DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2022.4.4

УДК 517.518.68
ББК 22.161.5

Дата поступления статьи: 10.12.2021
Дата принятия статьи: 10.11.2022

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Юсуфали Хасанович Хасанов

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры информатики и информационных систем,
Российско-Таджикский (Славянский) университет
yukhas60@mail.ru
ул. М. Турсунзаде, 30, 734025 г. Душанбе, Республика Таджикистан

Ахлиддин Намозович Давлатов

Преподаватель кафедры алгебры и теории чисел,
Таджикский государственный педагогический университет
Davlatov-ahliddin@mail.ru
просп. Рудаки, 121, 734025 г. Душанбе, Республика Таджикистан

Аннотация. Рассматривается векторное пространство над полем вещественных чисел. Под топологическим векторным пространством понимается хаусдорфово топологическое векторное пространство. Топология в этом пространстве определяется базисом окрестностей нуля, который удовлетворяет аксиомам Фон Неймана. Исследуются критерии абсолютной p-сходимости рядов в топологическом векторном пространстве. Доказывается, что множество всех абсолютно p-сходящихся $(0 < p < \infty)$ рядов является векторным пространством. Также устанавливается, что если линейное пространство E метризуемо, то множество всех абсолютно p-сходящихся рядов в E также является метризуемым.

Ключевые слова: абсолютная сходимость рядов, базис окрестностей нуля, пространство Фреше, функционал Минковского, уравновешенные множества, поглощающие множества, топологическое векторное пространство.

Основные определения и понятия

Пусть E — линейное пространство. Система τ-подмножеств множества E определяет в E топологию, если в этой системе τ содержится пустое множество $\varnothing$, множество E, объединение множеств любой своей подсистемы и пересечение множеств любой своей конечной подсистемы [1]. Множество E с заданной в нем топологией τ будем называть топологическим пространством. Под топологическим векторным пространством E будем понимать хаусдорфово топологическое векторное пространство [5], то есть для каждой пары различных точек x_1, $x_2 \in E$ существуют открытые множества G_1, G_2 ($x_1 \in G_1$, $x_2 \in G_2$), такие, что $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ [5].

Топология в пространстве E определяется базисом окрестностей нуля E_0, такая, что:

1) для любого $V \in E_0$ существует $U \in E_0$ такое, что $U + V \subset V$;
2) все $V \in E_0$ — поглощающие и уравновешенные;
3) если $\alpha \in E$ $(\alpha \neq 0)$, то существует $U \in E_0$ с $\alpha \in U$.

Заметим, что [1] множество M точек линейного пространства E называется:

- уравновешенным, если $\lambda x \in M$ для каждого $x \in M$ и каждого $\lambda \in R$, для которого $|\lambda| \leq 1$;
- поглощающим, если какова бы ни была точка $x \in E$, существует $\kappa > 0$ такое, что $x \in \lambda M$, когда $|\lambda| \geq \kappa$;
- выпуклым, если $(\lambda x + (1-\lambda)y) \in M$ для любых $x, y \in M$ и любого $\lambda \in (0,1)$.

Топологическое векторное пространство, в котором топология порождается полной инвариантной метрикой, называется пространством Фреше, или Ф-пространством [5].

Определение 1. *Пусть E является банаховым пространством. Тогда ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \tag{1}$$

называется абсолютно p-сходящимся, если сходится

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\alpha_k\|^p, \quad (1 \leq p < \infty).$$

Множество всех абсолютно p-сходящихся рядов обозначим через ФК (k-пространством Фреше).

Определение 2 *[2].* Величина $P_A(x)$ называется функционалом Минковского, если

$$P_A(x) = inf\left\{r : \frac{x}{r} \in A, r > 0\right\},$$

где A — выпуклое тело в пространстве E, ядро которого содержит точку 0.

Определение 3 *[2].* В топогическом векторном пространстве E ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ называется абсолютно p-сходящимся $(0 < p < \infty)$, если для любого выпуклого тела $A \in E_0$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (P_A(\alpha_k))^p < \infty,$$

где $P_A(\alpha_k)$ — функционал Минковского. Под выпуклым телом будем понимать множество A, ядро которого не пусто, то есть если x, $y \in A$, то соединяющий их отрезок также содержится в A.

1. Основные результаты

В этой работе рассмотрим критерии абсолютной p-сходимости рядов вида (1) в топологическом векторном пространстве E. Заметим, что ранее аналогичные вопросы в пространстве L_p рассмотрены в работах С.Б. Стечкина [3], М.Ф. Тимана [4].

Теорема 1. *Для того чтобы ряд (1) был абсолютно p-сходящимся в E, необходимо и достаточно, чтобы для каждой $A \in E_{[0]}$ существовала числовая последовательность $\beta = \beta_k \in \ell_p$ такая, что $\alpha_k \in \beta_k A$ для каждого $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть $A \subset E_0$ — произвольное выпуклое тело. Обозначим через $\beta_k = P_A(\alpha_k)$ и заключаем, что $\{\beta_k\} \in \ell_p \quad (\beta_k > 0)$. В силу определения функционала Минковского можно указать последовательность $\{\gamma_k\}$ такую, что $\gamma_k - \beta_k < 2^{-k}$, где $\gamma_k > \beta_k$, и $\alpha_k \in \gamma_k A$. Так как $\gamma_k < 2^{-k} + \beta_k$, то при $p \geq 1$, применяя неравенство Минковского, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^p < \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \beta_k\right)^p \leq \left\{ \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{kp}}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \right\}^p < \infty.$$

Если же $0 < p < 1$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^p < \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \beta_k\right)^p \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{kp}} + \sum_{k=o}^{\infty} \beta_k^p < \infty.$$

Отсюда вытекает, что $\{\gamma_k\} \in \ell_p \quad (k = 1, 2, ...)$.

Достаточность. По определению функционала Минковского, если $\alpha_k \in \gamma_k A$ с элементами $\gamma_k \in \ell_p \quad (0 < p < \infty)$, то имеем

$$\inf\{\beta > 0 : \alpha_k \in \beta_k A,\ k > 0\} \leq \gamma_k \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{P_A(\alpha_k)\}^p \leq \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^p < \infty.$$

Теорема полностью доказана.

В силу теоремы 1 определение p-сходимости можно сформулировать в следующем виде.

Определение 4. *Ряд* (1) *называется абсолютно p-сходящимся* $(0 < p < \infty)$, *если для каждой $A \in E_{[0]}$ найдется $\beta = \beta_k \in \ell_p$, такие, что $\alpha_k \in \beta_k A$, для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$*

Теорема 2. *Множество всех абсолютно p-сходящихся рядов* $(0 < p < \infty)$ *является векторным пространством.*

Доказательство. 1) Пусть $x = \{\alpha_k\}$, $y = \{\eta_k\}$ и $x, y \in \ell_p(E)$. Для $U \in E_0$ найдем такую $V \in E_0$, что $V + V \subset U$. Тогда найдутся $\beta = \{\beta_k\} \in \ell_p$ и $\gamma = \{\gamma_k\} \in \ell_p$ такие, что $\alpha_k \in \beta_k V$ и $\eta_k \in \gamma_k V$ для $k = 0, 1, \ldots$ Тогда сумма $\alpha_k + \eta_k \in \beta_k V + \gamma_k V \subset \rho_k(V + + V) \subset \rho_k U$, где $\rho_k = \max\{\beta_k, \gamma_k\}$ и $\{\rho_k\} \in \ell_p$. Следовательно, $x + y \in \ell_p(E)$.

2) Пусть $x = (\alpha_k) \in \ell_p(E), a \in R, a \neq 0$ и $U \in E_0$. (Если $a = 0$, то $ax = 0$ и $ax \subset \ell_p E)$). Найдем $\beta = (\beta_k) \in \ell_p$ такую, что $\alpha_k \in \beta_k U$ для всех k.

Так как
$$-1 \leq \frac{a}{|a|} \leq 1,$$
то в силу уравновешенности U,
$$\frac{a}{|a|}\alpha_k \in \beta_k \frac{a}{|a|} U \subset \beta_k U,$$
или
$$a\alpha_k \in |a|\beta_k U,$$
где
$$\sum_{k=0}^{\infty} (|a|\beta_k)^p = |a|^p \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^p < \infty.$$
Из последнего следует, что $ax \in \ell_p(E)$. Теорема 2 доказана.

Множество всех абсолютно p-сходящихся рядов в E будем обозначать через $\ell_p(E)$. Введем в пространство $\ell_p(E)$ топологию. Пусть в E задан базис окрестностей нуля E_0.

Каждой $u \in E_{[0]}$ сопоставим множество $U_{au} = \{x \in \ell_p(E) : \exists(\beta_k \in l_p, \sum \beta_k^p \leq \leq a, \alpha_k \in \beta_k U)\}$.

Теорема 3. *Пространство $\ell_p(E)$ является топологическим векторным пространством с базисом окрестностей нуля*
$$\ell_p(E_0) = \{U_{au}^p : u \in E_0\},$$
где a — положительное рациональное число.

Доказательство. Чтобы доказать теорему, необходимо показать, что выполняются все три аксиомы фон Неймана.

1. Пусть $U_{au}^p \in \ell_p(E_0)$. Для $U \in E_0$ найдем такую $V \in E_0$, что $V + V \subset U$. При $1 \leq p < \infty$ выберем такое $b \in Q_+$ так, чтобы $2^p b \leq a$, а в случае $0 < p < 1 \quad 2b \leq a$. Рассмотрим окрестность нуля $\vartheta_{b\nu}$.

Пусть $z \in \vartheta_{b_v}^p + \vartheta_{bv}^p$, тогда $z = x + y$ с $x, y \in \vartheta_{b\nu}^p$, то есть $\alpha_k \in \gamma_k V$ и $\eta_k \in \nu_k V$, где
$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^p \leq b \quad , \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_k^p \leq b.$$
Тогда $\alpha_k + \eta_k \in \gamma_k V + \vartheta_k V \subset (\gamma_k + \vartheta_k)(V + V) = \beta_k(V + V) \subset \beta_k U$, где
$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^p = \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma_k + \vartheta_k)^p \leq \left\{ \left(\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}^p \leq$$

$$\leq \left(b^{\frac{1}{p}} + b^{\frac{1}{p}}\right)^p = \left(2b^{\frac{1}{p}}\right)^p = 2^p b \leq a \qquad (0 \leq p < 1)$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^p = \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma_k + \vartheta_k)^p \leq \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^p + \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_k^p \leq 2b \leq a \qquad (0 < p < 1).$$

Отсюда следует, что в обоих случаях

$$\beta_k \in \ell_p^+$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^p \leq a.$$

Отсюда вытекает, что $z \in U_{au}^p$. Значит, $\vartheta_{b\nu}^p + \vartheta_{b\nu}^p \subset U_{au}^p$.

Первая аксиома выполняется.

2. Докажем, что множество U_{au}^p является поглощающим множеством. Действительно, пусть $x \in \ell_p(E)$, то есть для каждой $U \in E_0$ найдется $\gamma = \gamma_k \in \ell_p^+$, такая что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^p \leq b < \infty$$

и

$$\alpha_k \in \gamma_k U.$$

Полагая $\beta_k = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} \gamma_k$, будем иметь

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^p \leq a$$

и

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} \alpha_k \in \beta_k U$$

или

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} x \in U_{au}^p.$$

Отсюда следует, что $x \in \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{p}} U_{au}^p$. Значит, множество U_{au}^p является поглощающим.

Теперь докажем, что U_{au}^p — уравновешенное множество. Пусть $x \in U_{au}^p$, то есть

$$\alpha_k \in \beta_k u, \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^p \leq a \qquad (|\beta| \leq 1).$$

Но тогда в силу уравновешенности U, $\beta\alpha_k \in \beta\beta_k U \subset \beta_k U$, и отсюда вытекает $\beta x \in U_{au}^p$. Уравновешенность множества доказана.

3. Поскольку рассматриваем хаусдорфово топологическое векторное пространство, то нам достаточно показать, что если E хаусдорфово, то и $\ell_p(E)$ с базисом окрестностей нуля $\ell_p(E_0)$ тоже хаусдорфово.

Пусть $x, y \in \ell_p(E)$ $(x \neq y)$. Значит, существует число k_0 такое, что $\alpha_{k_0} \neq \eta_{k_0}$, α_{k_0}, $\eta_{k_0} \in E$.

Так как пространство E хаусдорфово, то существуют $U, V \subset E_0$ такое, что

$$(\alpha_{k_0} + U) \cap (\eta_{k_0} + V) = \emptyset. \tag{2}$$

Остается доказать, что и $(x + U_{1u}^p) \cap (y + V_{1\nu}^p) = \emptyset$.

Действительно, если существовал бы элемент $z = \{\alpha_k\} \in \ell_p(E)$ такой, что

$$z = x + u_{1u}^p \quad \text{ и } \quad z = y + \vartheta_{1\nu}^p,$$

то

$$z = x + y, u = \{\omega_k\} \in U_{1u}^p$$

и

$$z = y + \vartheta, \vartheta = \{\omega_k\} \in \vartheta_{1u}^p.$$

Тогда найдутся $\{\beta_k\}, \{\gamma_k\} \in \ell_p^+$ с

$$\sum \beta_k^P \leq 1 \quad \text{ и } \quad \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^p \leq 1$$

такие, что $\omega_k \in \beta_k U$ и $\omega_k \in \gamma_k V$ для всех k. Тогда

$$\theta_{k_0} = \alpha_{k_0} + w_{k_0} \in \alpha_{k_0} + \beta_{k_0} u \subset \alpha_{k_0} + U$$

и

$$\theta_{k_0} = \eta_{k_0} + \omega_{k_0} \in \eta_{k_0} + \gamma_{k_0} V \subset \eta_{k_0} + V.$$

Этот факт противоречит соотношению (2). Поэтому, теорема полностью доказана.

Теорема 4. *Если E метризуемое топологическое векторное пространство, то множество всех абсолютно p-сходящихся рядов в E $\ell_p(E)$ $(0 < p < \infty)$ также является метризуемым.*

Доказательство. Если E метризуемое пространство, то в нем найдется счетный базис окрестностей нуля E_0. Тогда

$$\ell_p(E_0) = \{U_{au}^p : u \in E_0, a \in Q^+\}$$

является счетным базисом окрестностей нуля в $\ell_p(E)$, то есть $\ell_p(E)$ суть метризуемого пространства. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайнберг, М. М. Функциональный анализ / М. М. Вайнберг. — М. : Просвещение, 1979. — 129 с.

2. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1989. — 624 с.

3. Стечкин, С. Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов / С. Б. Стечкин // Матем. сб. — 1951. — Т. 29, № 1. — С. 225–232.

4. Тиман, М. Ф. Об абсолютной сходимости и суммируемости рядов Фурье / М. Ф. Тиман // Сообщ. АН Груз. ССР. — 1961. — Т. 26, № 6. — С. 641–646.

5. Шефер, Х. Топологические векторные пространства / Х. Шефер. — М. : Мир, 1971. — 359 с.

REFERENCES

1. Vaynberg M.M. *Funktsionalnyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Prosveshchenie Publ., 1979. 129 p.
2. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsionalnogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 624 p.
3. Stechkin S.B. Ob absolyutnoy skhodimosti ortogonalnykh ryadov [On the Absolute Convergence of a Orthogonal Series]. *Matem. sb.*, 1951, vol. 29, no. 1, pp. 225-232.
4. Timan M.F. Ob absolyutnoy skhodimosti i summiruemosti ryadov Furye [On the Absolute Convergence and Summability of a Fourier Series]. *Soobshch. AN Gruz. SSR*, 1961, vol. 26, no. 6, pp. 641-646.
5. Shefer Kh. *Topologicheskie vektornye prostranstva* [Topological Vector Spaces]. Moscow, Mir Publ., 1971. 359 p.

ON THE ABSOLUTE CONVERGENCE OF SERIES IN TOPOLOGICAL SPACES

Yusufali Kh. Khasanov

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor, Department of Informatics and Information Systems,
Russian-Tajik Slavonic University
yukhas60@mail.ru
M. Tursunzade St, 30, 734025 Dushanbe, Republic of Tajikistan

Ahliddin N. Davlatov

Lecturer, Department of Algebra and Number Theory,
Tajik State Pedagogical University
Davlatov-ahliddin@mail.ru
Prost. Rudaki, 121, 734025 Dushanbe, Republic of Tajikistan

Abstract. We consider a vector space over a field of real numbers; under a topological vector space we understand a Hausdorff topological vector space. The topology in this space is defined by the basis of the neighborhoods of zero that satisties the Fon Niemann axioms. Here we study the criteria for absolutely ρ-convergence of numerical series in a topological vector space. It is proved that the set of all absolutely ρ-convergent $(0 < \rho < \infty)$ series is a vector space. It is also establies that if a linear space E is metrizable, then the set of all absolutely ρ-convergent series in E is also metrizable.

Definition 1. Let there be a Banach space. Then the series

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$$

is called absolutely p-convergent if the series converges the row

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\alpha_k\|^{\rho} < \infty \quad (1 \leq \rho < \infty).$$

Theorem 1. In order for the raw $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ to be absolutely p-convergent in E, it is necessary and sufficient that for each $A \in E_0$ exists a numerical sequence $\gamma_k \in \ell^\rho$ such that $\alpha_k \in A$ for each $k = 0, 1, 2, ...$

By virtue of theorem 1, the definition of ρ-convergence can be formulated in the following form:

Definition 2. The series $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|\alpha_k\|^\rho < \infty \quad (1 \leq \rho < \infty)$ is called absolutely p-convergent $(0 < \rho < \infty)$, if for each $A \in E_0$ there are $\gamma_k \in \ell_\rho$, such that $\alpha_k \in A$ for all $k = 0, 1, 2, \ldots$

Theorem 2. The set of all absolutely ρ-convergent series $(0 < \varrho < \infty)$ is a vector space.

Theorem 3. The space $\ell_\rho(E)$ is a topological vector space with the basis of the neighborhoods of zero

$$\ell_\rho(E_0) = \{U^\rho_{au} : u \in E_0\},$$

where a is a positive rational number.

Theorem 4. If E is a metrizable topological vector space, then the set of all absolutely ρ-convergent series $\ell_\rho(E)$ $(0 < \rho < \infty)$ in the space E is also metrizable.

Key words: absolute convergence of series, base of neighborhoods of zero, space Frechet, Minkowski functional, balanced sets, swallowing multitudes, topological vector space.