



DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2022.4.3>

УДК 517.958  
ББК 22.161.6

Дата поступления статьи: 25.07.2021  
Дата принятия статьи: 19.09.2022



## СПЕКТР ЛАПЛАСИАНА В ОБЛАСТИ С ГРАНИЦЕЙ И БАРЬЕРОМ, СОСТАВЛЕННЫМИ ИЗ МАЛЫХ РЕЗОНАТОРОВ<sup>1</sup>

**Александр Сергеевич Багмутов**

Ассистент факультета систем управления и робототехники,  
Университет ИТМО  
Bagmutov94@mail.ru  
прот. Кронверкский, 49, 197101 г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

**Игорь Юрьевич Попов**

Доктор физико-математических наук,  
профессор факультета систем управления и робототехники,  
Университет ИТМО  
popov@mail.ifmo.ru  
просп. Кронверкский, 49, 197101 г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

**Аннотация.** В данной работе рассматривается задача на собственные значения оператора Лапласа с граничными условиями Неймана для некоторой двухмерной области, часть границы которой претерпевает нерегулярное геометрическое возмущение. Вследствие возмущения граничное условие Неймана на рассматриваемой части границы эффективно меняется на энерго-зависящее условие Робена.

**Ключевые слова:** теория возмущения операторов, спектральный анализ, граничное условие Робена, резонаторы Гельмгольца, модель точечных отверстий.

## Введение

Задачи, связанные с влиянием геометрических возмущений границ области на спектр оператора, широко освещены в литературе [4; 7; 8; 10; 11; 13]. В частности, возмущения, связанные с подсоединением к области резонаторов Гельмгольца, привлекают интерес из-за резонансных эффектов полости, простоты описания, возможности физической реализации и большого количества разработанных методов исследования таких систем. Результаты получаются с использованием вариационных методов, анализа асимптотик [1; 2; 6; 9; 12; 25], а также приближенной модели точечных отверстий [16; 17; 19–23].

Существует множество областей практического применения теории возмущений резонаторами Гельмгольца, таких как наноэлектроника, использующая волноводы нанометрового масштаба, при котором проявляются квантовые эффекты, или акустические приборы, решающие такие задачи, как шумоподавление [3] и т. д. В частности, интересные нас поверхности, заполненные большим количеством резонаторов, создающими особые граничные условия, в настоящее время активно исследуются в области метаматериалов [15; 26].

В данной работе рассматривается возмущение границы области присоединением  $N$  резонаторов Гельмгольца в пределе  $N \rightarrow \infty$ . Системы, содержащие неограниченно возрастающее количество резонаторов, рассматривались в работах [9; 14; 18; 24]. Границы области с такими возмущениями часто называют гофрированными границами.

Работа организована следующим образом: во втором разделе рассматривается система с границей из  $N$  узких полос, для которой выводится предельное граничное условие, в третьем разделе аналогичный результат получается для системы с барьером из  $N$  резонаторов, разделяющим две области, и в четвертом разделе приводятся численные результаты для обеих систем, которые сопоставляются с аналитическими.

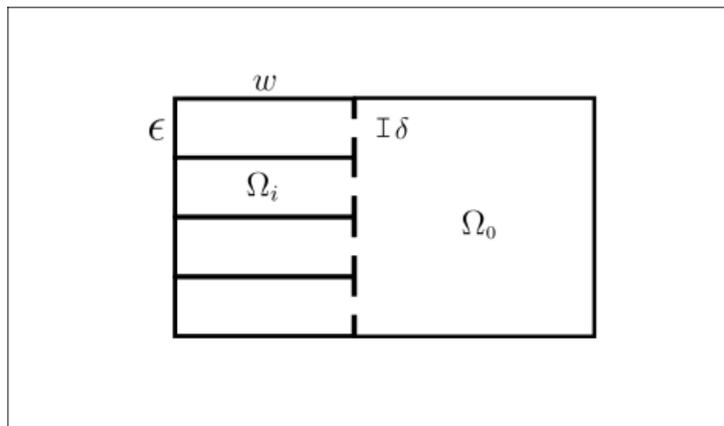


Рис. 1. Пример геометрии системы с гофрированной границей

### 1. Граница из полос

Введем семейство областей  $\Omega^N$ , где параметр  $N$  отвечает за количество присоединенных резонаторов (на рисунке 1 изображена область  $\Omega^4$ ). Пусть  $\Omega_0$  — односвязная прямоугольная область на плоскости  $\mathbb{R}^2$ ,  $\partial\Omega$  — граница этой области. Левую часть

границы области обозначим  $\Gamma = \{(x, y) | x = w\} \subseteq \partial\Omega_0$ , возмущение границы будет происходить на этой части. Вдоль границы  $\Gamma$ , где через отверстия шириной  $\delta$  присоединяются  $N$  малых резонаторов Гельмгольца  $\Omega_i$ . Параметр  $\epsilon = \frac{|\Gamma|}{N}$  характеризует расстояние между соседними отверстиями в границе  $\Gamma$ , ведущими к резонаторам Гельмгольца. При увеличении  $N$  ширина резонаторов  $\epsilon$  и размер отверстий  $\delta$  стремятся к нулю, в то время как длина резонаторов  $w$  остается постоянной. Мы полагаем  $\delta = A\epsilon, 0 < A < 1$ . На области  $\Omega^N$  определен оператор Лапласа с граничными условиями Неймана:

$$H_N u := -\Delta_N u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Собственные значения оператора  $-\Delta_N$  с порядковым номером  $n$  обозначаются  $\lambda_n^N$ , а их собственные функции —  $\psi_n^N(x), x \in \mathbb{R}^2$ .

Далее мы будем работать в рамках приближенной модели точечных отверстий. Этот метод зачастую применяется для построения точных решений в случаях сложной геометрии, содержащей отверстия, размер которых мал по сравнению с длиной волны. Метод заключается в том, чтобы перейти к системе с геометрией, в которой конечные отверстия заменяются на точечные, а затем теория самосопряженных расширений симметрических операторов используется для построения параметризованного оператора, описывающего новую систему, причем его параметр  $k_0$  контролирует пропускную способность точечных отверстий и может быть подобран так, чтобы наиболее точно соответствовать ситуации с конечным диаметром отверстий.

Введем следующие обозначения:  $G(x, x_i, k), G_i(x, x_i, k)$  — функции Грина с условиями Неймана в прямоугольнике, для областей  $\Omega_0$  и  $\Omega_i$  соответственно, с особенностями в точках отверстий  $x_i$ , а также  $g(x_i, k, k_0), g_i(x_i, k, k_0)$  — вычисленные в точках отверстий функции, полученные из соответствующих функций Грина вычитанием сингулярностей:

$$g_\bullet(x_i, k, k_0) = [G_\bullet(x, x_i, k) - G_\bullet(x, x_i, k_0)]_{x \rightarrow x_i}.$$

Все малые резонаторы у нас идентичны, поэтому  $g_i(x_i, k, k_0)$  фактически зависит только от двух последних параметров и будет записываться как  $\hat{g}(k, k_0)$ .

Приведем основной аналитический результат раздела.

**Теорема 1.** Пусть  $\psi_n^N(x), n = 1, 2, \dots$  — собственные функции возмущенного модельного оператора  $H_N$  из семейства, описанного выше.

1) Функции  $\psi_n^N(x)$  имеют следующий вид:

$$\psi_n^N(x) = \begin{cases} \sum_{j=1}^N \alpha_j G(x, x_j, k) & x \in \Omega_0 \\ -\alpha_i G_i(x, x_i, k) & x \in \Omega_i \end{cases}, \quad (1)$$

где коэффициенты удовлетворяют следующей системе из  $N$  условий:

$$\alpha_i g(x_i, k, k_0) + \sum_{j \neq i}^N \alpha_j G(x_i, x_j, k) = -\alpha_i \hat{g}(k, k_0), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

2) В пределе  $N \rightarrow \infty$  функции  $\psi_n^N(x)$  сходятся к решениям следующего интегрального уравнения:

$$\psi(x) = - \int_{\Gamma} \psi(y) G(x, y, k) k \tan[kw] dy, \quad (3)$$

которое соответствует следующей задаче на собственные значения дифференциального оператора:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = -k \tan(kw)u|_{\Gamma} \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega_0 \setminus \Gamma} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Оставшаяся часть раздела посвящена доказательству теоремы.

Общая схема модели точечных отверстий на базу теории расширений операторов такова (см., например, [17; 20]). Стартуем с ортогональной суммы неймановских лапласианов в областях  $\Omega_0, \Omega_i, i = 1, 2 \dots N$ . Сужаем этот оператор на множество гладких функций, зануляющихся в точках  $x_i$ , и замыкаем оператор. Получаем симметрический оператор с индексами дефекта  $(2N, 2N)$ . Его самосопряженное расширение, которое и даст требуемую модель связи резонаторов через точечные отверстия, удобно строить, сужая сопряженный оператор. Область определения сопряженного оператора описывается через дефектные элементы  $G_i(x, x_i, k_0^2)$  по теореме Неймана [5] ( $k_0^2 < 0$  — некоторое отрицательное регулярное значение оператора). В нашем случае она состоит из функций

$$\psi(x) = \begin{cases} a_i G_i(x, x_i, k_0^2) + \tilde{\psi}_i(x), & x \in \Omega_i, \\ a_i^0 G_0(x, x_i, k_0^2) + \tilde{\psi}_0(x), & x \in \Omega_0, \end{cases} \quad (5)$$

где  $G_i(x, x_0, k)$  — функция Грина неймановского лапласиана в области  $\Omega_i$ ,  $\tilde{\psi}_i(x)$  — функции из области определения расширения по Фридрихсу данного симметрического оператора (то есть функции, не имеющие особенностей в точках  $x_i$ ). Учитывая характер функций  $\tilde{\psi}_i(x)$ , получаем следующую асимптотику функций  $\psi(x)$  в окрестности точек  $x_i$ :

$$\psi(x) = \begin{cases} a_i G_i(x, x_i, k_0^2) + b_i + o(|x - x_i|), & x \in \Omega_i, \\ a_i^0 G_0(x, x_i, k_0^2) + b_i^0 + o(|x - x_i|), & x \in \Omega_0. \end{cases} \quad (6)$$

Известны асимптотики функций Грина вблизи особенности:

$$G_i(x, x_0, k) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|x - x_0|} + \beta_i + o(|x - x_0|). \quad (7)$$

Область определения самосопряженного расширения  $H_N$  выделяется с помощью удовлетворения условию  $(H_N u, v) - (u, H_N v) = 0, u, v \in D(H_N)$ . Мы не будем рассматривать все возможные самосопряженные расширения (то есть все возможные условия на коэффициенты), а выберем только одно, которое представляется наиболее естественным (это так называемое условие Кирхгофа):

$$\begin{aligned} a_i^0 &= -a_i, \\ b_i^0 &= b_i. \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим что построенный оператор параметризован вещественным числом  $k_0^2 < 0$ . Этот параметр определяет «пропускную способность» отверстия. Как было показано в

[20], модельный самосопряженный оператор наиболее хорошо соответствует случаю реального отверстия конечного диаметра  $d$ , если параметр выбирается следующим образом

$$k_0 = \frac{2i}{\delta} \exp(-\gamma), \tag{9}$$

где  $\gamma = 0,5772\dots$  — константа Эйлера.

Пусть  $k^2$  — собственное значение модельного оператора  $H^N$ , не являющееся собственным значением неймановского лапласиана в  $\Omega_i$  и  $\Omega$ . Соответствующая ему собственная функция имеет вид:

$$u_n(x) = \begin{cases} \sum_{j=1}^n \alpha_j^{ex} G(x, x_j, k), & x \in \Omega, \\ \alpha_i^{in} G_i(x, x_i, k), & x \in \Omega_i. \end{cases}$$

Отметим отличие этого выражения от общей формы элементов  $D(H_N)$  (6), где присутствуют произвольные функции с условиями Неймана  $\tilde{u}$ , и параметр  $k_0$  зависит только от размера отверстия, но не от энергии  $k^2$ .

Теперь, чтобы соотнести  $a_\bullet$  и  $\alpha_\bullet$  и выразить условия (8) через  $\alpha_i^{in,ex}$ , мы должны выделить особенности  $G_i(x, x_i, k_0)$ . Для каждого отверстия  $l$  сделаем следующее:

$$u_n(x) = \begin{cases} \alpha_l^{ex} G(x, x_l, k_0) + \alpha_l^{ex} g(x, x_l, k, k_0) + \sum_{j \neq l}^n \alpha_j^{ex} G(x, x_j, k), & x \in \Omega, \\ \alpha_l^{in} G_l(x, x_l, k_0) + \alpha_l^{in} g_l(x, x_l, k, k_0), & x \in \Omega_l, \\ \alpha_j^{in} G_j(x, x_j, k), & x \in \Omega_j, j \neq l, \end{cases} \tag{10}$$

$$g^\bullet(x, z, k, k_0) = G^\bullet(x, z, k) - G^\bullet(x, z, k_0).$$

Сравнивая это с (6) и используя (7), мы получаем

$$\alpha_i^{ex} = a_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

и условия (8) принимают следующую форму:

$$\alpha_i := \alpha_i^{ex} = -\alpha_i^{in},$$

$$\alpha_i g_i(k, k_0) + \sum_{j \neq i}^N \alpha_j G(x_i, x_j, k) = -\alpha_i \hat{g}(k, k_0). \tag{11}$$

Рассмотрим предел построенных функций при  $N \rightarrow \infty$ . В частности, выведем предельное выражение для системы (11) условий на коэффициенты  $\alpha_i$ . С этой целью рассмотрим пределы функций Грина внутри резонаторов. Выпишем известное выражение для функций Грина уравнения Гельмгольца в прямоугольнике размеров  $w$  на  $h$ , с граничными условиями Неймана:

$$G(x, z, k) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_{i,j}}{wh} \cos \frac{\pi i x_1}{w} \cos \frac{\pi j x_2}{h} \cos \frac{\pi i z_1}{w} \cos \frac{\pi j z_2}{h} \frac{1}{k^2 - \left(\frac{i^2 \pi^2}{w^2} + \frac{j^2 \pi^2}{h^2}\right)}. \tag{12}$$

В нашем случае имеем

$$G(x, z, k) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_{i,j}}{w\epsilon} \frac{\cos \frac{\pi i x_1}{w} \cos \frac{\pi j x_2}{\epsilon} \cos \frac{\pi i z_1}{w} \cos \frac{\pi j z_2}{\epsilon}}{k^2 - \left(\frac{i^2 \pi^2}{w^2} + \frac{j^2 \pi^2}{\epsilon^2}\right)}, \tag{13}$$

$$c_{i,j} = 2^{2-\delta_i-\delta_j}, \delta_i = \begin{cases} 0, & i \neq 0, \\ 1, & i = 0. \end{cases} \quad - \text{Дельта-функция Кронекера.}$$

Подставляя  $h = \epsilon$  и переходя к пределу  $\epsilon \rightarrow \infty$ , мы получаем коэффициенты для предельных условий ( $\lambda_{i,j}^\epsilon = \frac{i^2\pi^2}{w^2} + \frac{j^2\pi^2}{\epsilon^2}$ ):

$$\hat{g}_\epsilon(k, k_0) = \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_{i,j}}{w} \cos^2 \frac{\pi j}{2} \frac{k_0^2 - k^2}{(k^2 - \lambda_{i,j}^\epsilon)(k_0^2 - \lambda_{i,j}^\epsilon)}.$$

Отмечая, что  $k_0^2 = -\frac{C}{\delta^2}$ , мы можем выразить предел  $\hat{g}^w(k)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \hat{g}_\epsilon(k, k_0)$ :

$$\hat{g}^w(k)\epsilon = \frac{1}{wk^2} + \frac{2}{w} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 - \frac{i^2\pi^2}{w^2})},$$

используя следующую формулу для ряда:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2 - a^2} = \frac{1}{2a^2} - \frac{\pi \cot(a\pi)}{2a}.$$

Когда расстояние между отверстиями  $\epsilon \rightarrow 0$ , ширина отверстий  $\delta \rightarrow 0$ , и учитывая  $k_0 = \frac{2i}{\delta} \exp(-\gamma)$ ,  $k_0^2 \rightarrow -\infty$ , мы можем получить в явном виде формулы для предела:

$$\hat{g}^w(k)\epsilon = \frac{\cot kw}{k}. \quad (14)$$

Пусть

$$u_i := u(x_i) = \alpha_i g_i(k, k_0) + \sum_{j \neq i}^N \alpha_j G(x_i, x_j, k).$$

Условие (11) может быть представлено в виде

$$u_i = -\alpha_i \hat{g}_\epsilon(k, k_0).$$

Умножая каждое из этих  $N$  уравнений на  $G(x, x_i, k)$  и суммируя, получаем

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i G(x, x_i, k) = - \sum_{i=1}^N u_i G(x, x_i, k) [\hat{g}_\epsilon(k, k_0)\epsilon]^{-1} \epsilon.$$

Левая часть этого выражения — оригинальная собственная функция, а правая часть содержит значения этой функции в точках отверстий, умноженные на расстояние между ними  $dx = \epsilon$ , что делает выражение интегральной суммой (с разбиением на равные отрезки длины  $\epsilon$ ). Поскольку интеграл существует, способ разбиения не играет роли. Наконец, рассматривая предел  $N \rightarrow \infty$ , мы получаем интегральное уравнение для некоторой функции  $u(x)$ , действующей в области  $\Omega$ .

$$\begin{aligned} \psi(x) &= - \int_{\Gamma} \psi(y) G(x, y, k) [\hat{g}(k, k_0) dy]^{-1} dy = \\ &= - \int_{\Gamma} \psi(y) G(x, y, k) k \tan[kw] dy. \end{aligned} \quad (15)$$

Это интегральное уравнение эквивалентно следующей задаче на собственные значения с граничными условиями в области  $\Omega_0$ :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = -k \tan(kw) u \Big|_{\Gamma} \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega \setminus \Gamma} = 0. \end{cases}$$

Теорема доказана.

**Замечание 1.** Мы не рассматриваем здесь предельный переход в области, где находятся полосы.

## 2. Барьер из полос

Далее мы расширяем данный метод на новый тип систем — возмущение в виде барьера из резонаторов.

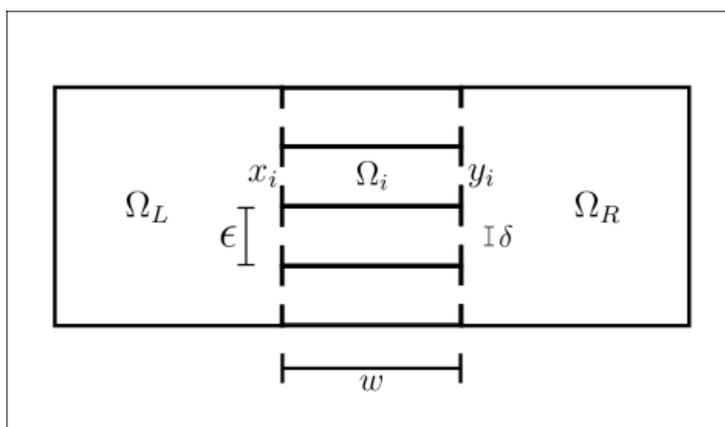


Рис. 2. Два квадратных резонатора, связанные через гофрированную границу из  $N$  (здесь  $N = 4$ ) прямоугольных резонаторов, каждый из которых имеет два отверстия в точках  $x_i$  и  $y_i$

Общий вид системы с гофрированным барьером представлен на рисунке 2. Пусть  $\Omega_L, \Omega_R$  — две непересекающиеся области в  $\mathbb{R}^2$  с общей границей  $\Gamma$ . Вдоль границы между основными областями вставляются  $N$  резонаторов  $\Omega_i, i = 1, 2, \dots, N$  (не изменяя формы областей, но сдвигая одну из них на необходимое расстояние). Каждый резонатор соединяется с обеими областями через два отверстия диаметра  $\delta$ . Середины отверстий обозначаются  $x_i$ , для отверстий из левой области  $\Omega_L$ , и  $y_i$  — из правой  $\Omega_R$  ( $x_i, y_i \in \mathbb{R}^2$ ). Резонаторы имеют прямоугольную форму, со сторонами  $w$  и  $h = \epsilon = \frac{|\Gamma|}{N}$ , последнее соответствует расстоянию между соседними центрами отверстий вдоль границы  $\Gamma$  в каждой из основных областей. Оператор на областях с возмущением и примененным приближением точечных отверстий обозначим  $H_N$ .

В данном разделе, аналогично предыдущему, мы получаем точные выражения собственных функций  $H_N$  и рассмотрим предел  $N \rightarrow \infty$ . Как и во втором разделе, рассматривается форма малых резонаторов в виде полос с фиксированной длиной,  $w = \text{const}$ ,  $h = \epsilon$ . Опуская вычисления, приведем основной результат:

**Теорема 2.** Пусть  $\psi_n^N(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  — собственные функции возмущенного модельного оператора  $H_N$  из семейства, описанного выше.

1) Функции  $\psi_n^N(x)$  имеют следующий вид:

$$u_n(x) = \begin{cases} \sum_{j=1}^n \alpha_j G(x, x_j, k), & x \in \Omega_L, \\ -\alpha_i G_i(x, x_i, k) - \beta_i G_i(x, y_i, k), & x \in \Omega_i, \\ \sum_{j=1}^n \beta_j G(x, y_j, k), & x \in \Omega_R, \end{cases}$$

где коэффициенты удовлетворяют следующей системе из  $2N$  условий ( $i = 1, 2, \dots, N$ ):

$$\begin{cases} \alpha_i g_i^L(k, k_0) + \sum_{j \neq i}^N \alpha_j G^L(x_i, x_j, k) = -\alpha_i \hat{g}(k, k_0) - \beta_i \hat{G}(k), \\ \beta_i g_i^R(k, k_0) + \sum_{j \neq i}^N \beta_j G^R(y_i, y_j, k) = -\beta_i \hat{g}(k, k_0) - \alpha_i \hat{G}(k). \end{cases} \quad (16)$$

2) В пределе  $N \rightarrow \infty$  функции  $\psi_n^N(x)$  сходятся к  $\psi(x) = \begin{cases} u^L(x), & x \in \Omega_L, \\ u^R(x), & x \in \Omega_R, \end{cases}$

решениям следующей пары интегральных уравнений:

$$\begin{cases} u^L(x) = \int_{\Gamma} G^L(x, y, k) [r_-(k)\check{u} - r_+(k)\check{u}] dy, \\ u^R(x) = \int_{\Gamma} G^R(x, y, k) [-r_-(k)\check{u} - r_+(k)\check{u}] dy, \end{cases}$$

которые соответствуют следующей задаче на собственные значения дифференциального оператора:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n^R} |_{\Gamma^R} + \frac{\partial u}{\partial n^L} |_{\Gamma^L} = -r_+(k)(u_R + u_L) |_{\Gamma}, \\ \frac{\partial u}{\partial n^R} |_{\Gamma^R} - \frac{\partial u}{\partial n^L} |_{\Gamma^L} = -r_-(k)(u_R - u_L) \check{u} |_{\Gamma}, \\ \frac{\partial u}{\partial n} |_{\partial \Omega_0 \setminus \Gamma} = 0. \end{cases}$$

$$r_-(k) = \lim_{\delta \rightarrow 0} r_-^\delta = \frac{k \sin kw}{\cos kw - 1},$$

$$r_+(k) = \lim_{\delta \rightarrow 0} r_+^\delta = \frac{k \sin kw}{\cos kw + 1}.$$

### 3. Численные результаты

Численно были построены собственные функции систем с точной геометрией (то есть без приближения точечных отверстий).

На рисунке 3 приводятся два графика, на которых построено отношение производной собственной функции к ее значению как функция от собственной энергии состояния. Каждое значение получается следующим образом: отношение рассчитывается в  $N$  точках  $x_i + dx$ , и берется среднее арифметическое (с отбрасыванием 10 % экстремальных значений). Величина  $dx$  мала по сравнению с величиной отверстий, не изменяется и выбрана так, чтобы минимизировать разницу между собственной функцией, построенной из функций Грина (см. левую часть (2)), и численным значением функции. Все параметры системы неизменны, за исключением количества резонаторов и размера отверстия.

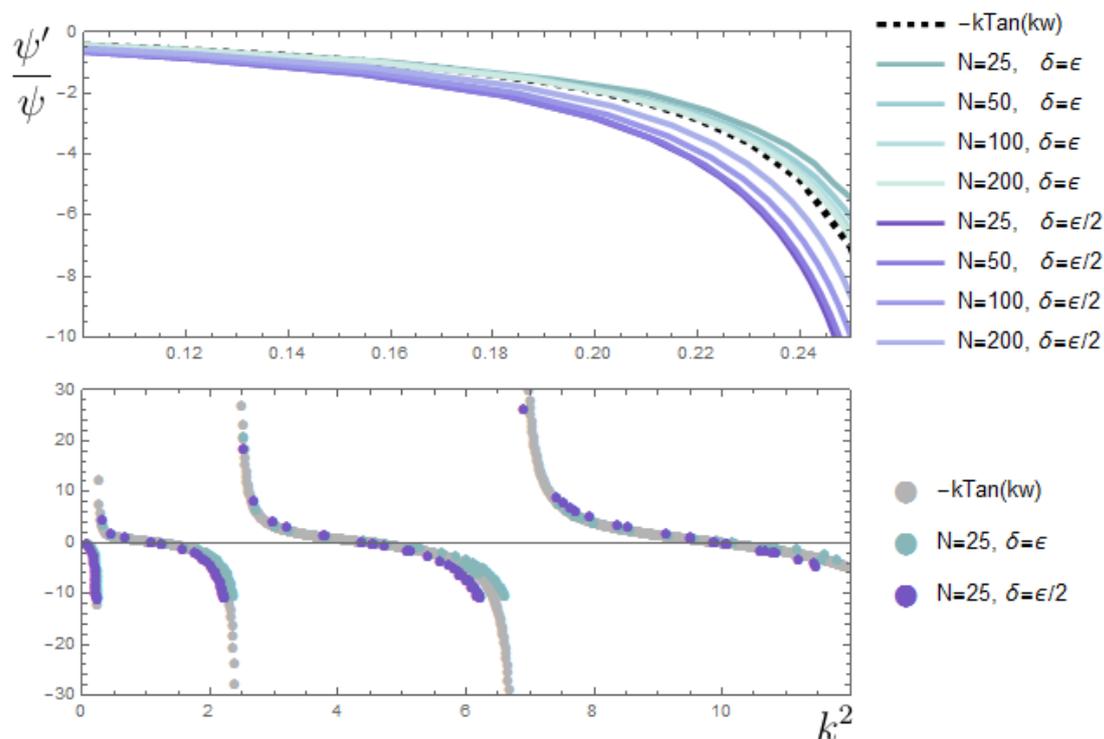


Рис. 3. Система с границей, гофрированной полосами. Графики отношения производной функции к ее значению, взятым вдоль возмущенной границы области  $\Omega$  (среднее значение). Каждая линия соответствует фиксированной геометрии системы, с обозначенными параметрами  $N$  и  $\delta$  (остальные параметры неизменны). Сверху показаны два набора из четырех линий: для отверстий, равных половине ширины полос, и для отверстий, равных ширине полос (когда у малых резонаторов есть только боковые стенки, то есть это не резонаторы, а каналы). Нижний график частично повторяет верхний в другом масштабе. Каждая точка соответствует конкретной собственной функции, точки одного цвета — одинаковая геометрия системы, с обозначенными параметрами  $N$  и  $\delta$  (остальные параметры неизменны). Также на графиках приведен теоретический предел  $-k \tan kw$ , обозначенный пунктирной линией и серыми точками

Мы использовали модель точечных отверстий, поэтому наш результат применим к случаю с малым отверстием в стенке резонатора. На графике помимо этого случая приведены также результаты для случая с полностью отсутствующей стенкой  $\Omega$ , претерпевающей возмущение, то есть полосы напрямую прикрепляются к основному резонатору. Как видно в масштабе нижнего графика, в случае отсутствующей стены сходимость к предельному значению  $-k \tan kw$  оказывается заметно лучше. Более того, данная закономерность распространяется на все размеры отверстий, то есть сходимость тем лучше, чем ближе  $\delta/\epsilon$  к единице.

На рисунке 4 изображены аналогичные графики для систем с барьером из 25-ти резонаторов (полос). Здесь не приводятся значения, соответствующие отношениям с малым знаменателем, так как в этих случаях погрешность при вычислении производных становится существенной по сравнению с самим значением. Серым изображены предельные функции, полученные аналитически. Как видно из рисунка, теоретически предсказанные асимптоты и нули присутствуют на численных графиках.

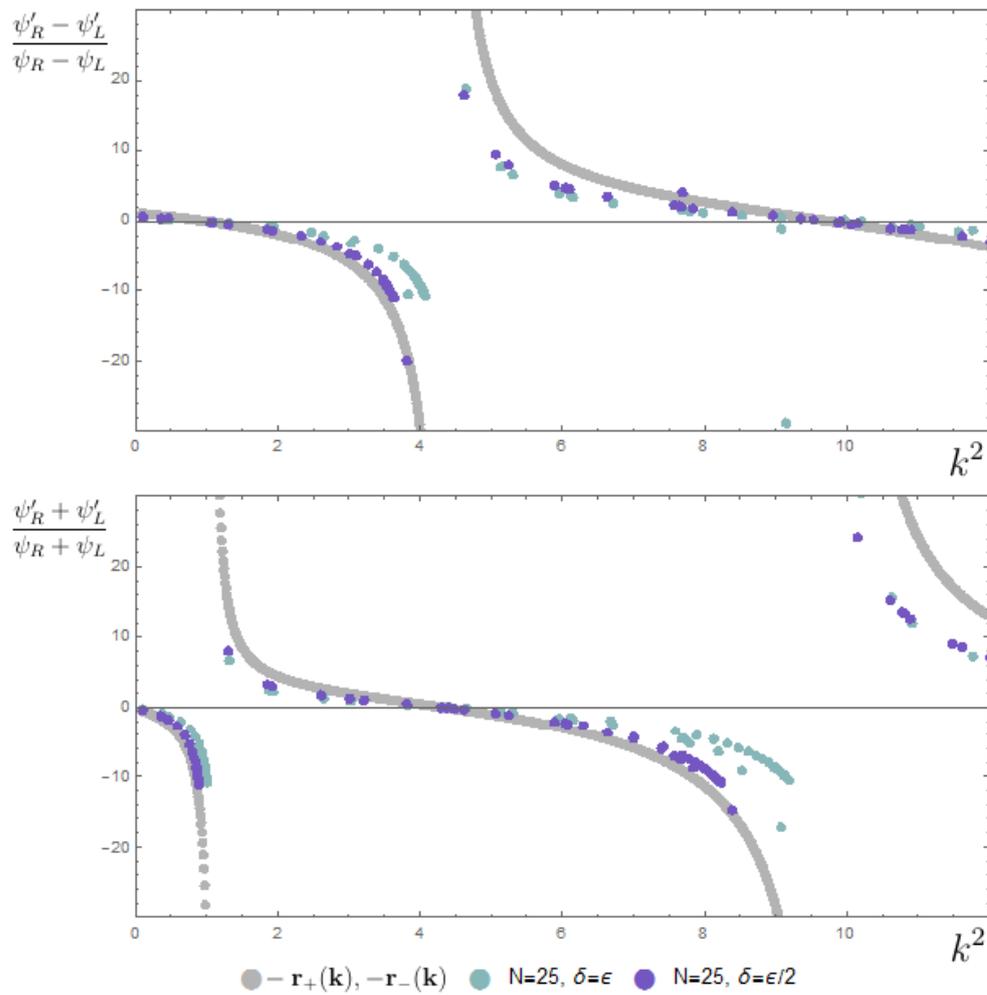


Рис. 4. Система с полупрозрачным барьером, гофрированным полосами. Графики отношения сумм и разностей производных функции на разных сторонах барьера к ее значениям. Каждая точка соответствует конкретной собственной функции, точки одного цвета — одинаковая геометрия системы, с обозначенными параметрами  $N$  и  $\delta$  (остальные параметры неизменны). Показаны три набора точек: серые точки — теоретический предел,  $-r_-(k)$  — сверху и  $-r_+(k)$  — снизу, остальные два набора — для отверстий, равных ширине полос, и для отверстий, равных половине ширины полос

### Заключение

Вопрос о собственных функциях оператора Лапласа в ограниченной области возникает во многих физических задачах от акустики до нанoeлектроники. При этом случай самых естественных граничных условий Дирихле или Неймана уже хорошо изучен. Однако в ряде ситуаций возникает потребность в необычных граничных условиях (например, для шумопоглощения). Их можно создать либо с использованием специальных материалов на границе, либо делая границу специальной сложной формы. В данной работе мы рассмотрели возмущение границы при помощи множества резонаторов Гельмгольца, присоединенных к основному резонатору через малые отверстия. В частности, нас интересовал предел при стремлении количества резонаторов к бесконечности.

В результате получается энергозависящее граничное условие.

Мы рассмотрели два типа систем — с границей из полос и барьером из полос. В обоих случаях были получены в явном виде граничные условия предельного оператора. Результаты проверены численно.

### ПРИМЕЧАНИЕ

<sup>1</sup> Авторы благодарят Российский научный фонд за поддержку в рамках гранта РФФ 22-11-00046.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гадыльшин, Р. Р. Существование и асимптотики полюсов с малой мнимой частью для резонаторов Гельмгольца / Р. Р. Гадыльшин // Успехи Матем. Наук. — 1997. — Т. 52, № 1 (313). — С. 3–76.
2. Ильин, А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач / А. М. Ильин. — М. : Наука, 1989. — 334 с.
3. Acoustic perfect absorbers via Helmholtz resonators with embedded apertures / S. Huang, X. Fang, X. Wang, Assouar Badreddine, Q. Cheng, Y. Li // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Vol. 145. — Article ID: 254. — DOI: <https://doi.org/10.1121/1.5087128>
4. Arrieta, J. M. Eigenvalue problems for nonsmoothly perturbed domains / J. M. Arrieta, J. K. Hale, Q. J. Han // Differential Equations. — 1991. — Vol. 91. — P. 24–52.
5. Birman, M. S. Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space / M. S. Birman, M. Z. Solomyak. — Dordrecht : D. Reidel Publishing Company, 1986. — 301 p.
6. Borisov, D. Distant perturbation asymptotics in window-coupled waveguides. I. The nonthreshold case / D. Borisov, P. Exner // J. Math. Phys. — 2006. — Vol. 47 (11). — Article ID: 113502.
7. Borisov, D. Quantum waveguides with small periodic perturbations: gaps and edges of Brillouin zones / D. Borisov, K. Pankrashkin // J. Phys. A. — 2013. — Vol. 46 (23). — Article ID: 235203.
8. Cardone, G. A gap in the essential spectrum of a cylindrical waveguide with a periodic perturbation of the surface / G. Cardone, S. Nazarov, C. Perugia // Math. Nachr. — 2010. — Vol. 283. — P. 1222–1244.
9. Cardone, G. Neumann spectral problem in a domain with very corrugated boundary / G. Cardone, A. Khrabustovskiy // J. Differential Equations. — 2015. — Vol. 259 (6). — P. 2333–2367.
10. Chechkin, G. A. On boundary value problem with singular inhomogeneity concentrated on the boundary / G. A. Chechkin, D. Cioranescu, A. Damlamian // J. Math. Pures Appl. — 2012. — Vol. 98. — P. 115–138.
11. Courant, R. Methods of Mathematical Physics. Vol. 1 / R. Courant, D. Hilbert. — New York : Wiley-Interscience, 1953. — 560 p.
12. Frolov, S. V. Resonances for laterally coupled quantum waveguides / S. V. Frolov, I. Yu. Popov // J. Math. Phys. — 2000. — Vol. 41. — P. 4391–4405.
13. Hempel, R. The essential spectrum of Neumann Laplacians on some bounded singular domains / R. Hempel, L. Seco, B. Simon // J. Funct. Anal. — 1991. — Vol. 102. — P. 448–483.
14. Khrabustovskiy, A. Homogenization of eigenvalue problem for Laplace — Beltrami operator on Riemannian manifold with complicated “bubble-like” microstructure / A. Khrabustovskiy // Math. Methods Appl. Sci. — 2009. — Vol. 32. — P. 2123–2137.
15. Mahesh, K. Helmholtz resonator based metamaterials for sound manipulation / K. Mahesh, R. S. Mini // J. Phys.: Conf. Ser. — 2019. — Vol. 1355. — Article ID: 012031.

16. Melikhova, A. S. Spectral problem for solvable model of bent nanopeapod / A. S. Melikhova, I. Yu. Popov // *Appl Anal.* — 2017. — Vol. 96 (2). — P. 215–224.
17. Pavlov, B. S. The theory of extensions and explicitly-soluble models / B. S. Pavlov // *Russian Math Surveys.* — 1987. — Vol. 42 (6). — P. 127–168.
18. Popov, I. Yu. A model of a boundary composed of the Helmholtz resonators / I. Yu. Popov, I. V. Blinova, A. I. Popov // *Complex Var. Elliptic Equ.* — 2021. — Vol. 66 (8). — P. 1256–1263.
19. Popov, I. Yu. Eigenvalues and bands imbedded in the continuous spectrum for a system of resonators and a waveguide: solvable model / I. Yu. Popov, S. L. Popova // *Phys Lett A.* — 1996. — Vol. 222. — P. 286–290.
20. Popov, I. Yu. Extension theory and localization of resonances for domains of trap type / I. Yu. Popov // *Mat. Sb.* — 1990. — Vol. 181 (10). — P. 1366–1390.
21. Popov, I. Yu. The extension theory and resonances for a quantum waveguide / I. Yu. Popov, S. L. Popova // *Phys. Lett. A.* — 1993. — Vol. 173. — P. 484–488.
22. Popov, I. Yu. The resonator with narrow slit and the model based on the operator extensions theory / I. Yu. Popov // *J. Math. Phys.* — 1992. — Vol. 33 (11). — P. 3794–3801.
23. Popov, I. Yu. Zero-width slit model and resonances in mesoscopic systems / I. Yu. Popov, S. L. Popova // *Europhys Lett.* — 1993. — Vol. 24 (5). — P. 373–377.
24. Sanchez-Palencia, E. *Nonhomogeneous Media and Vibration Theory* / E. Sanchez-Palencia. — Berlin ; New York : Springer-Verlag, 1980. — 398 p.
25. Vorobiev, A. M. On formal asymptotic expansion of resonance for quantum waveguide with perforated semitransparent barrier / A. M. Vorobiev, A. S. Bagmutov, A. I. Popov // *Nanosystems: Phys. Chem., Math.* — 2019. — Vol. 10 (4). — P. 415–419.
26. Zangeneh-Nejad, F. Active times for acoustic metamaterials / F. Zangeneh-Nejad, R. Fleury // *Rev. Phys.* — 2019. — Vol. 4. — Article ID: 100031.

### REFERENCES

1. Gadylshin R.R. Sushchestvovanie i asimptotiki polyusov s maloy mnimoy chastyu dlya rezonatorov Gelmgoltsa [Existence and Asymptotics of Poles with Small Imaginary Part for the Helmholtz Resonator]. *Uspekhi Matem. Nauk*, 1997, vol. 52, no. 1 (313), pp. 3-76.
2. Ilin A.M. *Soglasovanie asimptoticheskikh razlozheniy resheniy kraevykh zadach* [Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 334 p.
3. Huang S., Fang X., Wang X., Badreddine Assouar, Cheng Q., Li Y. Acoustic Perfect Absorbers Via Helmholtz Resonators with Embedded Apertures. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2019, vol. 145, article ID: 254. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.5087128>
4. Arrieta J.M., Hale J.K., Han Q.J. Eigenvalue Problems for Nonsmoothly Perturbed Domains. *Differential Equations*, 1991, vol. 91, pp. 24-52.
5. Birman M.S., Solomyak M.Z. *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space*. Dordrecht, D. Reidel Publishing Company, 1986. 301 p.
6. Borisov D., Exner P. Distant Perturbation Asymptotics in Window-Coupled Waveguides. I. The Nonthreshold Case. *J. Math. Phys.*, 2006, vol. 47 (11), article ID: 113502.
7. Borisov D., Pankrashkin K. Quantum Waveguides with Small Periodic Perturbations: Gaps and Edges of Brillouin Zones. *J. Phys. A*, 2013, vol. 46 (23), article ID: 235203.
8. Cardone G., Nazarov S., Perugia C. A Gap in the Essential Spectrum of a Cylindrical Waveguide with a Periodic Perturbation of the Surface. *Math. Nachr.*, 2010, vol. 283, pp. 1222-1244.
9. Cardone G., Khrabustovskyi A. Neumann Spectral Problem in a Domain with Very Corrugated Boundary. *J. Differential Equations*, 2015, vol. 259 (6), pp. 2333-2367.
10. Chechkin G.A., Cioranescu D., Damlamian A. On Boundary Value Problem with Singular Inhomogeneity Concentrated on the Boundary. *J. Math. Pures Appl.*, 2012, vol. 98, pp. 115-138.

11. Courant R., Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics. Vol. 1.* New York, Wiley-Interscience, 1953. 560 p.
12. Frolov S.V., Popov I.Yu. Resonances for Laterally Coupled Quantum Waveguides. *J. Math. Phys.*, 2000, vol. 41, pp. 4391-4405.
13. Hempel R., Seco L., Simon B. The Essential Spectrum of Neumann Laplacians on Some Bounded Singular Domains. *J. Funct. Anal.*, 1991, vol. 102, pp. 448-483.
14. Khrabustovskyi A. Homogenization of Eigenvalue Problem for Laplace --- Beltrami Operator on Riemannian Manifold with Complicated "Bubble-Like" Microstructure. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2009, vol. 32, pp. 2123-2137.
15. Mahesh K., Mini R.S. Helmholtz Resonator Based Metamaterials for Sound Manipulation. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1355, article ID: 012031.
16. Melikhova A.S., Popov I.Yu. Spectral Problem for Solvable Model of Bent Nanopeapod. *Appl. Anal.*, 2017, vol. 96 (2), pp. 215-224.
17. Pavlov B.S. The Theory of Extensions and Explicitly-Soluble Models. *Russian Math Surveys*, 1987, vol. 42 (6), pp. 127-168.
18. Popov I.Yu., Blinova I.V., Popov A.I. A Model of a Boundary Composed of the Helmholtz Resonators. *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2021, vol. 66 (8), pp. 1256-1263.
19. Popov I.Yu., Popova S.L. Eigenvalues and Bands Imbedded in the Continuous Spectrum for a System of Resonators and a Waveguide: Solvable Model. *Phys Lett A*, 1996, vol. 222, pp. 286-290.
20. Popov I.Yu. Extension Theory and Localization of Resonances for Domains of Trap Type. *Mat. Sb.*, 1990, vol. 181 (10), pp. 1366-1390.
21. Popov I.Yu., Popova S.L. The Extension Theory and Resonances for a Quantum Waveguide. *Phys. Lett. A*, 1993, vol. 173, pp. 484-488.
22. Popov I.Yu. The Resonator with Narrow Slit and the Model Based on the Operator Extensions Theory. *J. Math. Phys.*, 1992, vol. 33 (11), pp. 3794-3801.
23. Popov I.Yu., Popova S.L. Zero-Width Slit Model and Resonances in Mesoscopic Systems. *Europhys Lett*, 1993, vol. 24 (5), pp. 373-377.
24. Sanchez-Palencia E. *Nonhomogeneous Media and Vibration Theory.* Berlin, New York, Springer-Verlag, 1980. 398 p.
25. Vorobiev A.M., Bagmutov A.S., Popov A.I. On Formal Asymptotic Expansion of Resonance for Quantum Waveguide with Perforated Semitransparent Barrier. *Nanosystems: Phys. Chem., Math.*, 2019, vol. 10 (4), pp. 415-419.
26. Zangeneh-Nejad F., Fleury R. Active Times for Acoustic Metamaterials. *Rev. Phys.*, 2019, vol. 4, article ID: 100031.

**SPECTRUM OF THE LAPLACIAN  
ON A DOMAIN WITH THE BOUNDARY AND BARRIER,  
COMPOSED OF SMALL RESONATORS**

**Alexander S. Bagmutov**

Assistant, Faculty of Control Systems and Robotics,  
ITMO University  
Bagmutov94@mail.ru  
Prosp. Kronverkskiy, 49, 197101 Saint Petersburg, Russian Federation

**Igor Yu. Popov**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,  
Faculty of Control Systems and Robotics,  
ITMO University  
popov@mail.ifmo.ru  
Prosp. Kronverkskiy, 49, 197101 Saint Petersburg, Russian Federation

**Abstract.** In the present work, we consider a particular perturbation of the domain's boundary for a Laplacian. Particularly, the perturbation consists of adding a number of Helmholtz resonators, connected to the main domain through apertures, and we are interested in a limiting case, when number of attached resonators goes to infinity. Such perturbation referred to as "corrugated boundary" in literature. We will consider two different geometries: with the perturbation occurring on the boundary of a rectangular domain and on a barrier, appearing in the middle of rectangular domain. In the case of the barrier, domain is separated into two parts and each Helmholtz resonator has two apertures on the opposite walls, connecting it to each of the separated parts. For the calculation, we employ the model of zero-width apertures, which assumes apertures to be infinitely small (although their throughput can be controlled through a parameter), and allows one to use operator extensions theory and to describe the eigenfunctions explicitly. Let us denote original domain by  $\Omega_0$ , and  $\Omega^N$  are a family of domains, which coincide with  $\Omega_0$  everywhere, except for a one-dimensional part of boundary (or barrier)  $\Gamma$ , where the perturbation takes place. Each domain  $\Omega^N$  has  $N$  attached resonators. Let's consider Laplacians  $-\Delta_0$  and  $-\Delta_N$  on  $\Omega_0$ , and  $\Omega^N$  respectively, with Neumann boundary conditions on all boundaries, and denote eigenvalues of  $-\Delta_N$  by  $\psi_n^N(x)$ . Let the dimensions of resonators be  $w$  and  $h$ , and  $\delta$  are widths of all apertures. These parameters are dependent on number of resonators  $N$ . In our case, distance between holes is equal to height of resonators  $h$  and  $N = |\Gamma|/h$ . As we increase the number of resonators  $N$ , their height  $h$  decreases linearly, and the "length" of resonators  $w$  should remain constant. Now we can state our main results.

**Theorem 1.** In the case of boundary perturbations by Helmholtz resonators, when  $N \rightarrow \infty$ ,  $\psi_n^N(x)$  converge to eigenvalues of the following boundary problem:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = -k \tan(kw)u|_{\Gamma}, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega_0 \setminus \Gamma} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

**Theorem 2.** In the case of a perturbation by a barrier made of Helmholtz resonators, when  $N \rightarrow \infty$ ,  $\psi_n^N(x)$  converge to eigenvalues of the following boundary problem:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n^R} |_{\Gamma^R} + \frac{\partial u}{\partial n^L} |_{\Gamma^L} = -r_+(k)(u_R + u_L)|_{\Gamma}, \\ \frac{\partial u}{\partial n^R} |_{\Gamma^R} - \frac{\partial u}{\partial n^L} |_{\Gamma^L} = -r_-(k)(u_R - u_L)|_{\Gamma}, \\ \frac{\partial u}{\partial n} |_{\partial\Omega_0 \setminus \Gamma} = 0. \end{cases}$$

$$r_-(k) = \lim_{\delta \rightarrow 0} r_-^\delta = \frac{k \sin kw}{\cos kw - 1},$$

$$r_+(k) = \lim_{\delta \rightarrow 0} r_+^\delta = \frac{k \sin kw}{\cos kw + 1}.$$

We also provide results of numerical computations, corresponding to these problems, which confirm analytical results.

**Key words:** perturbation theory, operator spectrum, Roben boundary condition, Helmholtz resonators, zero-width slits model.