

DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.volsu.2022.4.2>УДК 517.95  
ББК 22.161.1Дата поступления статьи: 02.11.2022  
Дата принятия статьи: 29.11.2022

## КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С СИНГУЛЯРНОЙ ЛИНИЕЙ

**Павел Леонидович Шабалин**

Доктор физико-математических наук, доцент,  
профессор кафедры высшей математики,  
Казанский государственный архитектурно-строительный университет  
[pavel.shabalin@mail.ru](mailto:pavel.shabalin@mail.ru)  
<https://orcid.org/0000-0002-8764-6132>  
ул. Зеленая, 1, 420043 г. Казань, Российская Федерация

**Аннотация.** В данной работе изучается неоднородная краевая задача Гильберта с конечным индексом и краевым условием на вещественной оси для одного обобщенного уравнения Коши — Римана с сингулярным коэффициентом. Получена структурная формула общего решения этого уравнения при ограничениях, приводящих к бесконечному индексу сопутствующей краевой задачи Гильберта для аналитических функций. Исследование разрешимости последней является основой для решения краевой задачи для обобщенных аналитических функций.

**Ключевые слова:** краевая задача Гильберта, обобщенные аналитические функции, сингулярные линии, бесконечный индекс, целые функции уточненного нулевого порядка.

### Введение

Обозначим:  $z = x + iy = re^{i\theta}$  — комплексная переменная,  $E = \{z : \Im z > 0\}$  — верхняя полуплоскость,  $\Gamma = \{z : \Im z = 0\}$  — вещественная ось,  $L = \{z : \Re z = 0, \Im z > 0\}$  — мнимая полуось. В области  $E$  рассмотрим частный случай обобщенной системы Коши — Римана

$$\partial_{\bar{z}}U - A(z)U = F(z), \quad A(z) = \frac{a(z)}{\bar{z} + z}, \quad a(z), F(z) \in C(\bar{E} \setminus L). \quad (1)$$

Для решений  $U(z)$  этой системы в верхней полуплоскости исследуем задачу Гильберта с краевым условием на  $\Gamma$ , непрерывными коэффициентом и правой частью. Решение краевой задачи проводим с использованием структурной формулы общего решения системы (1). Эту формулу выводим при достаточно общих ограничениях, допускающих бесконечный индекс сопутствующей задачи Гильберта для аналитических функций. Решение и исследование разрешимости последней задачи составляет вторую часть данной работы.

Теория обобщенных систем Коши — Римана в ограниченной или неограниченной области  $G$  с коэффициентами из  $L^p(G)$ ,  $p > 2$ , или  $L^{p,2}(G)$ ,  $p > 2$ , и краевых задач для  $U(z)$  изложена в монографии [2]. Изучению обобщенной системы Коши — Римана, коэффициенты которой обращаются в бесконечность степенного порядка не ниже первого на некоторой линии  $L$  (сингулярной линии) и краевых задач для ее решений, посвящены работы [4–6; 8; 16] и др.

В работе А.Б. Расулова и А.П. Солдатова [11] предложен метод построения обобщенного решения для системы вида (1) с сингулярной или сверхсингулярной линией в конечной односвязной области  $G$  с гладкой границей, основанный на купировании линии  $L$  семейством областей, исчерпывающих  $G$ , с последующим предельным переходом в последовательности построенных классических решений. Под обобщенным решением уравнения (1) будем понимать функцию  $U \in C(\bar{E} \setminus L)$ , имеющую первую обобщенную в смысле Соболева производную  $\partial_{\bar{z}}$  класса  $L^p(K)$ ,  $p > 2$  в каждом компакте  $K \supset G$  и удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду.

Следует отметить, что в приведенных выше работах рассматривались задачи, приводящиеся к краевым задачам теории аналитических функций с конечным индексом. А.Б. Расулов обратил внимание на то, что краевая задача с конечным индексом для обобщенных аналитических функций с сингулярной линией при решении может трансформироваться в аналогичную задачу теории аналитических функций, но с бесконечным индексом. Эта ситуация описана в работе [7] для задачи Римана на полуокружности и задачи Римана на гладком замкнутом контуре [9]. Приведены формулы общего решения и обсуждается разрешимость краевых задач. Поскольку решение краевой задачи для обобщенных аналитических функций может быть сведено к решению аналогичной задачи для аналитических функций с бесконечным индексом, то требуется разработать метод решения последней для заданной особенности индекса.

Исследованию задачи Гильберта с бесконечным индексом посвящено довольно много работ (см., например, [1; 12; 15]). В основном все результаты получены в случае, когда задача имеет только одну точку завихрения. Случай задачи Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка и конечным числом точек завихрения рассмотрен в работе [14] для конечной области.

### 1. Решение эллиптической системы

Следуя [11], будем предполагать, что для  $A(z)$  существует такая аналитическая в  $E$ , ограниченная в  $\bar{E}$  функция  $a_0(z)$ , что

$$A_0(z) := \frac{a(z) - a_0(z)}{\bar{z} + z} \in L^{p,2}(E), \quad p > 2. \quad (2)$$

Граничные значения функции  $a_0(z)$ , то есть функции  $a_0(x)$ , будем считать непрерывными по Гельдеру на интервалах  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, +\infty)$ , включая концы, в которых эти

функции имеют конечные односторонние чисто мнимые пределы. Кроме того, на функции  $a_0(z)$  дополнительно налагаем следующие ограничения:

$$|a_0(z) - a_0(-\bar{z})| \leq K(|z + \bar{z}|^\alpha), \quad x \rightarrow 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad y > 0; \quad (3)$$

$$a_0(z) = O(|z|^{-\gamma}), \quad |z| \rightarrow +\infty, \quad \gamma > 0, \quad y > 0; \quad (4)$$

$$a_0(z) = O(|z|^\gamma), \quad |z| \rightarrow 0, \quad \gamma > 0, \quad y > 0. \quad (5)$$

В отличие от [11] мы не требуем непрерывности  $a_0(z)$  на  $\Gamma$  и обращения в нуль этой функции в точках пересечения линий  $\Gamma$  и  $L$ . Эти изменения приведут к случаю бесконечного индекса при редукции задачи Гильберта для обобщенной аналитической функции к аналогичной задаче теории аналитических функций.

Выведем формулу общего решения уравнения (1) в области  $E$  методом из работы [11]. Обозначим  $\gamma_\varepsilon$  полуокружность в верхней полуплоскости с центром в начале координат радиуса  $1/\varepsilon$ ,  $\varepsilon$  — малое положительное число, и рассмотрим области  $E_\varepsilon^\pm = E \cap \{z : \pm \Re z > \varepsilon, |z| < 1/\varepsilon\}$ . Теперь введем открытое множество  $E_\varepsilon = E_\varepsilon^+ \cup E_\varepsilon^-$ . Граница области  $E_\varepsilon^+$  состоит из отрезка вещественной оси  $\Gamma_\varepsilon^+$ , вертикального отрезка  $L_\varepsilon^+ = \{z : z = \varepsilon + iy, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\}$  и дуги  $\gamma_\varepsilon^+$  полуокружности  $\gamma_\varepsilon$ . Аналогичные обозначения введем для участков границы  $E_\varepsilon^-$ .

Обозначим символом  $T_\varepsilon A$  интегральный оператор Векуа по объединению областей  $E_\varepsilon$ . Нам нужно убедиться, что  $(T_\varepsilon A)(z)$ ,  $z \in K$ , равномерно сходится при  $\varepsilon \rightarrow 0$  к пределу  $\Omega(z)$  на любом компакте  $K$ ,  $K \in E^- \cup E^+$ , где  $E^\pm = E \cap \{z : \pm \Re z > 0\}$ . Следуя [11], представим  $T_\varepsilon A$  в виде

$$(T_\varepsilon A)(z) = (T_\varepsilon A_0)(z) - I_\varepsilon(z), \quad I_\varepsilon(z) = \frac{1}{\pi} \int_{E_\varepsilon} \frac{a_0(\zeta)}{\bar{\zeta} + \zeta} \cdot \frac{d_2 \zeta}{\zeta - z},$$

причем последний интеграл понимаем в смысле

$$I_\varepsilon(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{E_{\varepsilon, \delta}} \frac{a_0(\zeta)}{\bar{\zeta} + \zeta} \cdot \frac{d_2 \zeta}{\zeta - z}, \quad E_{\varepsilon, \delta} = E_\varepsilon \cap \{|\zeta - z| \geq \delta\}.$$

Входящий в правую часть равенства интеграл преобразуем по формуле Грина

$$\frac{1}{\pi} \int_{E_{\varepsilon, \delta}} \frac{a_0(\zeta)}{\bar{\zeta} + \zeta} \cdot \frac{d_2 \zeta}{\zeta - z} = -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\partial E_\varepsilon^+} + \int_{\partial E_\varepsilon^-} + \int_{|z-t|=\delta} \right) \frac{a_0(t) \ln |t + \bar{t}|}{t - z} dt.$$

После перехода к пределу по  $\delta \rightarrow 0$  получим

$$I_\varepsilon(z) = -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\partial E_\varepsilon^+} + \int_{\partial E_\varepsilon^-} \right) \frac{a_0(t) \ln |t + \bar{t}|}{t - z} dt - a_0(z) \ln |z + \bar{z}|.$$

Рассмотрим в  $E^+$  область  $E_1^+$ , ограниченную отрезком вещественной оси  $\Gamma_1^+ = \{z = x, 1 \leq x \leq 1/\varepsilon\}$ , вертикальным отрезком  $L_1^+ = \{z : z = 1 + iy, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\}$  и частью  $\gamma_1^+$  дуги  $\gamma_\varepsilon^+$ . Аналогичную область  $E_{-1}^-$  введем в  $E^-$ . Поскольку

начало координат не принадлежит областям  $E_\varepsilon^+$ ,  $E_\varepsilon^-$ , формулу для  $I_\varepsilon(z)$  перепишем так:

$$I_\varepsilon(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial E_\varepsilon^+} \frac{\ln|t+\bar{t}|}{t-z} a_0(t) dt + \int_{\partial E_1^+} \frac{\ln 2t}{t} a_0(t) dt - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial E_\varepsilon^-} \frac{\ln|t+\bar{t}|}{t-z} a_0(t) dt + \int_{\partial E_{-1}^-} \frac{\ln(-2t)}{t} a_0^+(t) dt - a_0(z) \ln|z+\bar{z}|. \quad (6)$$

Пусть  $z = x + iy$  — фиксированная точка из компакта  $K$  и  $z \in E_\varepsilon^+$ . Выберем  $\varepsilon$  настолько малым, чтобы выполнялись неравенства  $|z| < 1/\varepsilon$ ,  $\Re z > \varepsilon$ . Рассмотрим входящие в правую часть формулы (6) криволинейные интегралы. Для интеграла по дуге окружности  $\gamma_\varepsilon^+$  с использованием условия (4) выводим оценку

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon^+} \frac{a_0(t) \ln|t+\bar{t}|}{t-z} dt \right| = \left| \int_0^{\arccos \varepsilon^2} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon} \cos \theta\right) \frac{a\left(\frac{1}{\varepsilon} e^{i\theta}\right)}{\frac{1}{\varepsilon} e^{i\theta} - z} \cdot \frac{e^{i\theta} d\theta}{\varepsilon} \right| \leq \frac{C\pi\varepsilon^\gamma}{2(1-\varepsilon|z|)} \ln \frac{2}{|\varepsilon|}.$$

Аналогичные неравенства получаем и для остальных интегралов по дугам полуокружности  $\gamma_\varepsilon$ . Таким образом, имеет место следующее асимптотическое равенство

$$\int_{\gamma_\varepsilon^+ + \gamma_\varepsilon^-} a_0(t) \frac{\ln|t+\bar{t}|}{t-z} dt + \int_{\gamma_1^+ + \gamma_{-1}^-} \frac{\ln(2|t|)}{t} dt = O\left(\varepsilon^\gamma \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (7)$$

Теперь рассмотрим криволинейный интеграл из (6) по  $L_\varepsilon^+ \cup L_\varepsilon^-$ , который представим в виде:

$$\left( \int_{L_\varepsilon^-} + \int_{L_\varepsilon^+} \right) \frac{a_0(t) \ln|t+\bar{t}|}{t-z} dt = i \ln(2\varepsilon) \int_0^{\sqrt{1-\varepsilon^4}/\varepsilon} \left[ \frac{a_0(-\varepsilon + i\eta)}{-\varepsilon + i\eta - z} - \frac{a_0(\varepsilon + i\eta)}{\varepsilon + i\eta - z} \right] d\eta.$$

Отсюда с привлечением условия (3) и ограниченности функции  $a_0(t)$  выводим

$$\left( \int_{L_\varepsilon^-} + \int_{L_\varepsilon^+} \right) \frac{a_0(t) \ln|t+\bar{t}|}{t-z} dt = O\left(\varepsilon^\alpha \ln^2 \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (8)$$

Наконец, рассмотрим

$$\int_{L_1^+ + L_{-1}^-} \frac{a_0(t) \ln(2t)}{t} dt = \int_0^{\sqrt{1-\varepsilon^2}/\varepsilon} \frac{a_0(1+i\eta) \ln(2+i2\eta)}{1+i\eta} d\eta - \int_0^{\sqrt{1-\varepsilon^2}/\varepsilon} \frac{a_0(-1+i\eta) \ln(-2+i2\eta)}{-1+i\eta} d\eta.$$

В силу ограниченности функции  $a_0(z)$  и условия (4) сходятся несобственные интегралы

$$\int_0^\infty \frac{a_0(1+i\eta) \ln(2+i2\eta)}{1+i\eta} d\eta = c_1, \quad \int_0^\infty \frac{a_0(-1+i\eta) \ln(-2+i2\eta)}{-1+i\eta} d\eta = c_2,$$

поэтому

$$\int_{\partial E_1^+} \frac{\ln 2t}{t} a_0(t) dt + \int_{\partial E_{-1}^-} \frac{\ln(-2t)}{t} a_0(t) dt = c_1 - c_2 + O\left(\varepsilon^\alpha \ln^2 \frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (9)$$

В равенстве (6), принимая во внимание оценки (7), (8), (9), переходим к пределу по  $\varepsilon \rightarrow 0$  при фиксированном  $z \in K$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(z) &= -\frac{z}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-1} \frac{a_0(t) \ln |2t|}{t(t-z)} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{a_0(t) \ln |2t|}{t-z} dt - \\ &- \frac{z}{2\pi i} \int_{-1}^{+\infty} \frac{a_0(t) \ln |2t|}{t(t-z)} dt - a_0(z) \ln |z + \bar{z}| + c_1 - c_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Для интеграла типа Коши с плотностью, имеющей разрыв логарифмического порядка в начале координат, справедлива асимптотическая формула И.М. Мельника (см.: [3, с. 74])

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{a_0(t) \ln |2t|}{t-z} dt &= \frac{a_0(0-) - a_0(0+)}{4\pi i} \ln^2 \frac{1}{z} - \\ &- \frac{a_0(0+) + a_0(0-)}{2} \ln \frac{1}{z} + O(1), \quad z \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь под  $\ln z$  понимаем однозначную ветвь на разрезанной вдоль  $\Gamma^+$  плоскости, принимающую на левой стороне разреза при движении против часовой стрелки значение  $\ln t$ . Вблизи бесконечно удаленной точки имеем

$$\begin{aligned} \frac{z}{2\pi i} \left( \int_{-\infty}^{-1} + \int_{+1}^{+\infty} \right) \frac{a_0(t) \ln |2t|}{t(t-z)} dt &= \frac{a_0(-\infty) - a_0(+\infty)}{4\pi i} \ln^2 z + \\ &+ \frac{a_0(+\infty) + a_0(-\infty)}{2} \ln z + O(1), \quad |z| \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что регулярные составляющие в правых частях формул (11), (12) являются голоморфными в соответствующих областях функциями.

Итак, мы доказали, что при условиях (3), (4) функция  $I_\varepsilon(z)$  равномерно сходится на компакте к пределу (10). Следовательно (см. [11]), обобщенное решение уравнения (1) в области  $E$  в классе функций с ограниченным произведением  $Ue^{-\Omega}$  задается формулами вида

$$U(z) = e^{\Omega(z)} [(T(e^{-\Omega}F))(z) + \phi(z)], \quad (13)$$

где функция

$$\Omega(z) = (TA_0)(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{a_0(t) \ln |t + \bar{t}|}{t-z} dt + a_0(z) \ln |z + \bar{z}|; \quad (14)$$

интегральный оператор Векуа

$$(TA_0)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_E \frac{A_0(\zeta) d_2\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in E^+,$$

действует [2, с. 44] из  $L^{p,2}(E)$ ,  $p > 2$ , в класс Гельдера  $H(\bar{E})$ ; функция  $\phi(z)$  аналитична в  $E$ . Итак, доказано следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть коэффициент  $A(z)$  уравнения (1) удовлетворяет условиям (3)–(5), то общее решение уравнения (1) в области  $E$  в классе функций с ограниченным произведением  $Ue^{-\Omega}$  задается формулами (13), (14),  $\phi(z)$  — произвольная аналитическая функция в  $E \setminus L$ .

Обозначим односторонние пределы функции  $a_0(x)$  в начале координат и в бесконечности символами:  $a_0(0+) = i\mu_+$ ,  $a_0(0-) = i\mu_-$ ,  $a_0(+\infty) = i\nu_+$ ,  $a_0(-\infty) = i\nu_-$ . В соответствии с равенствами (14), (11), (12) для функций  $\Omega(z)$  вблизи начала координат справедлива формула

$$\Omega(z) = \frac{\mu_- - \mu_+}{4\pi} \ln^2 \frac{1}{z} - i \frac{\mu_- + \mu_+}{2} \ln \frac{1}{z} + a_0(z) \ln |z + \bar{z}| + O(1), \quad z \rightarrow 0,$$

и вблизи бесконечно удаленной точки — формула

$$\Omega(z) = \frac{\nu_- - \nu_+}{4\pi} \ln^2 z + i \frac{\nu_- + \nu_+}{2} \ln z + a_0(z) \ln |z + \bar{z}| + O(1), \quad |z| \rightarrow +\infty.$$

Отсюда выводим

$$\Omega(t) = \begin{cases} \frac{\mu_- - \mu_+}{4\pi} \ln^2 \frac{1}{|t|} - i2\mu_- \ln \frac{1}{|t|} + O(1), & t \rightarrow 0-, \\ \frac{\mu_- - \mu_+}{4\pi} \ln^2 \frac{1}{t} - i \frac{3\mu_+ + \mu_-}{2} \ln \frac{1}{t} + O(1), & t \rightarrow 0+, \end{cases} \quad (15)$$

$$\Omega(t) = \begin{cases} \frac{\nu_- - \nu_+}{4\pi} \ln^2 |t| + i2\nu_- \ln |t| + O(1), & t \rightarrow -\infty, \\ \frac{\nu_- - \nu_+}{4\pi} \ln^2 t + i \frac{3\nu_+ + \nu_-}{2} \ln t + O(1), & t \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (16)$$

Для обобщенного решения уравнения (1), заданного формулами (13), (14), где  $\phi(z)$  — произвольная аналитическая функция в  $E$ , непрерывная в  $\bar{E}$ , рассмотрим в полуплоскости  $E$  задачу Гильберта с краевым условием на вещественной оси

$$\Re[e^{-i\alpha(t)}U(t)] = f(t), \quad t \in \Gamma, \quad (17)$$

непрерывными по Гельдеру всюду на  $\Gamma$ , включая бесконечно удаленную точку, коэффициентом  $e^{i\alpha(t)}$  и правой частью  $f(t)$ . Подставляя функцию (13) в краевое условие (17), получим краевое условие задачи Гильберта для определения аналитической в полуплоскости функции  $\phi(z)$ :

$$\begin{aligned} \Re[e^{i\alpha^*(t)}\phi(t)] &= f^*(t), \quad t \in \Gamma, \quad t \neq 0, t \neq \infty, \quad \alpha^*(t) = \alpha(t) + \Im\Omega(t), \\ f^*(t) &= f(t)e^{-\Re\Omega(t)} - \Re[e^{i\alpha^*(t)}(T(e^{-\Omega}F))(t)]. \end{aligned} \quad (18)$$

Из формул (15), (16) выводим следующие равенства:

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 2\nu_- \ln |t + i| + \varphi(t), & t \in (-\infty, -1), \\ -2\mu_- \ln \left| \frac{1}{t} + i \right| + \varphi(t), & t \in (-1, 0), \\ \frac{-\mu_- - 3\mu_+}{2} \ln \left| \frac{1}{t} + i \right| + \varphi(t), & t \in (0, 1), \\ \frac{\nu_- + 3\nu_+}{2} \ln |t + i| + \varphi(t), & t \in (1, +\infty), \end{cases} \quad (19)$$

$$f^*(t) = \begin{cases} f(t) \exp\left\{\frac{\nu_+ - \nu_-}{4\pi} \ln^2 |t|\right\} + \psi(t), & t \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty), \\ f(t) \exp\left\{\frac{\mu_+ - \mu_-}{4\pi} \ln^2 \frac{1}{|t|}\right\} + \psi(t), & t \in (-1, 0) \cup (0, 1), \end{cases}$$

в которых функции  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  удовлетворяют условию Гельдера всюду на  $\Gamma$ , включая бесконечно удаленную точку, то есть принадлежат классу  $H_\Gamma$ . От функции  $f(t)$  требуем дополнительно выполнения условий

$$\begin{aligned} f(t) \exp\left\{\frac{\nu_+ - \nu_-}{4\pi} \ln^2 |t|\right\} &= o(1), & |t| \rightarrow \infty, \\ f(t) \exp\left\{\frac{\mu_+ - \mu_-}{4\pi} \ln^2 |t|\right\} &= o(1), & |t| \rightarrow 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Таким образом, задачу (17) сводим к краевой задаче Гильберта (18) для аналитических функций с бесконечным индексом и двумя точками завихрения в начале координат и в бесконечно удаленной точке.

## 2. Решение задачи Гильберта

### 2.1. Однородная задача

Вначале рассмотрим соответствующую (18) однородную задачу. Требуется найти аналитическую и ограниченную в полуплоскости  $E$  функцию  $\phi(z)$ , по краевому условию

$$\Re[e^{i\alpha^*(t)} \phi(t)] = 0, \quad t \in \Gamma \setminus (\{0\} \cup \{\infty\}), \tag{21}$$

в котором для  $\alpha^*(t)$  справедливы формулы (19). Наряду с задачей (21) рассмотрим две краевые задачи для аналитических в  $E$  функций, с одной точкой завихрения каждая:

$$\Re[e^{i\alpha_0^*(t)} \phi_0(t)] = 0, \quad \alpha_0^*(t) = \begin{cases} -2\mu_- \ln\left|\frac{1}{t} + i\right| + \varphi(t), & t \in (-1, 0), \\ \frac{-\mu_- - 3\mu_+}{2} \ln\left|\frac{1}{t} + i\right| + \varphi(t), & t \in (0, 1), \\ \varphi(t), & |t| > 1, \end{cases} \tag{22}$$

$$\Re[e^{i\alpha_1^*(t)} \phi_1(t)] = 0, \quad \alpha_1^*(t) = \begin{cases} 2\nu_- \ln|t + i| + \varphi(t), & t \in (-\infty, -1), \\ \varphi(t), & |t| \leq 1, \\ \frac{\nu_- + 3\nu_+}{2} \ln|t + i| + \varphi(t), & t \in (1, +\infty). \end{cases} \tag{23}$$

В работе [14] доказано, что однородная краевая задача Гильберта (21) с двумя точками завихрения логарифмического порядка разрешима в классе аналитических в  $E$  и ограниченных в  $\bar{E}$  функций  $\phi(z)$ , если и только если разрешимы в классе аналитических в  $E$  и ограниченных в  $\bar{E}$  функций обе однородные задачи Гильберта (22), (23), с

одной точкой завихрения логарифмического порядка каждая. При этом общее решение задачи (21) по существу можно представить в виде произведения решений задач (22) и (23). Задача (23) хорошо изучена (см., например, работы [1; 15]). Возьмем формулу общего решения задачи (23) из статьи А.Г. Алехно [1], которая в наших обозначениях будет выглядеть так

$$\Phi_1(z) = -ie^{R_1(z)+\Gamma_1(z)}F_1(z), \quad (24)$$

где

$$R_1(z) := \frac{3}{4\pi}(\nu_+ - \nu_-) \ln^2(z+i) - i\frac{3\nu_+ + \nu_-}{\pi} \ln(z+i),$$

$$\Gamma_1(z) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h_1(t)dt}{t-z}, \quad h_1(t) := -\alpha_1^*(t) - \Im R_1(t), \quad h_1(t) \in H_\Gamma.$$

При этом формула (24) содержательна, если  $\nu_+ - \nu_- \leq 0$ . Именно,

- а) если  $\nu_- - \nu_+ > 0$ , то задача (23) имеет бесконечное множество ограниченных решений, которые задаются формулой (24), где  $F_1(z)$  — сужение на верхнюю полуплоскость произвольной целой функции уточненного нулевого порядка  $\rho(r) = \ln \ln^2 r / \ln r$ , принимающей на  $\Gamma$  действительные значения и удовлетворяющей неравенству

$$|F_1(t)| \leq C \exp \left\{ \frac{3(\nu_+ - \nu_-)}{4\pi} \ln^2 |t+i| \right\}, \quad C = \text{const}, \quad t \in \Gamma; \quad (25)$$

- б) если  $\nu_- - \nu_+ = 0$ , то задача имеет единственное решение вида  $\Phi_1(z) = -iAe^{\Gamma(z)}$ ,  $A = \text{const}$ ,  $\Im A = 0$ .

При  $\nu_- - \nu_+ < 0$  задача (23) не имеет решений в классе ограниченных аналитических функций.

Формула общего решения и картина разрешимости однородной задачи (22) получается из формулы (22) и картины разрешимости задачи (23) при помощи конформного автоморфизма  $\zeta(z) = -1/z$  полуплоскости:

$$\Phi_0(z) = -ie^{R_0(z)+\Gamma_0(z)}F_0(z),$$

где

$$R_0(z) := \tilde{R} \circ \zeta(z), \quad \tilde{R}(\zeta) := \frac{3}{4\pi}(\mu_- - \mu_+) \ln^2(\zeta+i) + i\frac{\mu_-}{\pi} \ln(\zeta+i),$$

$$\Gamma_0(z) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h_0(t)dt}{t-z}, \quad h_0(t) := -\alpha_0^*(t) - \Im R_0(t), \quad h_0(t) \in H_\Gamma,$$

$F_0(z)$  — аналитическая в  $E$  функция, ограниченная всюду, кроме окрестности точки  $t = 0$ , в которой имеет рост не больше, чем  $C_1 e^{C_2 \ln^2 |z^{-1}+i|}$ , и на  $\Gamma$  удовлетворяющая условиям

$$\Im F_0(t) = 0, \quad |F_0(t)| \leq C \exp \left\{ \frac{3(\mu_- - \mu_+)}{4\pi} \ln^2 |t^{-1} + i| \right\}.$$

Картина разрешимости задачи (22) такая же, как у задачи (23).



С учетом вышесказанного, при выполнении условий

$$\begin{cases} \mu_- - \mu_+ \geq 0, \\ \nu_+ - \nu_- \geq 0, \end{cases} \quad (26)$$

запишем формулу общего решения однородной задачи (21):

$$\Phi(z) = -ie^{R_0(z)+R_1(z)}e^{\Gamma(z)}F(z), \quad \Gamma(z) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h_0(t) + h_1(t)}{t - z} dt, \quad (27)$$

$F(z)$  — аналитическая в  $E$  функция, удовлетворяющая ограничению роста

$$|F(z)| < C_1 e^{C_2(\ln^2 |z^{-1}+i| + \ln^2 |z+i|)}, \quad (28)$$

и на  $\Gamma$ - условиям:

$$\Im F(t) = 0, \quad |F(t)| \leq C \exp \left\{ \frac{3(\mu_- - \mu_+)}{4\pi} \ln^2 \left| \frac{1}{t} + i \right| + \frac{3(\nu^+ - \nu^-)}{4\pi} \ln^2 |t + i| \right\}. \quad (29)$$

При этом, если хотя бы одно неравенство в (26) строгое, то однородная краевая задача Гильберта (21) имеет бесконечное множество решений вида (27). В противном случае решение задачи единственно с точностью до постоянного вещественного сомножителя и получается по формуле (27), в которой нужно взять  $F(z) = A$ ,  $A = \text{const}$ . Если условие (30) не выполнено, то задача (21) не разрешима в классе ограниченных аналитических функций.

## 2.2. Неоднородная задача

Перепишем краевое условие (18) неоднородной задачи в виде

$$\Re \left[ e^{-\Gamma^+(t)} e^{-(R_0(t)+R_1(t))} \Phi(t) \right] = f^*(t) e^{-\Gamma^s(t)} |e^{-(R_0(t)+R_1(t))}|, \quad (30)$$

где

$$\Gamma^s(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h_0(\tau) + h_1(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Будем считать, что однородная задача (21) разрешима, что эквивалентно разрешимости задач (22), (23). Нам понадобится каноническое решение однородной задачи, (21), то есть ограниченное решение, для которого входящая в формулу (27) функция  $F(z)$  кроме условий (28), (29) дополнительно удовлетворяет ограничениям

$$F(t) \neq 0; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|e^{-(R_0(t)+R_1(t))}|}{F(t)} = m, \quad 0 < m < \infty; \quad \frac{|e^{-(R_0(t)+R_1(t))}|}{F(t)} \in H_\Gamma. \quad (31)$$

При этом функцию  $F(z)$  можно искать в виде  $\tilde{F}(z) = \tilde{F}_0(z)\tilde{F}_1(z)$ . Для построения  $\tilde{F}_1(z)$  возьмем целую функцию

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\zeta}{r_k e^{i\varphi_1}} \right)$$

с произвольно фиксированным  $\varphi_1$ ,  $0 < \varphi_1 < \pi$ , для которой через  $n(r)$  обозначим число нулей в круге  $|z| < r$ . Следуя [15], считающую функцию определим формулой

$$n(r) = \begin{cases} E(1/2 + \lambda_1 \ln r), & r \geq 1, \\ 0, & 0 < r < 1, \end{cases}$$

где  $E(t)$  — целая часть числа  $t$ , то есть  $r_k = e^{((k-1/2)/\lambda_1)}$ , фиксированную величину  $\lambda_1 > 0$  выберем позже. Для целой функции

$$\tilde{F}_1(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r_k e^{i\varphi_j}}\right) \left(1 - \frac{z}{r_k e^{-i\varphi_j}}\right), \quad r_k = e^{((k-1/2)/\lambda_1)}, \quad (32)$$

в [14] для функции (32) доказаны формулы

$$\ln \tilde{F}_1(z) = \lambda_1 \ln^2 |z| + O(\ln |z|), \quad |z| \rightarrow +\infty, \quad (33)$$

$$\ln |\tilde{F}_1(t)| = \begin{cases} \ln^2 t \left[ \lambda_1 + 2\pi^2 \lambda_0 \left( -\frac{\varphi_1^2}{2\pi^2} + \frac{\varphi_1}{\pi} - \frac{1}{3} \right) \ln^{-1} t + r_1(t) \right], & t > 0, \\ \ln^2 |t| \left[ \lambda_1 + \pi^2 \lambda_0 \left( -\frac{\varphi_1^2}{\pi^2} + \frac{1}{3} \right) \ln^{-1} |t| + r_2(t) \right], & t < 0. \end{cases} \quad (34)$$

Отметим, что  $r_1(t) = O(\ln^{-2} t)$ ,  $t \rightarrow +\infty$ ,  $r_2(t) = O(\ln^{-2} |t|)$ ,  $t \rightarrow -\infty$  и функции  $r_1(t)$ ,  $r_2(t)$  непрерывны по Гельдеру в области своего определения (см.: [14; 15]). Из формулы (33) следует, что целая функция  $F_1(z)$  имеет уточненный нулевой порядок  $\rho(r) = \ln \ln^2 r / \ln r$ , ее мнимая часть обращается в нуль навещественной оси (по построению) и в силу (34) при  $\lambda_1 = 3(\nu^+ - \nu^-)/4\pi$  удовлетворяет условиям (29), (31). Для построения функции  $\tilde{F}_0(z) = \tilde{F} \circ \zeta(z)$  определим  $\tilde{F}(\zeta)$  в верхней полуплоскости из формулы (33), заменив  $\lambda_1$  на  $\lambda_0 = 3(\mu^+ - \mu^-)/4\pi$ . Теперь мы определим функцию  $\tilde{F}(z) = \tilde{F}_0(z)\tilde{F}_1(z)$  и по формуле (27) — каноническое решение однородной задачи (25)

$$\tilde{\phi}(z) = -ie^{i\Gamma(z)} e^{R_0(z)+R_1(z)} \tilde{F}(z).$$

Краевое условие неоднородной задачи (30) после деления на  $\tilde{F}(t)$  выделения в знаменателе левой части функции  $\tilde{\phi}(t)$  примет вид

$$\Re \left[ -i \frac{\phi(t)}{\tilde{\phi}(t)} \right] = c(t), \quad c(t) = \frac{f^*(t) |e^{-R_0(t)-R_1(t)}|}{e^{\Gamma^s(t)} \tilde{F}(t)}.$$

Будем искать частное решение неоднородной задачи, имеющее те же последовательности нулей, что и функция  $\tilde{F}(z)$  и, следовательно,  $\tilde{\phi}(z)$ . Поэтому отношение  $\phi(z)/\tilde{\phi}(z)$  для искомой функции будет аналитической и ограниченной в  $E$  функцией. Поскольку  $c(t) \in H_\Gamma$ , функция  $-i\phi(z)/\tilde{\phi}(z)$  представима по формуле Шварца, то искомое частное решение представимо формулой

$$\phi(z) = -ie^{\Gamma(z)} e^{R_0(z)+R_1(z)} \tilde{F}(z) \frac{1}{\pi} \int_L \frac{c_1(t) dt}{t-z}.$$

Последняя формула дает частное решение неоднородной краевой задачи (30), общее решение которой представим в виде суммы общего решения соответствующей однородной задачи и данного частного решения:

$$\phi(z) = -ie^{\Gamma(z)} e^{R_0(z)+R_1(z)} \left( F(z) + \tilde{F}(z) \frac{1}{\pi} \int_L \frac{c_1(t)dt}{t-z} \right). \quad (35)$$

Итак, справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** Если выполнены условия (20), (29), то неоднородная задача (30) разрешима в классе ограниченных аналитических в  $D$  функций. Общее решение задачи представляется как сумма общего решения (27) однородной задачи и частного решения (35) неоднородной задачи.

Обратимся теперь к задаче (17) для обобщенного решения (13) системы (1). Из доказанной теоремы сразу вытекает следующее утверждение.

**Теорема 3.** Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия (2)–(5) и  $(e^{-\Omega}F)(z) \in L^{p,2}(\bar{E})$ ,  $p > 2$ , односторонние пределы на бесконечности функции  $a_0(x)$  удовлетворяют системе неравенств (26). Тогда, если хотя бы одно из неравенств (26) строгое, а правая часть краевого условия (17) имеет асимптотику (20), то задача Гильберта (17) имеет бесконечное множество решений  $U(z)$ , определенных формулой (12) с  $\phi(z)$  в виде (35). Если же в (26)  $\nu^- - \nu^+ = 0$ ,  $\mu^- - \mu^+ = 0$ , то задача имеет единственное с точностью до постоянного вещественного сомножителя решение и определяется формулой (12) с  $\phi(z)$  в виде (35), в которой  $F(z) = \text{const}$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алехно, А. Г. Краевая задача Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка / А. Г. Алехно // Докл. АН БССР. — 2009. — Т. 53, № 2. — С. 5–10.
2. Векуа, И. Н. Обобщенные аналитические функции / И. Н. Векуа. — М. : Наука, 1988. — 509 с.
3. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. — М. : Наука, 1977. — 640 с.
4. Михайлов, Л. Г. Новые классы особых интегральных уравнений и их применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами / Л. Г. Михайлов. — Душанбе : ТаджикНИИТИ, 1963. — 183 с.
5. Раджабов, Н. Р. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами / Н. Р. Раджабов. — Душанбе : Изд-во ТГУ, 1992. — 236 с.
6. Раджабов, Н. Р. Интегральные представления и граничные задачи для одного класса систем дифференциальных уравнений эллиптического типа с сингулярным многообразием / Н. Р. Раджабов, А. Б. Расулов // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25, № 7. — С. 1279–1981.
7. Расулов, А. Б. Задача Римана на полуокружности для обобщенной системы Коши — Римана с сингулярной линией / А. Б. Расулов // Дифференциальные уравнения. — 2004. — Т. 40 (9). — С. 1990–1992.
8. Расулов, А. Б. Задачи типа Римана — Гильберта для обобщенного уравнения Коши — Римана с сверхсингулярными точками на полуплоскости / А. Б. Расулов, И. Н. Дорофеева // Вестник Московского энергетического института — 2022. — № 3. — С. 130–135.
9. Расулов, А. Б. Интегральные представления и задача линейного сопряжения для обобщенной системы Коши — Римана с сингулярным многообразием / А. Б. Расулов // Дифференциальные уравнения. — 2000. — Т. 36, № 2. — С. 270–275.

10. Усманов, З. Д. Обобщенные системы Коши — Римана с сингулярной точкой / З. Д. Усманов. — Душанбе : АН Таджикистана, 1993. — 244 с.
11. Солдатов, А. П. Краевая задача для обобщенного уравнения Коши — Римана с сингулярными коэффициентами / А. П. Солдатов, А. Б. Расулов // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52, № 5. — С. 637–650
12. Салимов, Р. Б. О разрешимости однородной задачи Гильберта с разрывами коэффициентов и двусторонним завихрением на бесконечности логарифмического порядка / Р. Б. Салимов, П. Л. Шабалин // Известия вузов. Математика. — 2016. — № 1. — С. 36–48.
13. Федоров, Ю. С. Задачи типа Гильберта для уравнения Коши — Римана с сингулярными окружностью и точкой в младших коэффициентах / Ю. С. Федоров, А. Б. Расулов // Дифференциальные уравнения. — 2021. — Т. 57, № 1. — С. 140–144.
14. Шабалин, П. Л. Неоднородная краевая задача Гильберта с конечным числом точек завихрения логарифмического порядка / П. Л. Шабалин, А. Х. Фатыхов // Известия вузов. Математика. — 2021. — № 1. — С. 64–80. — DOI: 10.26907/0021-3446-2021-1-64-80
15. Юров, П. Г. Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка / П. Г. Юров // Материалы Всесоюзной конференции по краевым задачам. — Казань : Изд-во КГУ, 1970. — С. 279–284.
16. Meziani, A. Representation of solutions of a singular CR equation in the plane / A. Meziani // Complex Var. and Elliptic. Equat. — 2008. — Vol. 53. — P. 1111–1130.

### REFERENCES

1. Alekhno A.G. Kraevaya zadacha Gilberta s beskonechnym indeksom logarifmicheskogo poryadka [Hilbert Boundary Value Problem with Infinite Index of Logarithmic Order]. *Dokl. AN BSSR*, 2009, vol. 53, no. 2, pp. 5-10.
2. Vekua I.N. *Obobshchennye analiticheskie funktsii* [Generalized Analytic Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 509 p.
3. Gakhov F.D. *Kraevye zadachi* [Boundary Value Problems]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p.
4. Mikhaylov L.G. *Novye klassy osobykh integralnykh uravneniy i ikh primenenie k differentsialnym uravneniyam s singulyarnymi koeffitsientami* [New Classes of Special Integral Equations and Their Application to Differential Equations with Singular Coefficients]. Dushanbe, TadzhiKNIINTI Publ., 1963. 183 p.
5. Radzhabov N.R. *Vvedenie v teoriyu differentsialnykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh so sverksingulyarnymi koeffitsientami* [Introduction to the Theory of Partial Differential Equations with Supersingular Coefficients]. Dushanbe, Izd-vo TGU, 1992. 236 p.
6. Radzhabov N.R., Rasulov A.B. Integralnye predstavleniya i granichnye zadachi dlya odnogo klassa sistem differentsialnykh uravneniy ellipticheskogo tipa s singulyarnym mnogoobraziem [Integral Representations and Boundary Value Problems for a Class of Systems of Elliptic-Type Differential Equations with a Singular Manifold]. *Differentsialnye uravneniya* [Differential Equations], 1989, vol. 25, no. 7, pp. 1279-1981.
7. Rasulov A.B. Zadacha Rimana na polukruzhnosti dlya obobshchennoy sistemy Koshi — Rimana s singulyarnoy liniey [The Riemann Problem on a Semicircle for a Generalized Cauchy — Riemann System with a Singular Line]. *Differentsialnye uravneniya* [Differential Equations], 2004, vol. 40 (9), pp. 1990-1992.
8. Rasulov A.B., Dorofeeva I.N. Zadachi tipa Rimana — Gilberta dlya obobshchennogo uravneniya Koshi — Rimana s sverksingulyarnymi tochkami na poluploskosti [Riemann — Hilbert Type Problems for the Generalized Cauchy — Riemann Equation with Supersingular Points on a Half-Plane]. *Vestnik Moskovskogo energeticheskogo instituta*, 2022, no. 3, pp. 130-135.
9. Rasulov A.B. Integralnye predstavleniya i zadacha lineynogo sopryazheniya dlya obobshchennoy sistemy Koshi — Rimana s singulyarnym mnogoobraziem [Integral Representations and the Linear Conjugation Problem for a Generalized Cauchy — Riemann

System with a Singular Manifold]. *Differentsialnye uravneniya* [Differential Equations], 2000, vol. 36, no. 2, pp. 270-275.

10. Usmanov Z.D. Obobshchennye sistemy Koshi — Rimana s singulyarnoy tochkoy [Generalized Cauchy — Riemann Systems with a Singular Point]. Dushanbe, AN Tadjikistana, 1993. 244 p.

11. Soldatov A.P., Rasulov A.B. Kraevaya zadacha dlya obobshchennogo uravneniya Koshi — Rimana s singulyarnymi koeffitsientami [Boundary Value Problem for the Generalized Cauchy — Riemann Equation with Singular Coefficients]. *Differentsialnye uravneniya* [Differential Equations], 2016, vol. 52, no. 5, pp. 637-650.

12. Salimov R.B., Shabalin P.L. O razreshimosti odnorodnoy zadachi Gilberta s razryvami koeffitsientov i dvustoronnim zavikhreniem na beskonechnosti logarifmicheskogo poryadka [On the Solvability of a Homogeneous Hilbert Problem with Discontinuities of Coefficients and Two-Sided Vorticity at Infinity of Logarithmic Order]. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2016, no. 1, pp. 36-48.

13. Fedorov Yu.S., Rasulov A.B. Zadachi tipa Gilberta dlya uravneniya Koshi — Rimana s singulyarnymi okruzhnostyu i tochkoy v mladshikh koeffitsientakh [Hilbert-Type Problems for the Cauchy — Riemann Equation with Singular Circle and Point in Lower Coefficients]. *Differentsialnye uravneniya* [Differential Equations], 2021, vol. 57, no. 1, pp. 140-144.

14. Shabalin P.L., Fatykhov A.Kh. Neodnorodnaya kraevaya zadacha Gilberta s konechnym chislom toчек zavikhreniya logarifmicheskogo poryadka [Inhomogeneous Hilbert Boundary Value Problem with Several Points of Logarithmic Turbulence]. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2021, no. 1, pp. 64-80. DOI: 10.26907/0021-3446-2021-1-64-80

15. Yurov P.G. Neodnorodnaya kraevaya zadacha Rimana s beskonechnym indeksom logarifmicheskogo poryadka [Inhomogeneous Riemann Boundary Value Problem with Infinite Index of Logarithmic Order]. *Materialy Vsesoyuznoy konferentsii po kraevym zadacham*. Kazan, Izd-vo KGU, 1970, pp. 279-284.

16. Meziani A. Representation of Solutions of a Singular CR Equation in the Plane. *Complex Var. and Elliptic. Equat.*, 2008, vol. 53, pp. 1111-1130.

## HILBERT'S BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A CLASS OF GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS WITH A SINGULAR LINE

**Pavel L. Shabalin**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Professor, Department of Higher Mathematics,  
Kazan State University of Architecture and Engineering  
pavel.shabalin@mail.ru  
<https://orcid.org/0000-0002-8764-6132>  
Zelenaya St, 1, 420043 Kazan, Russian Federation

**Abstract.** In this paper, we study an inhomogeneous Hilbert boundary value problem with a finite index and a boundary condition on the real axis for one generalized equation Cauchy — Riemann with singular coefficient. A structural formula for the general solution of this equation is obtained under constraints leading to an infinite index of the accompanying Hilbert boundary value problem for analytic functions. The study of the solvability of the latter is the basis for solving the boundary value problem for generalized analytical functions. Note that here we have obtained a boundary value problem with an infinite index and two swirl points. Such a situation is not studied in the case of an unbounded domain, even for analytic functions. We have obtained a formula

for the general solution of the indicated Hilbert problem in the theory of analytic functions. We carried out a complete study of the solvability of this problem in terms of the characteristics of the coefficient of the boundary condition. Note that here we have obtained a boundary value problem with an infinite index and two swirl points. Such a situation is not studied in the case of an unbounded domain, even for analytic functions. We have obtained a formula for the general solution of the indicated Hilbert problem in the theory of analytic functions. We carried out a complete study of the solvability of this problem in the class of bounded analytic functions. This study made it possible to obtain a formula for solving the Hilbert problem already for generalized analytic functions. We also formulated the conditions under which the problem has no solution, has a single solution or an infinite number of solutions.

**Key words:** Hilbert boundary value problem, generalized analytic functions, singular lines, infinite index, entire function of proximate order zero.