, 8, \tag{11}$$

$$y_{1k}^{(m)}(x,s)=(a\omega_k s)^m e^{a\omega_k sx}\left[1+\frac{\omega_k A_7(x)}{s^7}+\frac{A_8^m(x)}{s^8}+\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|ax}}{s^9}\right)\right], \tag{12}$$
$$k=1,2,\ldots,8;\ m=1,2,\ldots,7;$$
$$y_{2k}(x,s)=e^{b\omega_k sx}\left[1+\frac{\omega_k B_7(x)}{s^7}+\frac{B_8^0(x)}{s^8}+\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|bx}}{s^9}\right)\right],\quad k=1,2,\ldots,8; \tag{13}$$
$$y_{2k}^{(m)}(x,s)=(b\omega_k s)^m e^{b\omega_k sx}\left[1+\frac{\omega_k B_7(x)}{s^7}+\frac{B_8^m(x)}{s^8}+\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|bx}}{s^9}\right)\right], \tag{14}$$
$$k=1,2,\ldots,8;\quad m=1,2,\ldots,7;$$
$$A_7(x)=-\frac{1}{8a^7}\int_0^x q_1(t)dt,\quad A_7(0)=0;\quad A_7'(x)=-\frac{q_1(x)}{8a^7}; \tag{15}$$
$$B_7(x)=-\frac{1}{8b^7}\int_{x_1}^x q_2(t)dt,\quad B_7(x_1)=0;\quad B_7'(x)=-\frac{q_2(x)}{8b^7}; \tag{16}$$
$$A_8^0(x)=\frac{7q_1(x)-7q_1(0)}{16a^8},\quad A_8^1(x)=\frac{5q_1(x)-7q_1(0)}{16a^8};\quad A_8^2(x)=\frac{3q_1(x)-7q_1(0)}{16a^8};\ldots;$$
$$A_8^m(x)=\frac{(7-2m)q_1(x)-7q_1(0)}{16a^7},\quad m=0,1,2,\ldots,7;\quad A_8^7(x)=\frac{-7q_1(x)-7q_1(0)}{16a^8}; \tag{17}$$
$$B_8^0(x)=\frac{7q_2(x)-7q_2(x_1)}{16b^8},\quad B_8^1(x)=\frac{5q_2(x)-7q_2(x_1)}{16b^8};\ldots;$$
$$B_8^m(x)=\frac{(7-2m)q_2(x)-7q_2(x_1)}{16b^7},\quad m=0,1,2,\ldots,7;$$
$$B_8^6(x)=\frac{-5q_2(x)-7q_2(x_1)}{16b^8};\quad B_8^7(x)=\frac{-7q_2(x)-7q_2(x_1)}{16b^8}. \tag{18}$$

Для коэффициентов асимптотических формул (11)–(18) справедливы следующие соотношения:

$$\sum_{m=0}^{7}A_8^m(x)=\sum_{m=0}^{7}A_8^m(0)=\sum_{m=0}^{7}A_8^m(x_1)=D_8=-\frac{7q_1(0)}{2a^8}; \tag{19}$$
$$\sum_{m=0}^{7}B_8^m(x)=\sum_{m=0}^{7}B_8^m(x_1)=\sum_{m=0}^{7}B_8^m(\pi)=E_8=-\frac{7q_2(x_1)}{2b^8}. \tag{20}$$

Для фундаментальных систем решений $\{y_{1k}(x,s)\}_{k=1}^8$ и $\{y_{2k}(x,s)\}_{k=1}^8$ из (11)–(14) справедливы начальные условия:

$$A_7(0)=0;\quad A_8^0(0)=0;\quad B_7(x_1)=0;\quad B_7^0(x_1)=0;$$
$$y_{1k}(0,s)=1;\quad y_{2k}(x_1,s)=e^{b\omega_k sx_1};$$
$$y_{1k}^{(m)}(0,s)=(a\omega_k s)^m\left[1+\frac{0}{s^7}+\frac{A_8^m(0)}{s^8}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right];$$
$$y_{2k}^{(m)}(x_1,s)=(b\omega_k s)^m e^{b\omega_k sx_1}\left[1+\frac{0}{s^7}+\frac{B_8^m(x_1)}{s^8}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right], \tag{21}$$
$$k=1,2,\ldots,8;\quad m=1,2,\ldots,7.$$

3. Изучение определителя Вронского $\Delta_{02,2}(x,s)$

Пусть $\Delta_{02,2}(x,s)$ — определитель Вронского фундаментальной системы решений $\{y_{2k}(x,s)\}_{k=1}^{8}$ дифференциального уравнения (2)

$$\Delta_{02,2}(x,s) = \det \mathrm{Wr}[y_{21}(x,s), y_{22}(x,s), \ldots, y_{28}(x,s)] =$$
$$= \begin{vmatrix} y_{21}(x,s) & y_{22}(x,s) & \ldots & y_{27}(x,s) & y_{28}(x,s) \\ y'_{21}(x,s) & y'_{22}(x,s) & \ldots & y'_{27}(x,s) & y'_{28}(x,s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{(7)}_{21}(x,s) & y^{(7)}_{22}(x,s) & \ldots & y^{(7)}_{27}(x,s) & y^{(7)}_{28}(x,s) \end{vmatrix}. \qquad (22)$$

Из общей теории линейных дифференциальных уравнений известно, что определитель Вронского $\Delta_{02,2}(x,s)$ не должен зависеть от x: $\Delta_{02,2}(x,s) = \Delta_{02,2}(s) \neq 0$.

Применяя формулы (13)–(18), имеем

$$\Delta_{02,2}(x,s) =$$
$$= \begin{vmatrix} h_1\left[1 + \dfrac{\omega_1 B_7(x)}{s^7} + \frac{B_8^0}{s^8} + \ldots\right] & \ldots & h_8\left[1 + \dfrac{\omega_8 B_7(x)}{s^7} + \frac{B_8^0}{s^8} + \ldots\right] \\ h_1(bs)\omega_1\left[1 + \dfrac{\omega_1 B_7(x)}{s^7} + \frac{B_8^1}{s^8} + \ldots\right] & \ldots & h_8(bs)\omega_8\left[1 + \dfrac{\omega_8 B_7(x)}{s^7} + \frac{B_8^1}{s^8} + \ldots\right] \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_1(bs)^7\omega_1^7\left[1 + \dfrac{\omega_1 B_7(x)}{s^7} + \frac{B_8^7}{s^8} + \ldots\right] & \ldots & h_8(bs)^7\omega_8^7\left[1 + \dfrac{\omega_8 B_7(x)}{s^7} + \frac{B_8^7}{s^8} + \ldots\right] \end{vmatrix}, \qquad (23)$$

где введены обозначения $h_k = e^{b\omega_k sx}$, $k = 1, 2, \ldots, 8$.

Обозначим через Δ_{00} определитель Вандермонда чисел $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_8$

$$\Delta_{00} = \det \mathrm{Wandermound's}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_8) =$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \ldots & \omega_8 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 & \ldots & \omega_8^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^7 & \omega_2^7 & \omega_3^7 & \ldots & \omega_8^7 \end{vmatrix} = \prod_{\substack{k>m; \\ k,m=1,2,\ldots,8}} (\omega_k - \omega_m) = \Delta_{00} \neq 0. \qquad (24)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* (δ_{mk}) $(k, m = 1, 2, \ldots, 8)$ — *матрица алгебраических миноров к элементам* b_{mk} *определителя* Δ_{00} *из* (24). *Тогда*

$$(\delta_{mk}) = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \ldots & \delta_{18} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \ldots & \delta_{28} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{81} & \delta_{82} & \ldots & \delta_{88} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\Delta_{00}}{8}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 \\ -\omega_1^{-1} & \omega_2^{-1} & -\omega_3^{-1} & \omega_4^{-1} & \dots & -\omega_7^{-1} & \omega_8^{-1} \\ \omega_1^{-2} & -\omega_2^{-2} & \omega_3^{-2} & -\omega_4^{-2} & \dots & \omega_7^{-2} & -\omega_8^{-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{-6} & -\omega_2^{-6} & \omega_3^{-6} & -\omega_4^{-6} & \dots & \omega_7^{-6} & -\omega_8^{-6} \\ -\omega_1^{-7} & \omega_2^{-7} & -\omega_3^{-7} & \omega_4^{-7} & \dots & -\omega_7^{-7} & \omega_8^{-7} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Доказательство леммы 1 можно найти в работе [7]. Для вычисления определителя $\Delta_{02,2}(x,s)$ из (23) вынесем из k-го столбца $(k = 1, 2, \dots, 8)$ множитель h_k, из k-й строки вынесем множитель $(bs)^{k-1}$ и разложим получившийся определитель по столбцам на сумму определителей. В результате получаем

$$\begin{gathered} \Delta_{02,2}(x,s) = \\ = \prod_{k=1}^{8} h_k (bs)(bs)^2(\dots)(bs)^7\left[\Delta_{00} + \frac{\Delta_{02,2,7}(x,s)}{s^7} + \frac{\Delta_{02,2,8}(x,s)}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right], \end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered} \Delta_{02,2,7}(x,s) = \omega_1 B_7(x)\Delta_{00} + \omega_2 B_7(x)\Delta_{00} + \dots + \omega_8 B_7(x)\Delta_{00} = \\ = \Delta_{00}B_7(x)(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_8) \overset{(7)}{=} \Delta_{00}B_7(x)\cdot 0 = 0; \end{gathered} \tag{27}$$

$$\begin{gathered} \Delta_{02,2,8}(x,s) = \begin{vmatrix} B_8^0(x) & 1 & \dots & 1 \\ \omega_1 B_8^1(x) & \omega_2 & \dots & \omega_8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^7 B_8^7(x) & \omega_2^7 & \dots & \omega_8^7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & B_8^0(x) & 1 & \dots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 B_8^1(x) & \omega_3 & \dots & \omega_8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^7 & \omega_2^7 B_8^7(x) & \omega_3^7 & \dots & \omega_8^7 \end{vmatrix} + \\ + \dots = [B_8^0(x)\delta_{11} - \omega_1 B_8^1(x)\delta_{21} + \omega_1^2 B_8^2(x)\delta_{31} - \dots - \omega_1^7 B_8^7(x)\delta_{81}] + \\ + [-B_8^0(x)\delta_{12} + \omega_2 B_8^1(x)\delta_{22} - \omega_2^2 B_8^2(x)\delta_{33} + \dots + \omega_2^7 B_8^7(x)\delta_{82}] + \dots \overset{(25)}{=} \\ = \frac{\Delta_{00}}{8}\cdot 8\sum_{k=8}^{7} B_8^k(x) \overset{(20)}{=} \Delta_{00}E_8. \end{gathered} \tag{28}$$

Учитывая, что $\prod_{k=1}^{8} h_k = \prod_{k=1}^{8} e^{b\omega_k sx} = e^{b(\omega_1+\omega_2+\dots+\omega_8)sx} \overset{(7)}{=} e^0 = 1$, получаем

$$\Delta_{02,2}(x,s) \overset{(26)-(28)}{=} (bs)^{28}\Delta_{00}\left[1 + \frac{0}{s^7} + \frac{E_8}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right], \tag{29}$$

то есть определитель $\Delta_{02,2}(x,s) = \Delta_{02,2}(s)$ не зависит от x, что подтверждает справедливость вышеописанных асимптотических формул (13)–(18).

Аналогичным образом доказывается, что определитель Вронского $\Delta_{02,1}(x,s)$ фундаментальной системы решений $\{y_{2k}(x,s)\}_{k=1}^{8}$ дифференциального уравнения (1) также не зависит от x, и для него справедлива формула

$$\Delta_{02,1}(x,s) = \det \mathrm{Wr}[y_{11}(x,s); y_{12}(x,s); \dots; y_{18}(x,s) = (as)^{28}\Delta_{00}\left[1 + \frac{0}{s^7} + \frac{D_8}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right],$$

$$D_8 \overset{(19)}{=} -\frac{7q_1(0)}{2a^8}.$$

4. Изучение условий «сопряжения» (3)

Применяя формулы (9), (10), из условий «сопряжения» (3) получаем

$$\begin{cases} y_2(x_1+0,s) \overset{(3)}{=} y_1(x_1-0,s) \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{8} C_{2k}y_{2k}(x_1+0,s) = \sum\limits_{k=1}^{8} C_{1k}y_{1k}(x_1-0,s); & (30) \\ \dfrac{y_2^{(m)}(x_1+0,s)}{(bs)^m} \overset{(3)}{=} \dfrac{y_1^{(m)}(x_1-0,s)}{(as)^m} \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{8} C_{2k}\dfrac{y_{2k}^{(m)}(x_1+0,s)}{(bs)^m} = \sum\limits_{k=1}^{4} C_{1k}\dfrac{y_{1k}^{(m)}(x_1-0,s)}{(as)^m}, & \\ \quad m = 1,2,\ldots,7. & (31) \end{cases}$$

Рассматривая систему (30), (31) как систему из восьми уравнений с восемью неизвестными $C_{21}, C_{22}, \ldots, C_{28}$ (при этом $C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{18}$ — параметры), приходим к выводу, что эта система имеет единственное решение

$$C_{21} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{02,2}(s) \neq 0}; \quad C_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{02,2}(s)}; \ldots; C_{2k} = \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_{02,2}(s)}, \quad k = 1,2,\ldots,8, \qquad (32)$$

при этом определитель Δ_{2k} $(k = 1,2,\ldots,8)$ получается из определителя $\Delta_{02,2}(s)$ заменой k-го столбца на столбец

$$\left(\sum_{k=1}^{8} C_{1k}y_{1k}(x_1-0,s);\ \sum_{k=1}^{8} C_{1k}\frac{y'_{1k}(x_1-0,s)}{as}; \ldots;\ \sum_{k=1}^{8} C_{1k}\frac{y_{1k}^{(7)}(x_1-0,s)}{(as)^7}\right)^{*}.$$

Таким образом, имеем

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{8} C_{1k}y_{1k}(x_1-0,s) & y_{22}(x_1+0,s) & \ldots & y_{28}(x_1+0,s) \\ \sum\limits_{k=1}^{8} C_{1k}\dfrac{y'_{1k}(x_1-0,s)}{as} & \dfrac{y'_{22}(x_1+0,s)}{bs} & \ldots & \dfrac{y'_{28}(x_1+0,s)}{bs} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{k=1}^{8} C_{1k}\dfrac{y_{1k}^{(7)}(x_1-0,s)}{(as)^7} & \dfrac{y_{22}^{(7)}(x_1+0,s)}{(bs)^7} & \ldots & \dfrac{y_{28}^{(7)}(x_1+0,s)}{(bs)^7} \end{vmatrix} =$$

$$= C_{11}\Delta_{211} + C_{12}\Delta_{212} + \cdots + C_{18}\Delta_{218} = \sum_{k=1}^{8} C_{1k}\Delta_{21k}; \qquad (33)$$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} y_{21}(x_+0,s) & \sum\limits_{k=1}^{8} C_{1k}y_{1k}(x_1-0,s) & y_{23}(x_1+0,s) & \ldots & y_{28}(x_1+0,s) \\ \dfrac{y'_{21}(x_1+0,s)}{bs} & \sum\limits_{k=1}^{8} C_{1k}\dfrac{y'_{1k}(x_1-0,s)}{as} & \dfrac{y'_{23}(x_1+0,s)}{bs} & \ldots & \dfrac{y'_{28}(x_1+0,s)}{bs} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{y_{21}^{(7)}(x_1+0,s)}{(bs)^7} & \sum\limits_{k=1}^{8} C_{1k}\dfrac{y_{1k}^{(7)}(x_1-0,s)}{(as)^7} & \dfrac{y_{23}^{(7)}(x_1+0,s)}{(bs)^7} & \ldots & \dfrac{y_{28}^{(7)}(x_1+0,s)}{(bs)^7} \end{vmatrix} =$$

$$= C_{11}\Delta_{221} + C_{12}\Delta_{222} + \cdots + C_{18}\Delta_{228} = \sum_{k=1}^{8} C_{1k}\Delta_{22k}; \ldots;$$

$$\Delta_{2m} = C_{11}\Delta_{2m1} + C_{12}\Delta_{2m2} + \dots + C_{18}\Delta_{2m8} = \sum_{k=1}^{8} C_{1k}\Delta_{2mk}, \quad m = 1, 2, \dots, 8; \qquad (34)$$

$$\Delta_{21k} = \left.\begin{vmatrix} y_{1k} & y_{22} & \dots & y_{28} \\ \dfrac{y'_{1k}}{as} & \dfrac{y'_{22}}{bs} & \dots & \dfrac{y'_{28}}{bs} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{y^{(7)}_{1k}}{(as)^7} & \dfrac{y^{(7)}_{22}}{(bs)^7} & \dots & \dfrac{y^{(7)}_{28}}{(bs)^7} \end{vmatrix}\right|_{x_1 \pm 0};$$

$$\Delta_{22k} = \left.\begin{vmatrix} y_{21} & y_{1k} & y_{23} & \dots & y_{28} \\ \dfrac{y'_{21}}{bs} & \dfrac{y'_{1k}}{as} & \dfrac{y'_{23}}{bs} & \dots & \dfrac{y'_{28}}{bs} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{y^{(7)}_{21}}{(bs)^7} & \dfrac{y^{(7)}_{1k}}{(as)^7} & \dfrac{y^{(7)}_{23}}{(bs)^7} & \dots & \dfrac{y^{(7)}_{28}}{(bs)^7} \end{vmatrix}\right|_{x_1 \pm 0}; \dots; \quad k = 1, 2, \dots, 8. \qquad (35)$$

Применяя формулы (11)–(18), вычисляя определитель Δ_{211} из (33)–(35) аналогично определителю $\Delta_{02,2}(x, s)$ из (23)–(29), получаем

$$\Delta_{211} = e^{a\omega_1 s x_1} e^{b(\omega_2 + \omega_3 + \dots + \omega_8) s x_1} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 \cdot \left[1 + \dfrac{\omega_1 A_7(x_1)}{s^7} + \dfrac{A_8^0(x_1)}{s^8} + \dots\right] & \dots & 1 \cdot \left[1 + \dfrac{0}{s^7} + \dfrac{B_8^0(x_1)}{s^8} + \dots\right] \\ \omega_1\left[1 + \dfrac{\omega_1 A_7(x_1)}{s^7} + \dfrac{A_8^1(x_1)}{s^8} + \dots\right] & \dots & \omega_8\left[1 + \dfrac{0}{s^7} + \dfrac{B_8^1(x_1)}{s^8} + \dots\right] \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^7\left[1 + \dfrac{\omega_1 A_7(x_1)}{s^7} + \dfrac{A_8^7(x_1)}{s^8} + \dots\right] & \dots & \omega_8^7\left[1 + \dfrac{0}{s^7} + \dfrac{B_8^7(x_1)}{s^8} + \dots\right] \end{vmatrix} \overset{(7),(24)}{=}$$

$$\overset{(7),(24)}{=} e^{(a\omega_1 - b\omega_1) s x_1}\left[\Delta_{00} + \frac{\omega_1 A_7(x_1)\Delta_{00}}{s^7} + \frac{\Delta_{211,8}}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right], \qquad (36)$$

$$\Delta_{211,8} \overset{(24),(25)}{=} [A_8^0(x_1)\delta_{11} - \omega_1 A_8^1(x_1)\delta_{21} + \omega_1^2 A_8^2(x_1)\delta_{31} - \dots - \omega_1^7 A_8^7(x_1)\delta_{81}] +$$
$$+ [-B_8^0(x_1)\delta_{12} + \omega_2 B_8^1(x_1)\delta_{22} - \omega_2^2 B_8^2(x_1)\delta_{32} + \dots + \omega_2^7 B_8^7(x_1)\delta_{82}] + \dots +$$
$$+ [-B_8^0(x_1)\delta_{18} + \omega_8 B_8^1(x_1)\delta_{28} - \omega_8^2 B_8^2(x_1)\delta_{38} + \dots + \omega_8^7 B_8^7(x_1)\delta_{88}] \overset{(25)}{=}$$
$$\overset{(25)}{=} \frac{\Delta_{00}}{8}\sum_{k=0}^{7} A_8^k(x_1) + \frac{\Delta_{00}}{8}\sum_{k=0}^{7} B_8^k(x_1) + \dots +$$
$$+ \frac{\Delta_{00}}{8}\sum_{k=0}^{7} B_8^k(x_1) \overset{(19),(20)}{=} \frac{\Delta_{00}}{8}(D_8 + 7E_8). \qquad (37)$$

Таким образом, имеем

$$\Delta_{211} = \Delta_{00} e^{(a\omega_1 - b\omega_1) s x_1}\left[1 + \frac{\omega_1 A_7(x_1)}{s^7} + \frac{D_8 + 7E_8}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right]; \qquad (38)$$

для нахождения определителя Δ_{212} из (33)–(35) вычтем из первого столбца второй и разложим по первому столбцу

$$\Delta_{212} = e^{a\omega_2 s x_1} e^{b\omega_2 s x_1} (\dots) e^{b\omega_8 s x_1} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1\cdot\Big[0+\dfrac{\omega_2 A_7(x_1)}{s^7}+\dfrac{A_8^0(x_1)-B_8^0(x_1)}{s^8}+\dots\Big] & \dots & 1\cdot\Big[1+\dfrac{B_8^0(x_1)}{s^8}+\dots\Big] \\ \omega_2\Big[1+\dfrac{\omega_2 A_7(x_1)}{s^7}+\dfrac{A_8^1(x_1)-B_8^1(x_1)}{s^8}+\dots\Big] & \dots & \omega_8\Big[1+\dfrac{B_8^1(x_1)}{s^8}+\dots\Big] \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \omega_1^7\Big[0+\dfrac{\omega_2 A_7(x_1)}{s^7}+\dfrac{A_8^7(x_1)-B_8^7(x_1)}{s^8}+\dots\Big] & \dots & \omega_8^7\Big[1+\dfrac{B_8^7(x_1)}{s^8}+\dots\Big] \end{vmatrix} \overset{(7),(24)}{=}$$

$$\overset{(7),(24)}{=} e^{(a\omega_2 - b\omega_2)s x_1}\Big[0+\frac{\omega_2 A_7(x_1)\cdot 0}{s^7}+\frac{\Delta_{212,8}}{s^8}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^9}\Big)\Big], \tag{39}$$

$$\Delta_{212,8} = (A_8^0(x_1)-B_8^0(x_1))\delta_{11} - \omega_2(A_8^1(x_1)-B_8^1(x_1))\delta_{21} + \omega_2^2(A_8^2(x_1)-B_8^2(x_1))\delta_{31} - \dots -$$

$$-\omega_2^7(A_8^7(x_1)-B_8^7(x_1))\delta_{81} \overset{(25)}{=} \frac{\Delta_{00}}{8}\sum_{k=0}^{7} A_8^k(x_1)\Big(\frac{\omega_2}{\omega_1}\Big)^k - \frac{\Delta_{00}}{8}\sum_{k=0}^{7} B_8^k(x_1)\Big(\frac{\omega_2}{\omega_1}\Big)^k \overset{(17),(18)}{=}$$

$$\overset{(17),(18)}{=} \frac{\Delta_{00}}{8}\frac{1}{16a^8}\Big[(-7)q_1(0)\sum_{m=0}^{7}\omega_2^m + q_1(x_1)\sum_{m=0}^{7}(7-2m)\Big(\frac{\omega_2}{\omega_1}\Big)^m\Big] -$$

$$-\frac{\Delta_{00}}{8}\frac{1}{16b^8}\Big[(-7)q_2(x_1)\sum_{m=0}^{7}\omega_2^m + q_2(x_1)\sum_{m=0}^{7}(7-2m)\Big(\frac{\omega_2}{\omega_1}\Big)^m\Big] =$$

$$= -\frac{\Delta_{00}H_2}{16}\Delta\widetilde{q}(x_1), \quad H_2 = 1+(1+\sqrt{2})i, \tag{40}$$

так как $\sum_{m=0}^{7}\omega_2^m \overset{(8)}{=} 0$, где введено обозначение $\Delta\widetilde{q}(x_1) = \frac{q_2(x_1+0)}{b^8} - \frac{q_1(x_1-0)}{a^8}$ — так называемый «обобщенный скачок» потенциала $q(x)$ в точке разрыва x_1.

Аналогично определителю Δ_{212} из (39), (40) вычисляются определители Δ_{21k} ($k = 3, 4, \dots, 8$) из (33)–(35): из первого столбца определителя вычитаем k-й столбец, получившийся определитель раскладываем по первому столбцу, в результате получаем:

$$\Delta_{21k} = e^{(a\omega_k - b\omega_1)s x_1}\Big[0+\frac{\omega_k A_7(x_1)\cdot 0}{s^7}+\frac{\Delta_{21k,8}}{s^8}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^9}\Big)\Big], \quad k = 2,3,\dots,8, \tag{41}$$

$$\Delta_{21k,8} = \frac{\Delta_{00}}{8}\sum_{m=0}^{7} A_8^m(x_1)\Big(\frac{\omega_k}{\omega_1}\Big)^m - \frac{\Delta_{00}}{8}\sum_{m=0}^{7} B_8^m(x_1)\Big(\frac{\omega_k}{\omega_1}\Big)^m = -\frac{\Delta_{00}H_k}{16}\Delta\widetilde{q}(x_1),$$

$$k = 2,3,\dots,8; \quad H_k = \frac{\Delta_{00}}{8}\sum_{m=0}^{7}\frac{7-2m}{8}\Big(\frac{\omega_k}{\omega_1}\Big)^m; \tag{42}$$

$$H_2 = 1+(1+\sqrt{2})i; \quad H_3 = 1+i; \quad H_4 = 1-(1-\sqrt{2}i); \quad H_5 = 1;$$

$$H_6 = 1+(1-\sqrt{2})i = \bar{H}_4; \quad H_7 = 1-i = \bar{H}_3; \quad H_8 = 1-(1+\sqrt{2})i = \bar{H}_2;$$

$$H_{10-k} = \bar{H}_k, \quad k = 2,3,\dots,8. \tag{43}$$

Аналогично формулам (36)–(43) изучаются определители Δ_{2mk} $(m, k = 1, 2, \ldots, 8)$ из (33)–(35), в результате чего приходим к выводу, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Матрица определителей* Δ_{2mk} $(m, k = 1, 2, \ldots, 8)$ *из* (32)–(35), *возникающая при изучении условий «сопряжения»* (3), *обладает следующими свойствами:*

$$\Delta_{2kk} = \Delta_{00} e^{(a\omega_k - b\omega_1)sx_1}\left[1 + \frac{\omega_k A_7(x_1)}{s^7} + \frac{D_8 + 7E_8}{8s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right], \quad k = 1, 2, \ldots, 8; \tag{44}$$

$$\Delta_{21m} = \Delta_{00} e^{(a\omega_m - b\omega_1)sx_1}\left[0 + \frac{0}{s^7} - \frac{\widetilde{H}_m}{16s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right], \quad m = 2, 3, \ldots, 8; \tag{45}$$

$$\Delta_{221} = \Delta_{00} e^{(a\omega_1 - b\omega_2)sx_1}\left[0 + \frac{0}{s^7} - \frac{\widetilde{H}_8}{16s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right];$$

$$\Delta_{22m} = \Delta_{00} e^{(a\omega_m - b\omega_2)sx_1}\left[0 + \frac{0}{s^7} - \frac{\widetilde{H}_{m-1}}{16s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right], \quad m = 3, 4, \ldots, 8; \tag{46}$$

$$\Delta_{2km} = \Delta_{00} e^{(a\omega_m - b\omega_2)sx_1}\left[0 + \frac{0}{s^7} - \frac{\widetilde{H}_{m+1-k}}{16s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right], \quad k \neq m, \quad k, m = 1, 2, \ldots, 8;$$

$$\widetilde{H}_{n\pm 8} = \widetilde{H}_n, \quad n = 1, 2, \ldots, 8; \quad \widetilde{H}_n = H_n \Delta\widetilde{q}(x_1), \tag{47}$$

величины H_n $(n = 2, 3, \ldots, 8)$ *определены формулой* (43),

$$\Delta\widetilde{q}(x_1) = \frac{q_2(x_1 + 0)}{b^8} - \frac{q_1(x_1 - 0)}{a^8}.$$

5. Изучение граничных условий (4)

Из первых семи граничных условий (4), применяя формулы (9)–(12) и (21), получаем

$$\frac{y_1^{(m_p)}(0, s)}{(as)^{m_p}} \overset{(4)}{=} 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{8} C_{1k} \frac{y_{1k}^{(m_p)}(0, s)}{(as)^{m_p}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{8} C_{1k}\omega_k^{m_p}\left[1 + \frac{0}{s^7} + \frac{A_8^{m_p}(0)}{s^8}\underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right] = 0, \tag{48}$$

$$p = 1, 2, \ldots, 7.$$

Из последнего из граничных условий (4) с помощью формул (10)–(14) и (32)–(34) имеем

$$\frac{y_2^{(n_1)}(\pi, s)}{(bs)^{n_1}} \overset{(4)}{=} 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{8} C_{2k} \frac{y_{2k}^{(n_1)}(\pi, s)}{(bs)^{n_1}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{8}\left(\sum_{n=1}^{8} C_{1n}\Delta_{2kn}\right)\frac{y_{2k}^{(n_1)}(\pi, s)}{(bs)^{n_1}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{8} C_{1k}\phi_{1k}^{n_1}(\pi, s) = 0,$$

$$\phi_{1k}^{n_1}(\pi, s) = \sum_{n=1}^{8} \Delta_{2nk}\frac{y_{2k}^{(n_1)}(\pi, s)}{(bs)^{n_1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, 8. \tag{49}$$

Однородная система (48), (49) из восьми линейных уравнений с восемью неизвестными $C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{18}$ имеет ненулевые решения только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора* (1)–(5) *имеет следующий вид:*

$$f(s) = \prod_{k=1}^{7} \left(\left[1 + \frac{0}{s^7} + \frac{A_8^{m_k}(0)}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right) \right] \right) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} b_{11} = \omega_1^{m_1} & b_{12} = \omega_2^{m_1} & \ldots & b_{17} = \omega_7^{m_1} & b_{18} = \omega_8^{m_1} \\ b_{21} = \omega_1^{m_2} & b_{22} = \omega_2^{m_2} & \ldots & b_{27} = \omega_7^{m_2} & b_{28} = \omega_8^{m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{71} = \omega_1^{m_7} & b_{72} = \omega_2^{m_7} & \ldots & b_{77} = \omega_7^{m_7} & b_{78} = \omega_8^{m_7} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{81} = \phi_{11}^{n_1}(\pi, s) & b_{82} = \phi_{12}^{n_1}(\pi, s) & \ldots & b_{87} = \phi_{17}^{n_1}(\pi, s) & b_{88} = \phi_{18}^{n_1}(\pi, s) \end{vmatrix} = 0. \qquad (50)$$

Раскладывая определитель $f(s)$ из (50) по последней строчке, получаем:

$$f(s) = \phi_{11}^{n_1}(\pi, s)\psi_{81} - \phi_{12}^{n_1}(\pi, s)\psi_{82} + \phi_{13}^{n_1}(\pi, s)\psi_{83} - \cdots + \\ + \phi_{17}^{n_1}(\pi, s)\psi_{87} - \phi_{18}^{n_1}(\pi, s)\psi_{88} = 0, \qquad (51)$$

$$\psi_{88} = \begin{vmatrix} \omega_1^{m_1} & \omega_2^{m_1} & \ldots & \omega_7^{m_1} \\ \omega_1^{m_2} & \omega_2^{m_2} & \ldots & \omega_7^{m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^{m_7} & \omega_2^{m_7} & \ldots & \omega_7^{m_7} \end{vmatrix} \stackrel{(6)}{=} \begin{vmatrix} 1^{m_1} & z^{m_1} & \ldots & z^{6m_1} \\ 1^{m_2} & z^{m_2} & \ldots & z^{6m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1^{m_7} & z^{m_7} & \ldots & z^{6m_7} \end{vmatrix} =$$

$$= \det \text{Wandermound's}(z^{\omega_1}, z^{\omega_2}, \ldots, z^{\omega_7}) = \prod_{\substack{k>n \\ k,n=1,2,\ldots,7}} (z^{m_k} - z^{m_n}) \neq 0. \qquad (52)$$

$$\psi_{81} = \begin{vmatrix} \omega_2^{m_1} & \omega_3^{m_1} & \ldots & \omega_8^{m_1} \\ \omega_2^{m_2} & \omega_3^{m_2} & \ldots & \omega_8^{m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_2^{m_7} & \omega_3^{m_7} & \ldots & \omega_8^{m_7} \end{vmatrix} \stackrel{(6)}{=} \begin{vmatrix} z^{m_1} & z^{2m_1} & \ldots & z^{7m_1} \\ z^{m_2} & z^{2m_2} & \ldots & z^{7m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z^{m_7} & z^{2m_7} & \ldots & z^{7m_7} \end{vmatrix} = z^{M_7}\psi_{88}, \quad M_7 = \sum_{k=1}^{7} m_7; \qquad (53)$$

$$\psi_{82} = z^{2M_7}\psi_{88}; \quad \psi_{83} = z^{3M_7}\psi_{88}; \ldots; \psi_{8k} = z^{kM_7}\psi_{88}, \quad k = 1, 2, \ldots, 8. \qquad (54)$$

Подставим формулы (52)–(54) в (51), поделим на $z^{M_7}\psi_{88} \neq 0$, получим

$$f(s) = \phi_{11}^{n_1}(\pi, s) - \phi_{12}^{n_1}(\pi, s)z^{M_7} + \phi_{13}^{n_1}(\pi, s)z^{2M_7} - \cdots - \phi_{18}^{n_1}(\pi, s)z^{7M_7} = 0, \qquad (55)$$

где функции $\phi_{1k}^{n_1}(\pi, s)$ $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ определены формулами (49), (44)–(47), (13)–(18).

Для нахождения корней уравнения (55) необходимо изучить индикаторную диаграмму этого уравнения, то есть выпуклую оболочку показателей экспонент, входящих в это уравнение (см. [1, гл. 12]). Индикаторная диаграмма уравнения (55) представлена на рисунке 1.

Из общей теории нахождения корней квазимногочленов вида (55) (см. [1, гл. 12]) следует, что для нахождения корней уравнения (55) в секторе 1) в этом уравнении необходимо оставить экспоненты с показателями $M\bar{\omega}_8 = M\omega_2$ и $M\bar{\omega}_1 = M\omega_1$ (остальные экспоненты — бесконечно малые величины, их можно отбросить), в секторе 2) необходимо оставить экспоненты с показателями $M\bar{\omega}_8 = M\omega_2$ и $M\bar{\omega}_7 = M\omega_3$, в секторе 3) — экспоненты с показателями $M\bar{\omega}_7 = M\omega_3$ и $M\bar{\omega}_6 = M\omega_4$ и т. д.

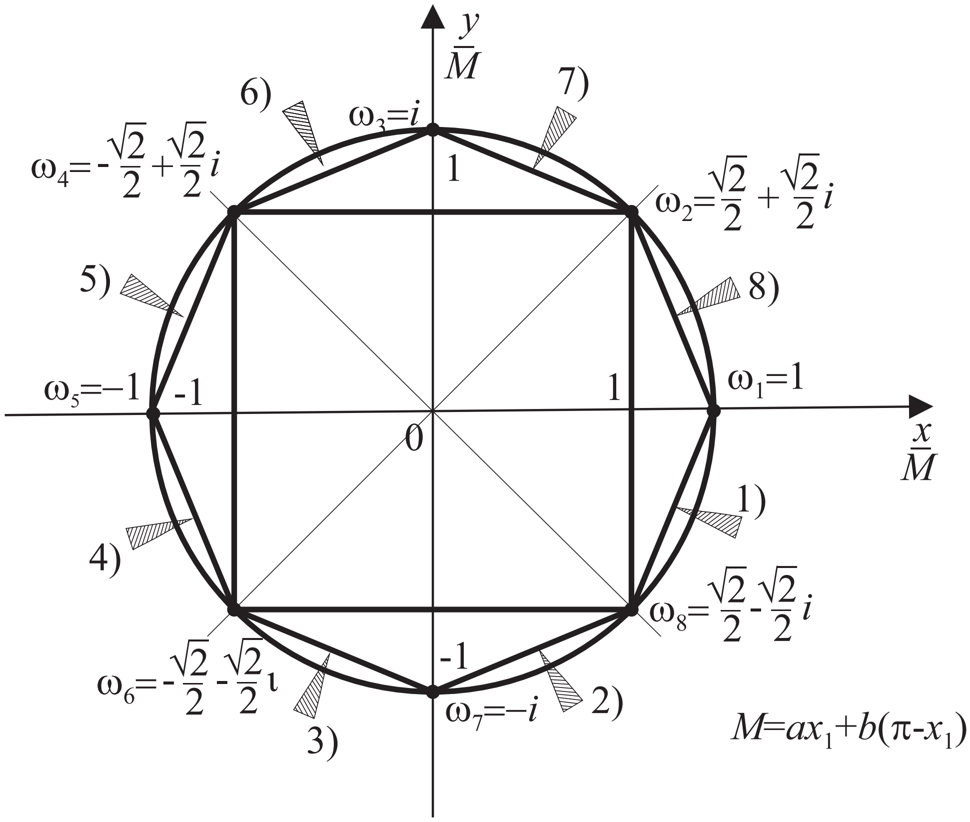

Рис. 1. Индикаторная диаграмма уравнения (55)

6. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)–(5) в секторе 1) индикаторной диаграммы (рис. 1)

Из вышесказанного следует, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора* (1)–(5) *в секторе* 1) *индикаторной диаграммы* (56) *имеет следующий вид:*

$$h_1(s) = \phi_{11}^{n_1}(\pi, s) - \phi_{12}^{n_1}(\pi, s) z^{M_7} = 0. \tag{56}$$

Подставляя в уравнение (56) формулы (49), (13)–(18), (44)–(47), приведем его к следующему виду:

$$h_1(s) = \left\{ \omega_1^{n_1} e^{M\omega_1 s} \left[1 + \frac{\omega_1 \psi_7}{s^7} + \frac{\psi_8^{n_1}}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right) \right] + \right.$$
$$\left. + e^{(a\omega_1 - b\omega_2)sx_1} \omega_2^{n_1} e^{b\omega_2 s\pi} \frac{(-H_8)\Delta\widetilde{q}(x_1)}{16 s^8} \right\} - z^{M_7} \left\{ \omega_2^{n_1} e^{M\omega_2 s} \left[1 + \frac{\omega_2 \psi_7}{s^7} + \frac{\psi_8^{n_1}}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right) \right] + \right.$$
$$\left. + e^{(a\omega_2 - b\omega_1)sx_1} \omega_1^{n_1} e^{b\omega_1 s\pi} \frac{(-H_2)\Delta\widetilde{q}(x_1)}{16 s^8} \right\} = 0;$$

$$\psi_7 = A_7(x_1) + B_7(\pi);\ \psi_8^{n_1} = \frac{D_8 + 7E_8}{8} + B_8^{n_1}(\pi);\ H_2 = 1(1+\sqrt{2})i;\ H_8 = \bar{H}_2. \tag{57}$$

Поделив в уравнении (57) на $\omega_1^{n_1} e^{M\omega_2 s} \neq 0$, перепишем его в более удобном виде:

$$h_1(s) = e^{M(\omega_1-\omega_2)s}\left[1 + \frac{\omega_1\psi_7}{s^7} + \frac{\psi_8^{n_1}}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right] -$$
$$- z^{M_7}\frac{\omega_2^{n_1}}{\omega_1^{n_1}}\left[1 + \frac{\omega_2\psi_7}{s^7} + \frac{\psi_8^{n_1}}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right] +$$
$$+ \frac{\Delta\widetilde{q}(x_1)}{16s^8}\left[\frac{\omega_2^{n_1}}{\omega_1^{n_1}} e^{(a\omega_1-b\omega_2)sx_1} e^{b\omega_2 s\pi} e^{-H\omega_2 s}(-H_8) -\right.$$
$$\left.- z^{M_7} e^{(a\omega_2-b\omega_1)sx_1} e^{b\omega_1 s\pi} e^{-M\omega_2 s}(-H_2)\right] + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right) = 0. \tag{58}$$

Основное приближение уравнения (58) имеет вид $(\omega_1 = 1, \omega_2 = z = e^{\frac{2\pi i}{8}})$

$$e^{M(\omega_1-\omega_4)s} = z^{M_7}\frac{\omega_2^{n_1}}{\omega_1^{n_1}} = e^{\frac{2\pi i M_7}{8}} e^{\frac{2\pi i n_1}{8}} e^{2\pi i k} \Leftrightarrow s_{k,1,\text{осн}} = \frac{2\pi i\widetilde{k}}{M(\omega_1-\omega_2)}, \tag{59}$$
$$\widetilde{k} = k + \frac{M_7+n_1}{8}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Теорема 5. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора* (1)–(5) *в секторе* 1) *имеет следующий вид:*

$$s_{k,1} = \frac{2\pi i}{M(\omega_1-\omega_2)}\left[\widetilde{k} + \frac{d_{7k,1}}{\widetilde{k}^7} + \frac{d_{8k,1}}{\widetilde{k}^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^9}\right)\right], \quad \widetilde{k} = k + \frac{M_7+n_1}{8}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{60}$$

Доказательство. Применяя формулы Тейлора, имеем

$$e^{M(\omega_1-\omega_2)s}\big|_{s_{k,1}} \overset{(60)}{=} \exp\left[M(\omega_1-\omega_2)s\frac{2\pi i}{M(\omega_1-\omega_2)s}\left(\widetilde{k} + \frac{d_{7k,1}}{\widetilde{k}^7} + \ldots\right)\right] =$$
$$= z^{M_7} z^{n_1}\left[1 + \frac{2\pi i d_{7k,1}}{\widetilde{k}^7} + \frac{2\pi i d_{8k,1}}{\widetilde{k}^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^9}\right)\right], \tag{61}$$

$$\frac{1}{s^7}\bigg|_{s_{k,1}} = \frac{M^7(\omega_1-\omega_2)^7}{(2\pi i)^7\widetilde{k}^7}\left(1 - \frac{d_{7k,1}}{\widetilde{k}^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^8}\right)\right). \tag{62}$$

Подставляя формулы (60)–(62) в уравнение (58), учитывая формулу (59), получаем

$$z^{M_7} z^{n_1}\left[1 + \frac{2\pi i d_{7k,1}}{\widetilde{k}^7} + \frac{2\pi i d_{8k,1}}{\widetilde{k}^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^9}\right)\right] \times$$
$$\times \left[1 + \frac{\omega_1\psi_7 M^7(\omega_1-\omega_2)^7}{2^7\pi^7 i^7\widetilde{k}^7}\left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^8}\right)\right) + \frac{\psi_8^{n_1} M^8(\omega_1-\omega_2)^8}{2^8\pi^8 i^8\widetilde{k}^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^9}\right)\right] -$$
$$-z^{M_7} z^{n_1}\left[1 + \frac{\omega_2\psi_7 M^7(\omega_1-\omega_2)^7}{2^7\pi^7 i^7\widetilde{k}^7} + \frac{\psi_8^{n_1} M^8(\omega_1-\omega_2)^8}{2^8\pi^8 i^8\widetilde{k}^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^9}\right)\right] -$$
$$- \frac{M^8(\omega_1-\omega_2)^8\Delta\widetilde{q}(x_1) z^{M_7} z^{n_1}}{16\cdot 2^8\pi^8 i^8\widetilde{k}^8}\left[\frac{1}{z^{M_7} z^{N_1}} z^{N_1} H_8 e^{(a\omega_1-b\omega_2)sx_1} e^{b\omega_2 s\pi} e^{-M\omega_2 s}\big|_{s_{k,1,\text{осн}}} -\right.$$
$$\left.- \frac{z^{M_7}}{z^{M_7} z^{n_1}} H_2 e^{(a\omega_2-b\omega_1)sx_1} e^{b\omega_1 s\pi} e^{-M\omega_2 s}\big|_{s_{k,1,\text{осн}}}\right] + \underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^9}\right) = 0. \tag{63}$$

Поделив на $z^{M_7}z^{n_1}\neq 0$, приравняем в (63) коэффициенты при одинаковых степенях $\widetilde{k}$. При $\widetilde{k}^0$ имеем: $1-1=0$ — верно, что символизирует о правильности выбора асимптотической формулы (60). Приравняв в (63) коэффициенты при $\widetilde{k}^{-7}$, находим

$$d_{7k,1}=-\frac{M^7(\omega_1-\omega_2)^8\psi_7}{2^8\pi^8}\overset{(57)}{=}-\frac{M^7(\omega_1-\omega_2)^8}{2^8\pi^8}[A_7(x_1)+B_7(\pi)]\overset{(15),(16)}{=}$$
$$\overset{(15),(16)}{=}-\frac{M^7\sin^8(\frac{\pi}{8})}{8\pi^8}\left[\frac{1}{a^7}\int_0^{x_1}q_1(t)dt+\frac{1}{b^7}\int_{x_1}^{\pi}q_2(t)dt\right],\qquad(64)$$
$$k\in\mathbb{N},\quad M=ax_1+b(\pi-x_1).$$

Приравняв в (63) коэффициенты при $\widetilde{k}^{-8}$, выводим

$$d_{8k,1}=\frac{M^8(\omega_1-\omega_2)^8}{(-2\pi i)2^8\pi^8 i^8}+\frac{M^8\sin^8(\frac{\pi}{8})\Delta\widetilde{q}(x_1)}{(-2\pi i)16\pi^8}[H_8z^{-M_7}e^{a(\omega_1-\omega_2)sx_1}\big|_{s_{k,1,\text{осн}}}-$$
$$-\bar{H}_8z^{-n_1}e^{b(\pi-x_1)(\omega_1-\omega_2)s}\big|_{s_{k,1,\text{осн}}}],\quad k\in\mathbb{N}.\qquad(65)$$

Из формулы (57) имеем

$$H_8=1-(1+\sqrt{2})i=\sqrt{4+2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}-\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}i\right]=\sqrt{4+2\sqrt{2}}e^{-i\varphi_1},$$
$$\varphi_1=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\right)=\arcsin\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\right).\qquad(66)$$

Подставляя формулу (66) в (65) и сделав необходимые преобразования, находим

$$d_{8k,1}=\frac{(-1)^{k+1}\sqrt{4+2\sqrt{2}}M^8\sin^8(\frac{\pi}{8})\Delta\widetilde{q}(x_1)}{16\pi^9}\times$$
$$\times\sin\left[\frac{\pi a x_1\widetilde{k}}{M}-\frac{\pi b(\pi-x_1)\widetilde{k}}{M}+\frac{\pi n_1}{8}-\frac{\pi M_7}{8}-\varphi_1\right],\quad k\in\mathbb{N},\qquad(67)$$

значение угла φ_1 приведено в (66), $M=ax_1+b(\pi-x_1)$, $M_7=\sum_{k=1}^{7}m_k$, значение $\Delta\widetilde{q}(x_1)$ определено в (47).

Формулы (64), (67) показывают, что все коэффициенты асимптотической формулы (60) находятся единственным образом, мы привели явные формулы для их вычисления, поэтому теорема 5 полностью доказана.

7. Вычисление первого регуляризованного следа дифференциального оператора (1)–(5)

Рассматривая аналогичным образом сектора 2), 3)…8) индикаторной диаграммы (рис. 1), докажем следующую теорему.

Теорема 6. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора* (1)–(5) *в секторах* 2), 3)…8) *подчиняется следующему закону:*

1)

$$s_{k,2}=s_{k,1}e^{-\frac{2\pi i}{8}};\quad s_{k,3}=s_{k,2}e^{-\frac{2\pi i}{8}}=s_{k,1}e^{-\frac{4\pi i}{8}};\ldots;$$

$$s_{k,m} = s_{k,m-1}e^{-\frac{2\pi i}{8}} = s_{k,1}e^{-\frac{2\pi i(m-1)}{8}}, \quad m = 1, 2, \ldots, 8; \quad k \in \mathbb{N}. \tag{68}$$

2) При этом

$$\lambda_{k,1} = s_{k,1}^8; \quad \lambda_{k,2} = s_{k,2}^8 = \lambda_{k,1}; \ldots; \lambda_{k,m} = s_{k,m}^8 = \lambda_{k,1}, \quad m = 1, 2, \ldots, 8; \quad k \in \mathbb{N}. \tag{69}$$

Из формул (60), (68), (69) имеем

$$s_{k,1}^8 = \lambda_{k,1} = s_{k,m}^8 = \lambda_{k,m} = -\frac{\pi^8}{M^8 \sin^8(\frac{\pi}{8})}\left[\widetilde{k} + 8d_{7k,1} + \frac{8d_{8k,1}}{\widetilde{k}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^2}\right)\right],$$

поэтому ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[s_{k,1}^8 + \frac{\pi^8\widetilde{k}^8}{M^8 \sin^8(\frac{\pi}{8})} + \frac{8\pi^8 d_{7k,1}}{M^8 \sin^8(\frac{\pi}{8})} + \frac{8\pi^8 d_{8k,1}}{M^8 \sin^8(\frac{\pi}{8})\widetilde{k}}\right] = \underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^2}\right),$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[s_{k,m}^8 + \frac{\pi^8\widetilde{k}^8}{M^8 \sin^8(\frac{\pi}{8})} + \frac{8\pi^8 d_{7k,m}}{M^8 \sin^8(\frac{\pi}{8})} + \frac{8\pi^8 d_{8k,m}}{M^8 \sin^8(\frac{\pi}{8})\widetilde{k}}\right] = \underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^2}\right) -$$

сходятся ($m = 1, 2, \ldots, 8$; $d_{7k,m} = d_{7k,1}$; $d_{8k,m} = d_{8k,1}$), и наша цель — найти их сумму, то есть вычислить первый регуляризованный след оператора (1)–(5). Действуя аналогично монографии [14, гл. 5], приходим к выводу о справедливости следующего утверждения.

Теорема 7. *Формула первого регуляризованного следа оператора* (1)–(5) *имеет следующий вид:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[s_{k,1}^8 + \frac{\pi^8\widetilde{k}^8}{M^8 \sin^8(\frac{\pi}{8})} + \frac{8\pi^8 d_{7k,1}}{M^8 \sin^8(\frac{\pi}{8})} + \frac{8\pi^8 d_{8k,1}}{M^8 \sin^8(\frac{\pi}{8})\widetilde{k}}\right] = \omega_{9,1}^{(1)} - \phi_{9,1}^{(1)}(-8), \tag{70}$$
$$M = ax_1 + b(\pi - x_1), \quad \widetilde{k} = k + \frac{M_7 + n_1}{8},$$

где $\phi_{9,1}^{(1)}(-8)$ *— аналитическое продолжение в точку* $\delta = -8$ *функции* $\phi_{9,1}^{(1)}(\delta) = \sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{n=0}^{\tau} \frac{Q_k(\delta)}{k^{n+\delta}})$; $\omega_{9,1}^{(1)}$ *— коэффициенты при* s^{-9} *разложения в ряд Тейлора функции* $\frac{\widetilde{h}_1'(s)}{\widetilde{h}_1(s)}$, *где* $\widetilde{h}_1(s) = \frac{h_1(s)g_1(s)}{\Delta_{02,2}(s)\neq 0}$ *и* $h_1(s)$ *— функция из* (58); $\Delta_{02,2}(s)$ *— определитель Вронского из* (29); $g_1(s) = \prod_{k=1}^{7}([1 + \frac{0}{s^7} + \frac{A_8^{m_k}(0)}{s^8} + \underline{O}(\frac{1}{s^9})]$ *из* (50); $g_1(s) = 1 + \frac{G_{18}}{s^8} + \underline{O}(\frac{1}{s^9})$; $G_{18} = \sum_{k=1}^{7} A_8^{m_k}(0)$.

Так как $\widetilde{k}^8 = (k + k_0)^8$, $k_0 = \frac{M_7+n_1}{8}$, $\widetilde{k}^8 = \sum_{n=0}^{8} C_8^n k^{8-n} k_0^n$, то из определения функции $\phi_{9,1}^{(1)}(\delta)$ имеем

$$\phi_{9,1}^{(1)}(-8) = \frac{\pi^8}{M^8 \sin^8(\frac{\pi}{8})}\sum_{n=0}^{8} C_8^n k^{8-n} k_0^n \zeta(8-n) + \frac{8\pi^8 d_{7k,1}}{M^8 \sin^8(\frac{\pi}{8})}\zeta(0) =$$
$$= \frac{\pi^8}{M^8 \sin^8(\frac{\pi}{8})} k_0^8 \zeta(0) + \frac{8\pi^8 d_{7k,1}}{M^8 \sin^8(\frac{\pi}{8})}\zeta(0), \tag{71}$$

поскольку $\zeta(-8)=\zeta(-7)=\dots=\zeta(-1)=0$, $\zeta(0)=-\frac{1}{2}$.

Так как $\widetilde{h}_1(s)=\frac{\widetilde{h}_1(s)g_1(s)}{\Delta_{02,2}(s)}$, то $\frac{\widetilde{h}'_1(s)}{h_1(s)}=\frac{h'_1(s)}{h_1(s)}+\frac{g'_1(s)}{g_1(s)}-\frac{\Delta'_{02,2}(s)}{\Delta_{02,2}(s)}$, поэтому

$$\omega^{(1)}_{9,1,1}=\omega^{(1)}_{9,1,1}+\omega^{(1)}_{9,1,2}-\omega^{(1)}_{9,1,3}, \tag{72}$$

где $\omega^{(1)}_{9,1,1}$, $\omega^{(1)}_{9,1,2}$, $\omega^{(1)}_{9,1,3}$ — коэффициенты при s^{-9} разложений $\frac{h'_1(s)}{h_1(s)}$, $\frac{g'_1(s)}{g_1(s)}$, $\frac{\Delta'_{02,2}(s)}{\Delta_{02,2}(s)}$ соответственно.

Так как $g_1(s)=1+\frac{G_{18}}{s^8}+\underline{O}(\frac{1}{s^9})$, то $\frac{g'_1(s)}{g_1(s)}=[-\frac{8G_{18}}{s^9}+\underline{O}(\frac{1}{s^{10}})][1-\frac{G_{18}}{s^8}+\underline{O}(\frac{1}{s^9})]$, значит, $\omega^{(1)}_{9,1,2}=-8G_{18}$, $G_{18}=\sum_{k=1}^{7}A_8^{m_k}(0)$.

Из формулы (29) получаем $\omega^{(1)}_{9,1,3}=-8E_8$.

Из формулы (58) выводим $\omega^{(1)}_{9,1,1}=-8\psi_8^{n_1}$, поэтому формула (72) принимает вид

$$\omega^{(1)}_{9,1}=(-8)[\psi_8^{n_1}+G_{18}-E_8]=(-8)\left[\frac{D_8+7E_8}{8}+B_8^{n_1}(\pi)+\sum_{k=1}^{7}A_8^{m_k}(0)-E_8\right],$$

откуда, применяя формулы (17)–(20), находим

$$\omega^{(1)}_{9,1}=\frac{M_7q_1(0)}{a^8}+\frac{n_1q_2(\pi)}{b^8}+\frac{7q_1(0)}{2a^8}-\frac{7q_2(\pi)}{2b^8}. \tag{73}$$

Подставляя формулы (71), (73) в формулу (70), приходим к справедливости следующего утверждения.

Теорема 8. *Первый регуляризованный след дифференциального оператора* (1)–(5) *вычисляется по следующей формуле:*

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{8}\left[\lambda_{k,1}+\frac{\pi^8\widetilde{k}^8}{M^8\sin^8(\frac{\pi}{8})}+\frac{8\pi^8 d_{7k,1}}{M^8\sin^8(\frac{\pi}{8})}\right]=\\ =\frac{M_7q_1(0)}{a^8}+\frac{n_1q_2(\pi)}{b^8}+\frac{7q_1(0)}{2a^8}-\frac{7q_2(\pi)}{2b^8}-\frac{\pi^8\zeta(0)}{M^8\sin^8(\frac{\pi}{8})}[k_0^8+8d_{7k,1}]-\\ -\frac{8\pi^8}{M^8\sin^8(\frac{\pi}{8})}\sqrt{4+2\sqrt{2}}M^8\sin^8\left(\frac{\pi}{8}\right)\Delta\widetilde{q}(x_1)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin(T_1\widetilde{k}+T_2)}{\widetilde{k}},\\ T_1=\frac{\pi a x_1-\pi b(\pi-x_1)}{M},\quad T_2=\frac{\pi(n_1-M_7)}{8},\\ M=ax_1+b(\pi-x_1),\quad \widetilde{k}=k+\frac{M_7+n_1}{8},\quad M_7=\sum_{k=1}^{7}m_k,\end{gathered} \tag{74}$$

ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin(T_1\widetilde{k}+T_2)}{\widetilde{k}}$ *представляет собой сходящийся тригонометрический ряд Фурье.*

Для вычисления второго регуляризованного следа необходимо уточнять асимптотические формулы (11)–(18) (выписывать их с точностью $\underline{O}(\frac{1}{s^{16}})$), задача теоретически решаемая, практически, судя по всему, нет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман, Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Л. Кук. — М. : Мир, 1967. — 548 с.

2. Будак, А. Б. О разложении по собственным функциям дифференциального оператора 4-го порядка с кусочно-постоянным старшим коэффициентом / А. Б. Будак // Дифференциальные уравнения. — 1980. — Т. 16, № 9. — С. 1545–1558.

3. Гасымов, М. Г. О сумме разностей собственных значений двух самосопряженных операторов / М. Г. Гасымов // Доклады АН СССР. — 1963. — Т. 150, № 6. — С. 1202–1205.

4. Гельфанд, И. М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка / И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан // Доклады АН СССР. — 1953. — Т. 88, № 4. — С. 593–596.

5. Ильин, В. А. О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора / В. А. Ильин // Математические заметки. — 1977. — Т. 22, № 5. — С. 679–698.

6. Лидский, В. Б. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций / В. Б. Лидский, В. А. Садовничий // Функциональный анализ и его приложения. — 1967. — Т. 1, № 2. — С. 52–59.

7. Митрохин, С. И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора со знакопеременной весовой функцией / С. И. Митрохин // Известия вузов. Математика. — 2018. — № 6. — С. 31–47.

8. Митрохин, С. И. О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией / С. И. Митрохин // Доклады Академии Наук. — 1997. — Т. 356, № 1. — С. 13–15.

9. Митрохин, С. И. О спектральных свойствах дифференциальных операторов с разрывными коэффициентами / С. И. Митрохин // Дифференциальные уравнения. — 1992. — Т. 28, № 3. — С. 530–532.

10. Митрохин, С. И. О формулах регуляризованных следов для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами / С. И. Митрохин // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика. — 1986. — № 6. — С. 3–6.

11. Митрохин, С. И. О формулах следов для одной краевой задачи с функционально-дифференциальным уравнением с разрывным коэффициентом / С. И. Митрохин // Дифференциальные уравнения. — 1986. — Т. 22, № 6. — С. 927–931.

12. Наймарк, М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 528 с.

13. Садовничий, В. А. О следах обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков / В. А. Садовничий // Математический сборник. — 1967. — Т. 72 (114), № 2. — С. 293–317.

14. Садовничий, В. А. Теория операторов / В. А. Садовничий. — М. : Дрофа, 2001. — 384 с.

15. Gottlieb, H. P. W. Iso-Spectral Operators: Some Model Examples with Discontinuous Coefficients / H. P. W. Gottlieb // Journal of Math. Anal. and Appl. — 1988. — Vol. 132. — P. 123–137.

REFERENCES

1. Bellman R., Kuk K.L. *Differentsialno-raznostnye uravneniya* [Differential-Difference Equations]. Moscow, Mir Publ., 1967. 548 p.

2. Budak A.B. O razlozhenii po sobstvennym funktsiyam differentsialnogo operatora 4-go poryadka s kusochno-postoyannym starshim koeffitsientom [On the Expansion in Eigenfunctions of a Fourth-Order Differential Operator with a Piecewise Constant Leading Coefficient]. *Differentsialnye uravneniya*, 1980, vol. 16, no. 9, pp. 1545-1558.

3. Gasymov M.G. O summe raznostey sobstvennykh znacheniy dvukh samosopryazhyonnykh operatorov [On the Sum of the Differences of the Eigenvalues of Two Self-Adjoint Operators]. *Doklady AN SSSR* [Soviet Mathematics], 1963, vol. 150, no. 6, pp. 1202-1205.

4. Gelfand I.M., Levitan B.M. Ob odnom prostom tozhdestve dlya sobstvennykh znacheniy differentsialnogo operatora vtorogo poryadka [On a Simple Identity for the Eigenvalues of a Second-Order Differential Operator]. *Doklady AN SSSR* [Soviet Mathematics], 1953, vol. 88, no. 4, pp. 593-596.

5. Ilin V.A. O skhodimosti razlozheniy po sobstvennym funktsiyam v tochkakh razryva koeffitsientov differentsialnogo operatora [Convergence of Eigenfunction Expansions at Points of Discontinuity of the Coefficients of a Differential Operator]. *Matematicheskie zametki*, 1977, vol. 22, no. 5, pp. 679-698.

6. Lidskiy V.B., Sadovnichiy V.A. Regulyarizovannye summy korney odnogo klassa tselykh funktsiy [Regularized Sums of Zeros of One Class of Entire Functions]. *Funktsionalnyy analiz i ego prilozheniya*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 52-59.

7. Mitrokhin S.I. Asimptotika sobstvennykh znacheniy differentsialnogo operatora so znakoperemennoy vesovoy funktsiey [Asymptotics of the Eigenvalues of a Differential Operator with an Alternating Weight Function]. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 2018, no. 6, pp. 31-47.

8. Mitrokhin S.I. O nekotorykh spektralnykh svoystvakh differentsialnykh operatorov vtorogo poryadka s razryvnoy vesovoy funktsiey [On Some Spectral Properties of Second-Order Differential Operators with a Discontinuous Weight Function]. *Doklady Akademii Nauk* [Doklady Mathematics], 1997, vol. 356, no. 1, pp. 13-15.

9. Mitrokhin S.I. O spektralnykh svoystvakh differentsialnykh operatorov s razryvnymi koeffitsientami [On Spectral Properties of Differential Operators with Discontinuous Coefficients]. *Differentsialnye uravneniya*, 1992, vol. 28, no. 3, pp. 530-532.

10. Mitrokhin S.I. O formulakh regulyarizovannykh sledov dlya differentsialnykh operatorov vtorogo poryadka s razryvnymi koeffitsientami [On Regularized Trace Formulas for Second-Order Differential Operators with Discontinuous Coefficients]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1. Matematika, mekhanika*, 1986, no. 6, pp. 3-6.

11. Mitrokhin S.I. O formulakh sledov dlya odnoy kraevoy zadachi s funktsionalno-differentsialnym uravneniem s razryvnym koeffitsientom [On Trace Formulas for a Boundary Value Problem with a Functional Differential Equation with a Discontinuous Coefficient]. *Differentsialnye uravneniya*, 1986, vol. 22, no. 6, pp. 927-931.

12. Naymark M.A. *Lineynye differentsialnye operatory* [Linear Differential Operators]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 528 p.

13. Sadovnichiy V.A. O sledakh obyknovennykh differentsialnykh operatorov vysshikh poryadkov [The Trace Formulae of Ordinary Differential Operators of Higher Orders]. *Matematicheskiy sbornik*, 1967, vol. 72 (114), no. 2, pp. 293-317.

14. Sadovnichiy V.A. *Teoriya operatorov* [Theory of Operators]. Moscow, Drofa Publ., 2001. 384 p.

15. Gottlieb H.P.W. Iso-Spectral Operators: Some Model Examples with Discontinuous Coefficients. *Journal of Math. Anal. and Appl.*, 1988, vol. 132, pp. 123-137.

THE FORMULA OF THE FIRST REQULARIZED TRACE FOR A DIFFERENTIAL OPERATOR WITH A DISCONTINUOUS WEIGHT FUNCTION

Sergey I. Mitrokhin

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Senior Researcher, Scientific-Research Computing Center,
Lomonosov Moscow State University
mitrokhin-sergey@yandex.ru
Leninskie Gory, 1, Bld. 4, 119992 Moscow, Russian Federation

Abstract. The author study the spectral properties of an eighth-order differential operator with a piecewise-smooth potential and a discontinuous weight function. For large values of the spectral parameter, the asymptotics of solutions of differential equations defining the operator under study is studied. With the help of the obtained asymptotics, the conditions of “conjugation” at the point of discontinuity of the coefficients, the necessity of which follows from physical considerations, are studied. The separated boundary conditions that define the operator are studied. An indicator diagram of an equation whose roots are the eigenvalues of the operator is investigated. The asymptotics of the eigenvalues of the differential operator under study is found. Using the Lidskyi — Sadovnichyi method, the first regularized trace of the differential operator is calculated.

Key words: differential operator, spectral parameter, separated boundary conditions, indicator diagram, asymptotics of eigenvalues, regularized trace of the operator.