



DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2022.3.1>

УДК 514.142.2+514.174.6
ББК 22.19

Дата поступления статьи: 18.07.2022
Дата принятия статьи: 25.08.2022



ПОСТРОЕНИЕ C^1 -ГЛАДКИХ КУСОЧНО-КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ УРАВНЕНИЙ 4-ГО ПОРЯДКА

Алексей Александрович Клячин

Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой
математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
[Aleksy.klyachin@volsu.ru](mailto:Aleksey.klyachin@volsu.ru), klyachin-aa@yandex.ru
<https://orcid.org/0000-0003-3293-9066>
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В статье рассмотрены два подхода к решению краевых задач для уравнений 4-го порядка, основанных на построении кусочно-квадратичных функций. Показано на примерах, что первый подход не приемлем, поскольку не дает сходимости приближенных решений. Второй способ, основанный на сглаживании кусочно-линейных функций, показал свою эффективность не только в плане сходимости, но и в плане экономности времени расчета (он не требует решения систем уравнений, как в случае применения кубических сплайнов).

Ключевые слова: кусочно-полиномиальная функция, вариационная задача, уравнения 4-го порядка, метод градиентного спуска, кубический сплайн.

Введение

Рассмотрим следующую вариационную задачу

$$I(y) = \int_a^b G(x, y, y', y'') dx \rightarrow \min, \tag{1}$$

$$y(a) = A, y(b) = B, y'(a) = A', y'(b) = B'. \tag{2}$$

Известно, что ее решение сводится к краевой задаче для дифференциального уравнения 4-го порядка

$$\frac{d^2}{dx^2} G_{y''} - \frac{d}{dx} G_{y'} + G_y = 0, \tag{3}$$

$$y(a) = A, y(b) = B, y'(a) = A', y'(b) = B'. \tag{4}$$

Для решения этих задач нами предполагается применить вариационный метод поиска минимума функционала $I(y)$ в классе кусочно-полиномиальных функций. Опишем два способа построения таких функций.

Разобьем отрезок $[a, b]$ точками $x_{2i} = a + 2ih, h = \frac{b-a}{2n}, i = 0, 1, \dots, n$. Обозначим через x_{2i+1} середину отрезка $[x_{2i}, x_{2i+2}]$. Зададим в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ произвольным образом значения $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n}$ и построим на каждом отрезке $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ квадратичную функцию $v_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$ по этим значениям: $v_i(x_{2i}) = y_{2i}, v(x_{2i+1}) = y_{2i+1}, v(x_{2i+2}) = y_{2i+2}$. Обозначим через $v(x)$ полученную таким образом кусочно-квадратичную функцию: $v(x) = v_i(x)$, при $x \in [x_{2i}, x_{2i+2}], i = 0, 1, \dots, n-1$. Как показано в работе [1], значение функционала $I(y)$ может быть вычислено со сколь угодно большой точностью, если вместо функции $y(x)$ вычисление функционала выполнить на функции $v(x)$ (точнее, замену сделать на каждом отрезке $[x_{2i}, x_{2i+2}]$):

$$I(y) \approx \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} G(x, v_i, v'_i, v''_i) dx \equiv \tilde{I}. \tag{5}$$

Однако минимизация функционала на классе таким образом построенных кусочно-квадратичных функций $v(x)$ с соответствующими краевыми условиями не приводит к ожидаемому результату, а именно, мы не получим приближенного решения краевой задачи (3)–(4).

На рисунке 1 сплошной линией построен график точного решения $y = x^3$ краевой задачи $y^{IV} = 0, y(0) = 0, y(2) = 8, y'(0) = 0, y'(2) = 12$. Пунктирными линиями показаны приближенные решения, минимизирующие правую часть равенства (5). Как видно, сходимость минимизирующей последовательности не обнаруживается, хотя функционал \tilde{I} аппроксимирует интеграл (1) с высокой точностью. Объяснить этот, на первый взгляд странный факт, можно на таком примере. Если в качестве подынтегральной функции взять $G(x, y, y', y'') = (y'')^2$, то минимальное значение функционала \tilde{I} будет равно 0, и достигается оно на любой кусочно-линейной функции (вторые производные равны нулю на каждом отрезке $[x_{2i}, x_{2i+2}]$). Для устранения этого недостатка естественно рассмотреть класс кусочно-кубических сплайнов, имеющих непрерывную производную на всем отрезке $[a, b]$. Но этот подход обладает следующим недостатком. При построении сплайна для гладкой состыковки полиномов третьей степени в узлах сетки приходится

решать систему линейных алгебраических уравнений. При этом число таких уравнений будет порядка n . К тому же, так как предполагается использовать метод градиентного спуска, такое построение сплайна придется осуществлять на каждом шаге алгоритма. В настоящей статье нами разработан несколько иной подход: мы предлагаем способ построения кусочно-квадратичной функции, дифференцируемой всюду на отрезке, и не требующий решения каких-либо систем алгебраических уравнений.

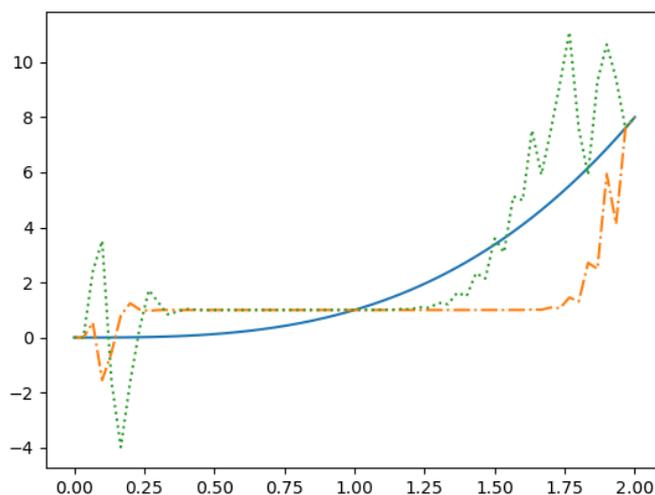


Рис. 1. Численная проверка расходимости приближенных решений

1. Построение непрерывно дифференцируемых кусочно-квадратичных функций

Рассмотрим разбиение отрезка $[a, b]$ точками $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Зададим произвольным образом значения y_0, y_1, \dots, y_n в узлах сетки. Не сложно построить кусочно-линейную функцию $L(x)$ такую, что $L(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$. Тогда

$$L(x) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}(x - x_i) + y_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Зафиксируем произвольно номер $i = 1, 2, \dots, n - 1$ и некоторое положительное число $\delta < h/2$. На отрезке $[x_i - \delta, x_i + \delta]$ построим кубический многочлен вида

$$P_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d$$

такой, что выполняются равенства

$$P_i(x_i - \delta) = L(x_i - \delta), \quad P_i(x_i + \delta) = L(x_i + \delta),$$

$$P'_i(x_i - \delta) = L'(x_i - \delta), \quad P'_i(x_i + \delta) = L'(x_i + \delta).$$

В итоге приходим к системе уравнений для нахождения коэффициентов многочлена

$$\begin{cases} a_i\delta^3 + b_i\delta^2 + c_i\delta + d_i & = y_i^+, \\ -a_i\delta^3 + b_i\delta^2 - c_i\delta + d_i & = y_i^-, \\ 3a_i\delta^2 + 2b_i\delta + c_i & = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \\ 3a_i\delta^2 - 2b_i\delta + c_i & = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \end{cases}$$

где

$$y_i^+ = L(x_i + \delta) = \frac{\delta}{h} (y_{i+1} - y_i) + y_i, \quad y_i^- = L(x_i - \delta) = -\frac{\delta}{h} (y_i - y_{i-1}) + y_i.$$

Из последних двух уравнений сразу можно найти коэффициент

$$b_i = \frac{y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i}{4\delta h}.$$

Далее, вычитая из первого уравнения второе и складывая третье уравнение с четвертым, приходим к системе уравнений второго порядка

$$\begin{cases} 2a_i\delta^3 + 2c_i\delta &= y_i^+ - y_i^-, \\ 6a_i\delta^2 + 2c_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h}. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\delta \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right) - y_i^+ + y_i^-}{4\delta^2} = \\ &= \frac{\delta \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right) - \frac{\delta}{h} (y_{i+1} - y_i) - y_i - \frac{\delta}{h} (y_i - y_{i-1}) + y_i}{4\delta^2} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, будет построен многочлен только второй степени. Найдем недостающие коэффициенты c_i и d_i . Из последнего уравнения системы следует, что

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{2h} + \frac{y_i - y_{i-1}}{2h} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}.$$

Из первых двух уравнений получаем

$$d_i = y_i - \delta \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{4h}.$$

Заменим $y(x)$ на функцию $u(x)$, которая определяется следующим образом. При $x \in [x_i, x_{i+1}]$ полагаем

$$u(x) = \begin{cases} b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i, & x \in [x_i, x_i + \delta], \\ \frac{y_{i+1} - y_i}{h}(x - x_i) + y_i, & x \in [x_i + \delta, x_{i+1} - \delta], \\ b_{i+1}(x - x_{i+1})^2 + c_{i+1}(x - x_{i+1}) + d_{i+1}, & x \in [x_{i+1} - \delta, x_{i+1}]. \end{cases}$$

Очевидно, полученная таким образом функция $u(x)$ имеет непрерывную производную на всем отрезке $[a, b]$ и кусочно-постоянную производную второго порядка. Тогда

$$I(y) \approx \int_a^b G(x, u(x), u'(x), u''(x)) dx.$$

Правая часть этого приближенного равенства представляет собой некоторую функцию J значений y_0, y_1, \dots, y_n , которую мы будем минимизировать для нахождения приближенного решения краевой задачи (3)–(4).

2. Результаты численных экспериментов

В качестве примера рассмотрим краевую задачу

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + ky = f(x), \quad y(a) = A, \quad y(b) = B, \quad y'(a) = A', \quad y'(b) = B'.$$

В этом случае функционал (1) имеет вид

$$I(y) = \int_a^b \left\{ \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 + ky^2 - 2f(x)y \right\} dx.$$

Заменяя функцию $y(x)$ на кусочно-квадратичную функцию $u(x)$, находим

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx &\approx \int_a^b \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 dx = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_{i-\delta}}^{x_i+\delta} (2b_i)^2 dx = \frac{1}{2\delta h^2} \sum_{i=1}^{n-1} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})^2. \end{aligned}$$

Пренебрегая величиной отличия кусочно-линейной функции от кусочно-квадратичной, приходим к равенству

$$\int_a^b y^2 dx \approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1}^2 + y_i^2 + y_{i+1}y_i).$$

Применяя формулу трапеций, получим

$$\int_a^b yf(x) dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i f_i + y_{i+1} f_{i+1}}{2},$$

где $f_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Итак, приходим к следующему функционалу

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\delta h^2} \sum_{i=1}^{n-1} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})^2 + k \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1}^2 + y_i^2 + y_{i+1}y_i) + \\ &\quad - h \sum_{i=0}^{n-1} (y_i f_i + y_{i+1} f_{i+1}). \end{aligned}$$

Для применения метода градиентного спуска при отыскании минимума функционала J вычислим его производные по переменным y_s , $s = 1, 2, \dots, n-1$. Для первой суммы имеем при $s = 2, 3, \dots, n-2$

$$\frac{\partial}{\partial y_s} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h} \right)^2 =$$

$$= \frac{2}{h^2} \sum_{i=1}^{n-1} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})(\delta_{i+1s} + \delta_{i-1s} - 2\delta_{is}) = \frac{2}{h^2} (6y_s + y_{s+2} + y_{s-2} - 4y_{s+1} - 4y_{s-1}).$$

Аналогично для второй суммы

$$\frac{\partial}{\partial y_s} \sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1}^2 + y_i^2 + y_{i+1}y_i) = y_{s+1} + y_{s-1} + 4y_s.$$

И, наконец,

$$\frac{\partial}{\partial y_s} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i f_i + y_{i+1} f_{i+1}) = f_s + f_{s+1}.$$

Поэтому,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{I}}{\partial y_s} &= \frac{1}{\delta h^2} (6y_s + y_{s+2} + y_{s-2} - 4y_{s+1} - 4y_{s-1}) + \\ &+ \frac{kh}{3} (y_{s+1} + y_{s-1} + 4y_s) - h(f_s + f_{s+1}). \end{aligned}$$

Таким образом, для минимизации функционала \tilde{I} приходим к итерационному процессу

$$\begin{aligned} y_s^{m+1} &= y_s^m - \alpha \left(\frac{1}{\delta h^2} (6y_s^m + y_{s+2}^m + y_{s-2}^m - 4y_{s+1}^m - 4y_{s-1}^m) + \right. \\ &\left. + \frac{kh}{3} (y_{s+1}^m + y_{s-1}^m + 4y_s^m) - h(f_s + f_{s+1}) \right), \quad s = 2, 3, \dots, n-2, \end{aligned}$$

где α — некоторое положительное число. При этом

$$y_0 = A, \quad y_n = B, \quad y_1 = A + A'h, \quad y_{n-1} = B - B'h.$$

В качестве первого тестового примера рассмотрим задачу поиска решения уравнения

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4y = 0,$$

удовлетворяющего краевым условиям

$$y(0) = 1, \quad y(\pi) = -e^\pi, \quad y'(0) = 1, \quad y'(\pi) = -e^\pi.$$

Не трудно проверить, что точным решением задачи является функция $y = e^x \cos x$. В данном примере отрезок $[0, \pi]$ был разбит на $n = 30$ равных отрезков и вычислена максимальная ошибка при различном числе итераций метода градиентного спуска (при $\alpha = 0,03$). Результат представлен в следующей таблице.

Таблица 1

Зависимость погрешности от числа итераций

Номер итерации	Погрешность	Номер итерации	Погрешность
10000	1,01545	110000	0,000782753
20000	0,479896	120000	0,000383396
30000	0,235208	130000	0,000187662
40000	0,115281	140000	9,17277e-05
50000	0,0565015	150000	4,47082e-05
60000	0,0276925	160000	2,16628e-05
70000	0,0135725	170000	1,03678e-05
80000	0,00665194	180000	4,84406e-06
90000	0,00326002	190000	2,15841e-06
100000	0,00159756	200000	8,75435e-07

На рисунке 2 можно видеть результат минимизации при 10 000 и 20 000 итераций. На рисунке сплошной линией (solid line style) изображено точное решение, штриховой линией (dotted line style) — приближенное решение при 10 000 итераций и штрих-пунктирная линия (dash-dot line style) соответствует приближенному решению при 20 000 итераций.

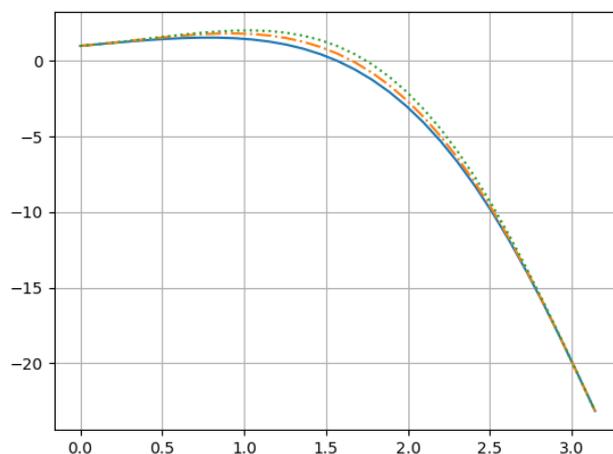


Рис. 2. Приближенные и точные решения

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + y = 2x - x^2$$

с краевыми условиями

$$y(0) = y(2) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y'(2) = -2.$$

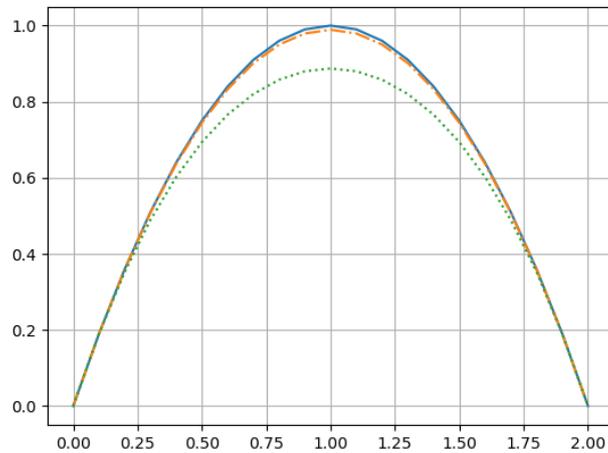


Рис. 3. Приближенные и точные решения

Ясно, что точным решением этой задачи является функция $y = 2x - x^2$. Приведем результаты сравнения приближенных решений с точным в виде такой же таблицы.

Таблица 2

Зависимость погрешности от числа итераций

Номер итерации	Погрешность	Номер итерации	Погрешность
10000	0,532655	110000	0,000246987
20000	0,245716	120000	0,000126252
30000	0,113352	130000	7,42713e-05
40000	0,0522938	140000	5,30267e-05
50000	0,0241279	150000	4,35262e-05
60000	0,0111351	160000	3,97997e-05
70000	0,00514159	170000	3,80807e-05
80000	0,00237681	180000	3,72878e-05
90000	0,00110144	190000	3,6922e-05
100000	0,000513117	200000	3,67532e-05

И в этом примере мы можем видеть неплохую сходимость построенных кусочно-квадратичных приближенных решений (см. также рис. 3). Отметим, что в работах [2; 3] было дано теоретическое обоснование вариационного метода решения краевых задач для уравнений 4-го порядка на произвольных треугольных сетках. Однако в работе [3] был использован несколько иной подход для построения кусочно-полиномиальной функции, взятый из работы [4]. Этот подход предусматривает гладкую склейку полиномиальных функций, определенных в каждой треугольной ячейке сетки, что влечет решение системы линейных алгебраических уравнений достаточно большого порядка. Например, для построения C^1 -гладкой кусочно полиномиальной функции в каждом треугольнике сетки надо строить полином 5-й степени, имеющий 21 неизвестных коэффициентов. Следовательно, соответствующая система будет иметь $21 \cdot N$ уравнений, где N — количество тре-

угольников сетки. Поэтому, основываясь на идее, использованной в данной статье, мы планируем разработать метод построения C^1 -гладких кусочно-полиномиальных функций на треугольных сетках, не требующий решения систем линейных уравнений. Это позволит применить такой подход для решения многомерных краевых задач уравнений 4-го порядка.

Заключение

В данной работе было представлено два подхода к построению кусочно-квадратичных функций с последующим применением их в решении краевых задач для уравнений 4-го порядка

$$G_y - \frac{d}{dx}G_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}G_{y''} = 0,$$

$$y(a) = A, y(b) = B, y'(a) = A', y'(b) = B'.$$

Для первого подхода была показана невозможность его использовать для нахождения приближенных решений рассматриваемых уравнений вариационным методом. Далее было дано описание второго подхода, который основан на сглаживании угловых точек кусочно-линейной функции. В процессе таких построений выяснилось, что сглаживающий полином имеет вторую степень. Чтобы продемонстрировать правильность такого подхода, были получены вычислительные формулы метода градиентного спуска и приведено два численных примера решения краевых задач уравнений 4-го порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клячин, А. А. Оценка погрешности вычисления функционала, содержащего производные второго порядка, на треугольной сетке / А. А. Клячин // Сибирские электронные математические известия. — 2019. — № 16. — С. 1856–1867.
2. Клячин, А. А. Аппроксимация уравнений с частными производными 4-го порядка в классе кусочно-полиномиальных функций на треугольной сетке / А. А. Клячин, В. А. Клячин // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2019. — № 22 (2). — С. 65–72. — DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2019.2.5>
3. Клячин, А. А. О C^1 -сходимости кусочно-полиномиальных решений вариационного уравнения 4-го порядка / А. А. Клячин // Уфимский математический журнал. — 2022. — № 14 (3). — С. 63–73.
4. Ženišek, A. Interpolation Polynomials on the Triangle / A. Ženišek // Numer. Math. — 1970. — № 15. — P. 283–296.

REFERENCES

1. Klyachin A.A. Otsenka pogreshnosti vychisleniya funktsionala, sodержashchego proizvodnyye vtorogo poryadka, na treugolnoy setke [An Estimate of the Error in Calculating a Functional Containing Second-Order Derivatives on a Triangular Grid]. *Sibirskie elektronnyye matematicheskie izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports], 2019, no. 16, pp. 1856-1867.
2. Klyachin A.A., Klyachin V.A. Approksimatsiya uravneniy s chastnymi proizvodnymi 4-go poryadka v klasse kusochno-polinomialnykh funktsiy na treugolnoy setke [Approximation of 4th order Partial Differential Equations in the Class of Piecewise Polynomial Functions on a Triangular Grid]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie*

[Mathematical Physics and Computer Simulation], 2019, no. 22 (2), pp. 65-72. DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2019.2.5>

3. Klyachin A.A. О C^1 -skhodimosti kusochno-polinomialnykh resheniy variatsionnogo uravneniya 4-go poryadka [On the C^1 -Convergence of Piecewise Polynomial Solutions of a Fourth-Order Variational Equation]. *Ufimskiy matematicheskiy zhurnal* [Ufa Mathematical Journal], 2022, no. 14 (3), pp. 63-73.

4. Ženišek A. Interpolation Polynomials on the Triangle. *Numer. Math.*, 1970, no. 15, pp. 283-296.

CONSTRUCTION OF C^1 -SMOOTH PIECEWISE QUADRATIC FUNCTIONS FOR SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF 4th ORDER EQUATIONS

Aleksey A. Klyachin

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Head of Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
[Aleksy.klyachin@volsu.ru](mailto:Aleksey.klyachin@volsu.ru), klyachin-aa@yandex.ru
<https://orcid.org/0000-0003-3293-9066>
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. In this paper, two approaches to the construction of piecewise quadratic functions were presented with their subsequent application in solving boundary value problems for equations of the 4th order

$$G_y - \frac{d}{dx}G_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}G_{y''} = 0,$$

$$y(a) = A, y(b) = B, y'(a) = A', y'(b) = B'.$$

For the first approach, it was shown that it cannot be used to find approximate solutions of the considered equations by the variational method. Next, a description was given of the second approach, which is based on smoothing the corner points of a piecewise linear function. In the process of such constructions, it turned out that the smoothing polynomial has the second degree. To demonstrate the correctness of this approach, computational formulas of the gradient descent method were obtained and two numerical examples of solving boundary value problems of 4th order equations were given.

Key words: piecewise polynomial function, variational problem, 4th order equations, gradient descent method, cubic spline.