www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2022.2.1

УДК 517.956
ББК 22.161

Дата поступления статьи: 26.05.2021
Дата принятия статьи: 16.04.2022

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ СМЕШАННО ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Серик Аймурзаевич Алдашев

Доктор физико-математических наук, профессор,
Институт математики и математического моделирования
министерства образования и науки Республики Казахстан
aldash51@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-8223-6900
ул. Пушкина, 125, 050010 г. Алматы, Казахстан

Аннотация. Известно, что при математическом моделировании электромагнитных полей в пространстве характер электромагнитного процесса определяется свойствами среды. Если среда непроводящая, то получаем вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. Если же среда обладает большой проводимостью, то приходим к вырождающимся многомерным параболическим уравнениям. Следовательно, анализ электромагнитных полей в сложных средах (например, если проводимость среды меняется) сводится к вырождающимся многомерным гиперболо-параболическим уравнениям. Известно также, что колебания упругих мембран в пространстве по принципу Гамильтона можно моделировать вырождающимися многомерными гиперболическими уравнениями. Изучение процесса распространения тепла в среде, заполненной массой, приводят к вырождающимся многомерным параболическим уравнениям. Таким образом, исследуя математическое моделирование процесса распространения тепла в колеблющихся упругих мембранах, также приходим к вырождающимся многомерным гиперболо-параболическим уравнениям. При изучении этих приложений возникает необходимость получения явного представления решений исследуемых задач. Краевые задачи для гиперболо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучены, а их многомерные аналоги исследованы мало. Задача Трикоми для указанных уравнений ранее исследована. Насколько известно, эта задача в пространстве не изучена. В данной работе показано, что для одного класса многомерных смешанно гиперболо-параболических уравнений задача Трикоми разрешима неоднозначно. В работе автора доказано, что для модельного уравнения однородная задача типа Трикоми (то есть измененное граничное условие) имеет тривиальное решение.

Ключевые слова: задача Трикоми, многомерное уравнение, разрешимость, сферические функции, смешанно гиперболо-параболические уравнения.

Введение

Теория краевых задач для гиперболо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучена [12], а их многомерные аналоги исследовано мало [8]. Задача Трикоми для указанных уравнений ранее исследована в [12]. Насколько известно, эта задача в пространстве не изучена.

В статье показано, что для одного класса многомерных смешанно гиперболо-параболических уравнений задача Трикоми разрешима неоднозначно.

В работе [1] доказано, что для модельного уравнения однородная задача типа Трикоми (то есть измененное граничное условие) имеет нулевое решение.

1. Постановка задачи и результат

Пусть D — конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная в полупространстве $t > 0$ конусами $K_0 : |x| = t$, $K_1 : |x| = 1 - t$, $0 \le t \le \frac{1}{2}$, а при $t < 0$ — цилиндрической поверхностью $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$ и плоскостью $t = t_0 = \text{const}$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$.

Обозначим через D^+ и D^- части области D, лежащие соответственно в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$. Часть конусов K_0, K_1, ограничивающих области D^+, обозначим через S_0, S^1 соответственно.

Пусть $S = \{(x,t) : t = 0,\ 0 < |x| < 1\}$, $\Gamma_0 = \{(x,t) : t = 0,\ |x| = 1\}$.

В области D рассмотрим смешанно гиперболо-параболические уравнения

$$0 = \begin{cases} \Delta_x u - u_{tt} + \sum\limits_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u, & t > 0, \\ \Delta_x u - u_t, \quad t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_m$, $m \ge 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \dots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t$, $r \ge 0$, $0 \le \theta_1 < 2\pi$, $0 \le \theta_i \le \pi$, $i = 2, 3, \dots, m-1$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$. Руководствуясь [12], в качестве многомерного аналога задачи Трикоми рассмотрим следующую задачу.

Задача T. Найти решение уравнения (1) в области D при $t \ne 0$ из класса $C(\bar{D} \setminus \Gamma_0) \cap C^1(D) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S_0} = \varphi(r, \theta), \qquad u|_{\Gamma} = \psi(t, \theta). \tag{2}$$

Пусть $\{Y^k_{n,m}(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \le k \le k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$, $W^l_2(S)$, $l = 0, 1, \dots$ — пространства Соболева, а $\tilde{S} = \{(r, \theta) \in S,\ 0 < r < \frac{1}{2}$.

Имеет место следующий результат [11].

Лемма. Пусть $f(r, \theta) \in W^l_2(S)$. Если $l \ge m-1$, то ряд

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f^k_n(r) Y^k_{n,m}(\theta), \tag{3}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \le l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно, при этом

$$f^k_n(r) = \int\limits_H f(r, \theta) Y^k_{n,m}(\theta) dH,$$

где H — единичная сфера в E_m.

Через $\tilde{a}^k_{in}(r,t)$, $a^k_{in}(r,t)$, $\tilde{b}^k_n(r,t)$, $\tilde{c}^k_n(r,t)$, ρ^k_n, $\bar{\varphi}^k_n(r)$, $\psi^k_n(t)$, $\bar{\tau}^k_n(r)$, $\bar{\nu}^k_n(r)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (3), соответственно функций $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $a_i \frac{x_i}{r}\rho$, $i = 1, ..., m$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $\varphi(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, $\tau(r,\theta) = u(r,\theta,0)$, $\nu(r,\theta) = u_t(r,\theta,0)$.

Введем множество функций

$$\begin{gathered} B^l(\tilde{S}) = \{f(r,\theta) : f \in W^l_2(\tilde{S}), \\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} (||f^k_n(r)||^2_{C^2((0,\frac{1}{2}))} + ||f^k_n(r)||^2_{C([0,\frac{1}{2}])}) \exp 2(n^2 + n(m-2)) < \infty, \\ l \ge m-1\}. \end{gathered}$$

Пусть $a_i(r,\theta,t)$, $b(r,\theta,t)$, $c(r,\theta,t) \in W^l_2(D^+) \subset C(\bar{D}^+)$, $i = 1, ..., m$, $l \ge m+1$.

Тогда справедливо утверждение.

Теорема. *Если $\varphi(r,\theta) = r^3\varphi^*(r,\theta)$, $\varphi^*(r,\theta) \in B^l(\tilde{S})$, $\psi(t,\theta) \in W^l_2(\Gamma)$, $l \ge m+1$, то задача T разрешима неоднозначно.*

Отметим, что неединственность решения задачи T для модельного гиперболо-параболического уравнения показана в [3].

Доказательство. В сферических координатах уравнение (1) в области D^+ имеет вид

$$Lu \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t)u_{x_i} + b(r,\theta,t)u_t + c(r,\theta,t)u = 0, \tag{4}$$

где

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),$$

$$g_1 = 1, \quad g_j = (\sin\theta_1 ... \sin\theta_{j-1})^2,\ j > 1.$$

Известно ([11]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, ...$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y^k_{n,m}(\theta)$.

При $t \to -0$ на S получим функциональное соотношение между $\tau(r,\theta)$ и $\nu(r,\theta)$ вида
$$\tau_{rr} + \frac{m-1}{r}\tau_r - \frac{1}{r^2}\delta\tau = \nu(r,\theta). \tag{5}$$

Искомое решение задачи T в области D^+ будем искать в виде
$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$– функции, подлежащие определению.

Подставив (6) в (4), умножив затем полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$ и проинтегрировав по единичной сфере H в E_m, для $\bar{u}_n^k$ получим ([2; 4]):
$$\begin{gathered}\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r}\rho_0^1 + \sum_{i=0}^{m} a_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1 + \widetilde{b}_0^1\bar{u}_{0t}^1 + \widetilde{c}_0^1\bar{u}_0^1 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k + \left(\frac{m-1}{r}\rho_n^k + \sum_{i=1}^{m} a_{in}^k\right)\bar{u}_{nr}^k + \widetilde{b}_n^k\bar{u}_{nt}^k + \right. \\ \left. + \left[\widetilde{c}_n^k - \lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2} + \sum_{i=1}^{m}(\widetilde{a}_{in-1}^k - na_{in}^k)\right]\bar{u}_n^k\right\} = 0.\end{gathered} \tag{7}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений
$$\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1 + \frac{m-1}{r}\rho_0^1\bar{u}_{0r}^1 = 0, \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\rho_1^k\bar{u}_{1rr}^k - \rho_1^k\bar{u}_{1tt}^k + \frac{m-1}{r}\rho_1^k\bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2}\rho_1^k\bar{u}_1^k = \\ = -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i0}^1\bar{u}_{0r}^1 + \widetilde{b}_0^1\bar{u}_{0t}^1 + \widetilde{c}_0^1\bar{u}_0^1\right), \quad n=1, \quad k=\overline{1,k_1},\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r}\rho_n^k\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\rho_n^k\bar{u}_n^k = \\ = -\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^{m} a_{in-1}^k\bar{u}_{n-1r}^k + \widetilde{b}_{n-1}^k\bar{u}_{n-1t}^k + [\widetilde{c}_{n-1}^k + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{m}(\widetilde{a}_{in-2}^k - (n-1)a_{in-1}^k)]\bar{u}_{n-1}^k\right\}, \quad k=\overline{1,k_n}, \quad n=2,3,\ldots.\end{gathered} \tag{10}$$

Суммируя уравнения (9) от 1 до k_1, а уравнение (10) — от 1 до k_n, а затем сложив полученные выражения с (8), приходим к уравнению (7).

Отсюда следует, что если $\left\{\bar{u}_n^k\right\}$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\ldots$ — решение системы (8)–(10), то оно является и решением уравнения (7).

Заметим, что каждое уравнение системы (8)–(10) можно представить в виде
$$\bar{u}_{nrr}^k - \bar{u}_{ntt}^k + \frac{(m-1)}{r}\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k = \bar{f}_n^k(r,t), \tag{11}$$

где $\bar{f}_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\bar{f}_0^1(r,t) \equiv 0$.

Далее, учитывая ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ ([1]), из (5) и из первого краевого условия (2) в силу (6) будем иметь

$$\bar{\tau}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{\tau}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\tau}_n^k = \bar{\nu}_n^k(r),\ 0 < r < 1, \tag{12}$$

$$\bar{u}_n^k(r,r) = \bar{\varphi}_n^k(r),\ 0 \leq r \leq \frac{1}{2},\ k = \overline{1,\ k_n},\ \ n = 0,1,\dots. \tag{13}$$

В (11)–(13), произведя замену $\bar{u}_n^k(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} u_n^k(r,t)$ и полагая $\xi = \frac{r+t}{2}$, $\eta = \frac{r-t}{2}$, соответственно получим:

$$Lu_n^k \equiv u_{n\xi\eta}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{(\xi+\eta)^2}u_n^k = f_n^k(\xi,\eta), \tag{14}$$

$$\tau_{n\xi\xi}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{\xi^2}\tau_n^k = \nu_n^k(\xi),\ 0 < \xi < \frac{1}{2}, \tag{15}$$

$$u_n^k(\xi,0) = \varphi_n^k(\xi),\ 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}, \tag{16}$$

$$f_n^k(\xi,\eta) = (\xi+\eta)^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{f}_n^k(\xi+\eta,\ \xi-\eta),$$

$$\tau_n^k(\xi) = (2\xi)^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{\tau}_n^k(2\xi),\ \nu_n^k(\xi) = (2\xi)^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{\nu}_n^k(2\xi),$$

$$\varphi_n^k(\xi) = \xi^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{\varphi}_n^k(\xi),\ \bar{\lambda}_n = ((m-1)(3-m) - 4\lambda_n)/4,\ k = \overline{1,\ k_n},\ \ n = 0,1,\dots$$

Используя общее решение уравнения (14) (см. [7]), в [2] можно показать, что решение задачи Коши для уравнения (14) имеет вид:

$$\begin{gathered} u_n^k(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\tau_n^k(\eta)R(\eta,\eta;\xi,\eta) + \frac{1}{2}\tau_n^k(\xi)R(\xi,\xi,;\xi,\eta) + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\eta}^{\xi}[\nu_n^k(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta) - \tau_n^k(\xi_1)\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)|_{\xi_1=\eta_1}]d\xi_1 + \\ + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\xi}\int\limits_{0}^{\eta} f_n^k(\xi_1,\eta_1)R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)d\xi_1 d\eta_1, \end{gathered} \tag{17}$$

где $R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta) = P_\mu\left[\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi_1\eta_1+\xi\eta)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\right]$ — функция Римана уравнения $Lu_n^k = 0$ (см. [15]), а $P_\mu(z)$ — функция Лежандра, $\mu = n + \frac{(m-3)}{2}$,

$$\left.\frac{\partial}{\partial N}\right|_{\xi_1=\eta_1} = \left.\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial N^\perp}\frac{\partial}{\partial\eta_1} + \frac{\partial\eta_1}{\partial N^\perp}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)\right|_{\xi_1=\eta_1},$$

$N^\perp$ — нормаль к прямой $\xi = \eta$ в точке (ξ_1,η_1), направленная в сторону полуплоскости $\eta \leq \xi$.

Из (17) при $\eta = 0$, с учетом (16), получим интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$g_n^k(\xi) = \int\limits_0^\xi \nu_n^k(\xi_1) P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1, \tag{18}$$

где

$$\begin{gathered} g_n^k(\xi) = \sqrt{2}\varphi_n^k(\xi) - \frac{\xi}{\sqrt{2}} \int\limits_0^\xi \psi_n^k(\xi_1) P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1, \\ \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\tau_n^k(\xi)}{\xi}\right) = \psi_n^k(\xi),\ \psi_n^k(0) = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Уравнение (18) обратимо по формуле ([13]) (см. также [2])

$$\nu_n^k(\xi) = \frac{1}{\xi} \int\limits_0^\xi \xi_1 (\xi^2 - \xi_1^2)^{-\frac{1}{2}} P'_\mu\left(\frac{\xi}{\xi_1}\right) \frac{dg_n^k}{d\xi_1} d\xi_1. \tag{20}$$

Далее из (19), (20) имеем

$$\nu_n^k(\xi) = f_n^k(\xi) + \int\limits_0^\xi G_n(\xi, \xi_1) \psi_n^k(\xi_1) d\xi_1, \tag{21}$$

где

$$\begin{gathered} \xi f_n^k(\xi) = \sqrt{2} \int\limits_0^\xi \xi_1 (\xi^2 - \xi_1^2)^{-\frac{1}{2}} P'_\mu\left(\frac{\xi}{\xi_1}\right) \frac{d\varphi_n^k}{d\xi_1} d\xi_1, \\ -\sqrt{2}\xi G_n(\xi, \xi_1) = \xi_1^2 (\xi^2 - \xi_1^2)^{-\frac{1}{2}} P'_\mu\left(\frac{\xi}{\xi_1}\right) + \int\limits_{\xi_1}^\xi t(\xi^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}} P_\mu\left(\frac{\xi_1}{t}\right) P'_\mu\left(\frac{\xi_1}{t}\right) dt + \\ + \int\limits_{\xi_1}^\xi \xi_1 (\xi^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}} P'_\mu\left(\frac{\xi}{t}\right) P'_\mu\left(\frac{\xi_1}{t}\right) dt. \end{gathered}$$

Ограниченным решением уравнения (15) является функция ([9])

$$(s_2 - s_1)\tau_n^k(\xi) = \int\limits_0^\xi (\xi^{s_2}\xi_1^{3-s_2} - \xi^{s_1}\xi_1^{3-s_1}) \nu_n^k(\xi_1) d\xi_1 + c_n^k (s_2 - s_1)\xi^{s_1},\ 0 < \xi < \frac{1}{2}, \tag{22}$$

$s_1 = n + \frac{(m-1)}{2}$, $s_2 = -n - \frac{(m-3)}{2}$, c_n^k — произвольная постоянная.

Подставляя (21) в (22), получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\psi_n^k(\xi) = F_n^k(\xi) + \int\limits_0^\xi L_n(\xi, \xi_1) \psi_n^k(\xi_1) d\xi_1, \tag{23}$$

где

$$F_n^k(\xi) = (s_1 - 1)c_n^k \xi^{s_1 - 2} + \frac{1}{s_2 - s_1} \int\limits_0^\xi [(s_2 - 1)\xi^{s_2 - 2}\xi_1^{3 - s_2} - (s_1 - 1)\xi^{s_1 - 2}\xi_1^{3 - s_1}] f_n^k(\xi_1) d\xi_1,$$

$$(s_2-s_1)L_n(\xi,\xi_1)=\int\limits_{\xi_1}^{\xi}[(s_2-1)\xi^{s_2-2}t^{3-s_2}-(s_1-1)\xi^{s_1-2}t^{3-s_1}]G_n(t,\xi_1)dt.$$

Определяя из (23) $\psi_n^k(\xi)$, найдем

$$\tau_n^k(\xi)=\xi\int\limits_0^{\xi}\psi_n^k(\xi_1)d\xi_1,\ 0\le\xi\le\frac{1}{2},\ k=\overline{1,\,k_n},\ n=0,1,... \tag{24}$$

Таким образом, сначала решив задачу (8), (13) $(n=0)$, а затем (9), (13) $(n=1)$ и так далее, найдем последовательно все $v_n^k(r,t)$ из (24), (15), (17), $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\dots$.

Итак, в области D^+ показано, что

$$\int\limits_H \rho(\theta)LudH=0. \tag{25}$$

Пусть $f(r,\theta,t)=R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r)\in V_0$ и V — множество, которое плотно в $L_2((t,1-t))$, $\rho(\theta)\in C^{\infty}(H)-$ плотно в $L_2(H)$, а $T(t)\in V_1$, V_1 — плотно в $L_2((0,\frac{1}{2}))$. Тогда $f(r,\theta,t)\in V$, где $V=V_0\otimes H\otimes V_1$. Как показано в [12], множество $V-$ плотно в $L_2(D^+)$.

Отсюда и из (25) следует, что

$$\int\limits_{D^+} f(r,\theta,t)LudD^+=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\int\limits_t^{1-t}\left(\int\limits_H\rho(\theta)LudH\right)R(r)T(t)drdt=0$$

и

$$Lu=0,\ \forall(r,\theta,t)\in D^+.$$

Учитывая оценки ([5; 11])

$$\begin{gathered}|P_\mu(z)|\le C,\ |z|\le 1,\ |P_\mu(\operatorname{ch}\eta)|\le C\exp(\mu-\frac{1}{2})\eta,\ \eta>0,\\ |k_n|\le c_2n^{m-2},\ \left|\frac{\partial^p}{\partial\theta_j^p}Y_{n,m}^k(\theta)\right|\le c_2n^{\frac{m}{2}+p-1},\ |Y_{0,m}^1(\theta)|=c_1,\ c,c_1=\text{const},\end{gathered} \tag{26}$$

$j=\overline{1,m-1}$, $p=0,1,\dots$, а также ограничения на заданные функции, аналогично как в [2], можно показать суммируемость рядов в системах (8)–(10) и в уравнении (7).

Далее также можно доказать, что ряд

$$\tau(r,\theta)=r^{\frac{(1-m)}{2}}\tau_0^1(r)Y_{0,m}^1(\theta)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}n^{-l}r^{\frac{(1-m)}{2}}\tau_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta) \tag{27}$$

сходится абсолютно и равномерно, если $l>\frac{3m}{2}$.

Таким образом, в силу (23), задача (4), (2), (27) в области D^+ имеет бесчисленное множество решений вида

$$u(r,\theta,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}u_0^1(r,t)Y_{0,m}^1(\theta)+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}r^{\frac{(1-m)}{2}}u_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{28}$$

где функций $u_n^k(r,t)$, $k=\overline{1,\,k_n}$, $n=0,1,\dots$ находятся по формуле (17), в которой $\nu_n^k(\xi)$, $\tau_n^k(\xi)$ определяются из (24), (15) и принадлежит классу $C(\bar{D}^+)\cap C^1(D^+\cup S)\cap C^2(D^+)$.

Теперь задачу T будем изучать в области D^-.

В области D^- рассмотрим первую краевую задачу для уравнения

$$u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u-u_t=0 \tag{29}$$

с условиями

$$u|_S=\tau(r,\theta),\ u|_\Gamma=\psi(t,\theta). \tag{30}$$

Решение задачи (29), (30) будем искать в виде (6).

Подставляя (6) в (29), получим уравнение

$$u_{nrr}^k-u_{nt}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}u_n^k=0,\ k=\overline{1,\,k_n},\ \ n=0,1,\dots, \tag{31}$$

при этом краевое условие (30) имеет вид

$$u_n^k(r,0)=g_n^k(r),\ \ u_n^k(1,t)=\psi_n^k(t),\ k=\overline{1,\,k_n},\ \ n=0,1,\dots, \tag{32}$$

$$g_n^k(r)=\begin{cases}\tau_0^1(r),\\ n^{-l}\tau_n^k(r),\ k=\overline{1,\,k_n},\ \ n=1,2,\dots.\end{cases}$$

Произведя замену $\upsilon_n^k(r,t)=u_n^k(r,t)-\psi_n^k(t)$, задачу (31), (32) приведем к следующей задаче

$$L\upsilon_n^k\equiv\upsilon_{nrr}^k-\upsilon_{nt}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\upsilon_n^k=f_n^k(r,t), \tag{33}$$

$$\upsilon_n^k(r,0)=\tilde{g}_n^k(r),\ \upsilon_n^k(1,t)=0,\ 0<r<1, \tag{34}$$

$$f_n^k(r,t)=\psi_{nt}^k-\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\psi_n^k(t),\ \tilde{g}_n^k(r)=g_n^k(r)-\psi_n^k(0).$$

Решение задачи (33), (34) ищем в виде $\upsilon_n^k(r,t)=\upsilon_{1n}^k+\upsilon_{2n}^k$, где $\upsilon_{1n}^k(r,t)-$ решение задачи

$$L\upsilon_{1n}^k=f_n^k(r,t), \tag{35}$$

$$\upsilon_{1n}^k(r,0)=0,\ \upsilon_{1n}^k(1,t)=0, \tag{36}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{2n}^k=0, \tag{37}$$

$$\upsilon_{2n}^k(r,0)=\tilde{g}_n^k(r),\ \upsilon_{2n}^k(1,t)=0,\ 0<r<1. \tag{38}$$

Решение вышеуказанных задач, аналогично [14], рассмотрим в виде

$$\upsilon_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}R_s(r)T_s(t), \tag{39}$$

при этом пусть

$$f_n^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{s,n}^k(t)R_s(r),\ \tilde{g}_n^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{s,n}^kR_s(r). \tag{40}$$

Подставляя (39) в (35), (36) с учетом (40), получим

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0,\ 0 < r < 1, \tag{41}$$

$$R_s(1) = 0,\ |R_s(0)| < \infty, \tag{42}$$

$$T_{st} + \mu T = -a^k_{s,n}(t), \tag{43}$$

$$T_s(0) = 0. \tag{44}$$

Ограниченное решение задачи (41), (42) имеет вид ([9]):

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\gamma_{s,n} r), \tag{45}$$

$\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$, $J_\nu(z)$– функция Бесселя первого рода, $\gamma_{s,n}$– ее нули, $\mu = \gamma^2_{s,n}$.

Решение задачи (43), (44) записывается в виде

$$T_s(t) = -\int\limits_0^t a^k_{s,n}(\xi) \exp[-\gamma^2_{s,n}(t-\xi)] d\xi. \tag{46}$$

Подставляя (45) в (40), получим

$$r^{-\frac{1}{2}} f^k_n(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a^k_{s,n}(t) J_\nu(\gamma_{s,n} r),\ 0 < r < 1, \tag{47}$$

$$r^{-\frac{1}{2}} \tilde{g}^k_n(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b^k_{s,n} J_\nu(\gamma_{s,n} r),\ 0 < r < 1. \tag{48}$$

Ряды (47), (48) — разложения в ряды Фурье — Бесселя ([3]), если

$$a^k_{s,n}(t) = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\gamma_{s,n})]^2} \int\limits_0^1 \sqrt{\xi} f^k_n(\xi, t) J_\nu(\gamma_{s,n}\xi) d\xi, \tag{49}$$

$$b^k_{s,n} = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\gamma_{s,n})]^2} \int\limits_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{g}^k_n(\xi) J_\nu(\gamma_{s,n}\xi) d\xi, \tag{50}$$

где $\gamma_{s,n}$, $s = 1, 2, ...$ — положительные нули функции Бесселя, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (45), (46) получим решение задачи (35), (36) в виде

$$\upsilon^k_{1n}(r,t) = -\sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} J_\nu(\gamma_{s,n} r) \{\int\limits_0^t a^k_{s,n}(\xi) \exp[-\gamma^2_{s,n}(t-\xi)] d\xi\}, \tag{51}$$

где $a^k_{s,n}(t)$ определяется из (49).

Далее, подставляя (39) в (37), (38), будем иметь

$$T_{st} + \gamma^2_{s,n} T = 0,$$

решением которого является

$$T_s(t) = \exp(-\gamma_{s,n}^2 t). \tag{52}$$

Из (45), (52), с учетом (40), получим

$$\upsilon_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} b_{s,n}^k J_\nu(\gamma_{s,n} r) \exp(-\gamma_{s,n}^2 t), \tag{53}$$

где $b_{s,n}^k$ находится из (50).

Следовательно, решение задачи (29), (30) в области D^- есть функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} [\psi_n^k(t) + \upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t)] r^{\frac{(1-m)}{2}} Y_{n,m}^k(\theta), \tag{54}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t), \upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (51) и (53).

Учитывая ограничения на заданные функций $\varphi(r,\theta), \psi(t,\theta)$, а также оценки (26), аналогично [2; 14], можно показать, что полученные неоднозначные решения вида (28) и (54) принадлежит искомому классу.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алдашев, С. А. Единственность решения задачи типа Трикоми для многомерного смешанно гиперболо-параболического уравнения / С. А. Алдашев // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 1. — С. 135–139.

2. Алдашев, С. А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений / С. А. Алдашев. — Алматы : Гылым, 1994. — 170 с.

3. Алдашев, С. А. Неединственность решения задачи Трикоми для многомерного смешанно гиперболо-параболического уравнения / С. А. Алдашев // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 4. — С. 544–548.

4. Алдашев, С. А. О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений / С. А. Алдашев // Дифференциальные уравнения. — 1998. — Т. 34, № 1. — С. 64–68.

5. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М. : Наука, 1973. — Т. 1. — 294 с.

6. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М. : Наука, 1974. — Т. 2. — 295 с.

7. Бицадзе, А. В. Уравнения смешанного типа / А. В. Бицадзе. — М. : Изд-во АН СССР, 1959. — 164 с.

8. Врагов, В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики / В. Н. Врагов. — Новосибирск : Изд-во НГУ, 1983. — 84 с.

9. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. — М. : Наука, 1965. — 703 с.

10. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1976. — 543 с.

11. Михлин, С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения / С. Г. Михлин. — М. : Физматгиз, 1962. — 254 с.

12. Нахушев, А. М. Задачи со смещением для уравнения в частных производных / А. М. Нахушев. — М. : Наука, 2006. — 287 с.

13. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1987. — 688 с.
14. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1977. — 659 с.
15. Copson, E. T. On the Riemann-Green Function / E. T. Copson // J. Rath. Mech. and Anal. — 1958. — Vol. 1. — P. 324–348.

REFERENCES

1. Aldashev S.A. Edinstvennost resheniya zadachi tipa Trikomi dlya mnogomernogo smeshanno giperbolo-parabolicheskogo uravneniya [Uniqueness of the Solution of the Tricomi-Type Problem for the Multidimensional Mixed Hyperbolic-Parabolic Equation]. *Differentsialnye uravneniya*, 2017, vol. 53, no. 1, pp. 135-139.
2. Aldashev S.A. *Kraevye zadachi dlya mnogomernykh giperbolicheskikh i smeshannykh uravneniy* [Boundary Value Problems for Multidimensional Hyperbolic and Mixed Equations]. Almaty, Gylym Publ., 1994. 170 p.
3. Aldashev S.A. Needinstvennost resheniya zadachi Trikomi dlya mnogomernogo smeshanno giperbolo-parabolicheskogo uravneniya [Non-Uniqueness of the Solution of the Tricomi Problem for a Multidimensional Mixed Hyperbolic-Parabolic Equation]. *Differentsialnye uravneniya*, 2014, vol. 50, no. 4, pp. 544-548.
4. Aldashev S.A. O zadachakh Darbu dlya odnogo klassa mnogomernykh giperbolicheskikh uravneniy [About Darboux Problems for a Single Class Multidimensional Hyperbolic Equations]. *Differentsialnye uravneniya*, 1998, vol. 34, no. 1, pp. 64-68.
5. Beytmen G., Erdeyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii* [Higher Transcendental Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1973, vol. 1. 294 p.
6. Beytmen G., Erdeyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii* [Higher Transcendental Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1974, vol. 2. 295 p.
7. Bitsadze A.V. *Uravneniya smeshannogo tipa* [Equations of Mixed Type]. Moscow, Izd-vo AN SSSR, 1959. 164 p.
8. Vragov V.N. *Kraevye zadachi dlya neklassicheskikh uravneniy matematicheskoy fiziki* [Boundary Value Problems for Non-Classical Equations of Mathematical Physics]. Novosibirsk, Izd-vo NGU, 1983. 84 p.
9. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsialnym uravneniyam* [Handbook of Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 703 p.
10. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsionalnogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 543 p.
11. Mikhlin S.G. *Mnogomernye singulyarnye integraly i integralnye uravneniya* [Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962. 254 p.
12. Nakhushev A.M. *Zadachi so smeshcheniem dlya uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Problems with Displacement for Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 2006. 287 p.
13. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications]. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1987. 688 p.
14. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 659 p.
15. Copson E.T. On the Riemann-Green Function. *J. Rath. Mech. and Anal.*, 1958, vol. 1, pp. 324-348.

THE TRICOMI PROBLEM FOR A CLASS OF MULTIDIMENSIONAL MIXED HYPERBOLIC-PARABOLIC EQUATIONS

Serik A. Aldashev

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan
aldash51@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-8223-6900
Pushkin St, 125, 050010 Almaty, Kazakhstan

Abstract. It is known that in the mathematical modeling of electromagnetic fields in space, the nature of the electromagnetic process is determined by the properties of the medium. If the medium is non-conducting, we obtain degenerate multidimensional hyperbolic equations. If the medium has a high conductivity, then we come to degenerate multidimensional parabolic equations. Consequently, the analysis of electromagnetic fields in complex media (for example, if the conductivity of the medium changes) is reduced to degenerate multidimensional hyperbolic-parabolic equations. It is also known that the oscillations of elastic membranes in space can be modeled according to the Hamilton principle by degenerate multidimensional hyperbolic equations. The study of the process of heat propagation in a medium filled with mass leads to degenerate multidimensional parabolic equations. Therefore, by studying the mathematical modeling of the heat propagation process in oscillating elastic membranes, we also arrive at degenerate multidimensional hyperbolic-parabolic equations. When studying these applications, it becomes necessary to obtain an explicit representation of the solutions to the problems under study. Boundary value problems for hyperbolic-parabolic equations on the plane are well studied, and their multidimensional analogues are little studied. The Tricomi problem for these equations was previously investigated. As far as we know, this problem has not been studied in space. In this paper, the Tricomi problem is shown to be ambiguously solvable for a class of multidimensional mixed hyperbolic-parabolic equations.

Key words: the Tricomi problem, multidimensional equation, solvability, spherical functions, mixed hyperbolic-parabolic equations.