



DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.2.1>

УДК 514.142.2+514.174.6

ББК 22.19

Дата поступления статьи: 10.04.2023

Дата принятия статьи: 12.05.2023



ПОСТРОЕНИЕ C^1 -ГЛАДКИХ КУСОЧНО-КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ УРАВНЕНИЙ 4-го ПОРЯДКА НА ТРЕУГОЛЬНОЙ СЕТКЕ

Алексей Александрович Клячин

Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой
математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
Aleksey.klyachin@volsu.ru, klyachin-aa@yandex.ru
<https://orcid.org/0000-0003-3293-9066>
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Илья Юрьевич Вережкин

Ассистент кафедры математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
rgoakk-iliya@yandex.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В настоящей работе представлен один подход построения непрерывно дифференцируемых кусочно-квадратичных функций на треугольной сетке, основанный на сглаживании кусочно-линейной функции в окрестности ребер и узлов триангуляции. Разработанный метод не требует решения систем линейных алгебраических уравнений как при построении сплайнов. Данное обстоятельство позволило применить этот класс функций для приближенного решения краевых задач уравнения 4-го порядка.

Ключевые слова: бигармонические функции, треугольная сетка, кусочно-полиномиальные функции, погрешность вычисления, метод градиентного спуска.

Введение

Мы рассматриваем функционал вида

$$I(u) = \iint_{\Omega} G(x, y, u, u_x u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) dx dy, \quad (1)$$

который определен для функций $u \in C^2(\bar{\Omega})$, а функция G имеет все непрерывные частные производные до третьего порядка включительно по всем своим переменным.

Для функционала $I(u)$ можно записать соответствующее уравнение Эйлера — Пуассона вариационной задачи

$$Q[u] \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} G_{u_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} G_{u_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} G_{u_{yy}} - \frac{\partial}{\partial x} G_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} G_{u_y} + G_u = 0. \quad (2)$$

Отметим, что частным случаем уравнения (2) является бигармоническое уравнение

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0,$$

которому соответствуют функции $G = u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2$ и $G = (u_{xx} + u_{yy})^2$. В качестве еще одного примера приведем функционал полной свободной энергии деформированной пластинки (см. [10, гл. II]), играющий важную роль в теории упругости,

$$\iint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1 - \sigma) \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right\} dx dy.$$

Численному решению уравнений 4-го порядка, в том числе и бигармоническому уравнению, посвящено огромное количество работ как в отечественных, так и зарубежных журналах (см., например, [1–6; 11–17]).

В перечисленных работах главным образом используется метод разностных отношений из-за достаточно простых формул аппроксимации производных 4-го порядка. Однако для нелинейных уравнений более предпочтительным является метод конечных элементов с применением вариационных принципов. В этом случае приходится осуществлять построение полигональной сетки. В работах [7; 8] были исследованы вопросы аппроксимации функционала (1) в треугольных сетках и сходимость вариационного метода решения краевой задачи уравнения (2). Однако при численном решении появляются сложности, связанные с построением непрерывно-дифференцируемых кусочно-полиномиальных функций на триангуляциях. В частности, для их построения требуется решать большие системы уравнений на каждом шаге вариационного метода. При попытке обойтись только непрерывными кусочно-полиномиальными функциями мы получали отрицательный результат (обнаруживалась расходимость приближенных решений) [9]. В настоящей работе мы обходим возникающие трудности — указываем способ построения кусочно-полиномиальных функций, имеющих непрерывные частные производные. С помощью такого класса функций нами получены формулы для аппроксимации функционала (1) и проведена проверка метода на примере бигармонического уравнения.

1. Построение кусочно-полиномиальной функции

Пусть задана многоугольная ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Рассмотрим произвольное разбиение этого многоугольника на невырожденные треугольники T_1, T_2, \dots, T_N и пусть M_1, M_2, \dots, M_p — все вершины этих треугольников. Будем предполагать, что этот набор треугольников образует триангуляцию области Ω . Через Γ_l обозначим стороны всех треугольников, $l = 1, 2, \dots, L$, а максимальный диаметр всех треугольников обозначим через h , то есть

$$h = \max_{1 \leq k \leq N} \text{diam} T_k.$$

Предположим, что в каждом узле M_i задано произвольно значение u_i . Для каждого треугольника T_k обозначим через $M_{i_1^k}, M_{i_2^k}, M_{i_3^k}$ его вершины. Тогда можно определить линейную функцию $L_k(x, y)$ такую, что $L_k(M_{i_s^k}) = u_{i_s^k}$, $s = 1, 2, 3$. В итоге получим кусочно-линейную функцию $L(x, y)$, которая в каждом треугольнике T_k совпадает с функцией $L_k(x, y)$. Помимо нее аналогично строится кусочно-квадратичная функция $Q(x, y)$, если к вершинам треугольника добавить еще середины его сторон. Однако функция $Q(x, y)$ не является непрерывно дифференцируемой, что означает недопустимость использования ее при минимизации функционала (1). Для случая обыкновенных дифференциальных уравнений подобная проблема была подробно описана в работе [7]. Там же был предложен способ построения класса допустимых функций вариационной задачи, основанный на сглаживании кусочно-линейных функций. В настоящей статье мы данный подход распространяем на двумерный случай.

Опишем способ сглаживания кусочно-линейной функции $L(x, y)$. Выберем достаточно малые $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$. Для каждого ребра Γ_l , выходящего из внутренней вершины M_i , построим прямоугольник R_l , средняя линия которого проходит по ребру Γ_l и центр которого совпадает с серединой ребра Γ_l . При этом ширина прямоугольника равна 2δ , а длина $|\Gamma_l| - 2\varepsilon$. Выбор величин ε и δ позволяет получить такое расположение прямоугольников R_l , чтобы они не пересекались друг с другом. Затем соединим ближайшие к M_i вершины таких прямоугольников так, чтобы получился выпуклый многоугольник S_i , содержащий точку M_i (см. рис. 1). В каждом прямоугольнике построим квадратичную функцию u следующим образом. Рассмотрим ортонормированный базис \vec{e}_1, \vec{e}_2 , где вектор \vec{e}_1 направлен вдоль ребра Γ_l от точки M_i , а \vec{e}_2 — ему ортогональный. Пусть (t, s) — координаты в этом базисе и $(0, 0)$ соответствует центру прямоугольника R_l . Положим $u(t, s) = a_1 t + b_l(s)$, где $a = \langle \nabla L_k, \vec{e}_1 \rangle$ и L_k линейная функция для одного из треугольников, примыкающих к ребру Γ_l .

Функция $b_l(s) = \beta_{l,2}s^2 + \beta_{l,1}s + \beta_{l,0}$ определена на отрезке $[-\delta, \delta]$. При этом $b_l'(\delta)$ и $b_l'(-\delta)$ совпадают со значениями $\frac{\partial L_k}{\partial \vec{e}_2}$ в треугольниках с одной и другой стороны от ребра Γ_l . Также совпадают $b_l(\delta)$ и $b_l(-\delta)$ в соответствующих точках со значениями функций L_k для треугольников, имеющих ребро Γ_l . В многоугольнике S_i сглаживание строится в полярных координатах с полюсом в точке M_i таким образом, что для каждого фиксированного полярного угла сглаживающая функция есть многочлен 3-ей степени от координаты r (расстояние до точки M_i). В итоге получим кусочно-полиномиальную функцию U , имеющую непрерывные производные 1-го порядка. Нужно отметить, что вторые производные этой функции равны нулю вне многоугольников S_i и прямоугольников R_l .

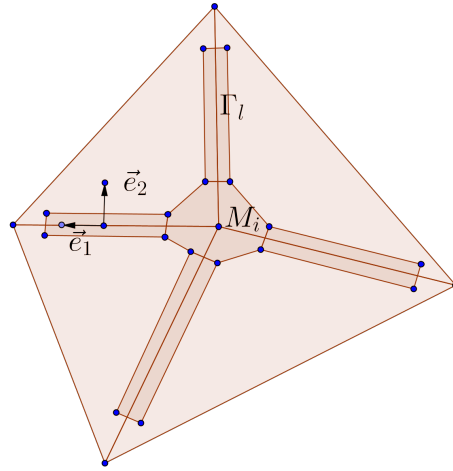


Рис. 1. Построение сглаживающей функции

2. Вывод формулы вычисления функционала

Выпишем функционал, который будем минимизировать для поиска решений краевых задач. Ясно, что вычисление интеграла (2) можно разбить на следующие части — вычисляются интегралы по многоугольникам S_i , по прямоугольникам R_l и по многоугольникам вида

$$P_k = T_k \setminus \left(\bigcup_i S_i \right) \cup \left(\bigcup_l R_l \right).$$

Для простоты изложения дальнейшие рассуждения будем проводить для случая, когда $G = u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2$. Тогда, так как вторые производные функций L_k в треугольниках T_k равны нулю, то интегралов по множествам P_k не будет. Таким образом,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (U_{xx}^2 + 2U_{xy}^2 + U_{yy}^2) dx dy &= \sum_l \iint_{R_l} (U_{xx}^2 + 2U_{xy}^2 + U_{yy}^2) dx dy + \\ &+ \sum_i \iint_{S_i} (U_{xx}^2 + 2U_{xy}^2 + U_{yy}^2) dx dy. \end{aligned}$$

Отметим, что выражение $U_{xx}^2 + 2U_{xy}^2 + U_{yy}^2$ инвариантно при ортогональной замене переменных. Следовательно, в каждом прямоугольнике оно равно в точности $4\beta_{l,2}^2$. Отсюда получаем

$$\sum_l \iint_{R_l} (U_{xx}^2 + 2U_{xy}^2 + U_{yy}^2) dx dy = 4 \sum_l \beta_{l,2}^2 |R_l|,$$

где $|R_l|$ — площадь прямоугольника R_l . В работе [7] была получена формула для вычисления коэффициентов $\beta_{l,2}$. В нашем случае она выглядит так

$$\beta_{l,2} = \frac{1}{4\delta} \langle \nabla L' - \nabla L'', \vec{e}_1 \rangle,$$

где L', L'' — сужение функции L на два соседних треугольника с ребром Γ_l . В итоге приходим к равенству

$$\sum_l \iint_{R_l} (U_{xx}^2 + 2U_{xy}^2 + U_{yy}^2) dx dy = \frac{1}{4\delta^2} \sum_l (\langle \nabla L' - \nabla L'', \vec{e}_1^l \rangle)^2 |R_l|.$$

Рассмотрим теперь области S_i . По построению функция $U(x, y)$ непрерывно дифференцируема в Ω и бесконечно дифференцируема в каждом многоугольнике S_i . Рассмотрим функцию

$$B_i(x, y) = U_{xx}^2 + 2U_{xy}^2 + U_{yy}^2, \quad (x, y) \in S_i.$$

Обозначим через \tilde{B}_i кусочно-линейное приближение функции B_i , построенное по значениям этой функции в точке M_i и вершинах многоугольника S_i . Тогда

$$\sum_i \iint_{S_i} (U_{xx}^2 + 2U_{xy}^2 + U_{yy}^2) dx dy = \frac{1}{3} \sum_i \sum_j^{d_i} (d_i \tilde{B}_i(M_i) + 2\tilde{B}_i(M_i^j)) |S_i^j| + o(h^2), \quad h \rightarrow 0,$$

где d_i — число вершин $M_i^j, j = 1, 2, \dots, d_j$ многоугольника S_i и $S_i^j, j = 1, 2, \dots, d_j$ — треугольники разбиения многоугольника S_i . Итак, окончательно приходим к равенству

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (U_{xx}^2 + 2U_{xy}^2 + U_{yy}^2) dx dy &= \frac{1}{4\delta^2} \sum_l (\langle \nabla L' - \nabla L'', \vec{e}_1^l \rangle)^2 |R_l| + \\ &+ \frac{1}{3} \sum_i \sum_j^{d_i} (d_i \tilde{B}_i(M_i) + 2\tilde{B}_i(M_i^j)) |S_i^j| + o(h^2), \quad h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Отбрасывая бесконечно малую величину в правой части этого равенства, мы получаем функционал

$$\tilde{I}(U) = \frac{1}{4\delta^2} \sum_l (\langle \nabla L' - \nabla L'', \vec{e}_1^l \rangle)^2 |R_l| + \frac{1}{3} \sum_i \sum_j^{d_i} (d_i \tilde{B}_i(M_i) + 2\tilde{B}_i(M_i^j)) |S_i^j|, \quad (3)$$

который будем применять для решения краевой задачи вариационным методом.

3. Описание алгоритма минимизации функционала

Для минимизации функционала (3), как функции значений в точках M_i , мы будем использовать метод градиентного спуска. Нужно отметить, что при изменении значения функции U в точке M_i поменяются и ее значения в вершинах треугольников, которые имеют точку M_i в качестве своей вершины. Также изменятся значения и в вершинах треугольников, которые имеют общие стороны с этими треугольниками. В остальных треугольниках изменений не будет.

В первую очередь нам нужно определиться с тем, какие структуры данных нам понадобятся. Например, для вычисления изменения выражения

$$\langle \nabla L' - \nabla L'', \vec{e}_1 \rangle$$

нам, очевидно, нужно знать, какие треугольники примыкают друг к другу по стороне Γ_l . Поэтому, перед самой процедурой минимизации функционала мы создали следующие массивы данных, позволяющие:

- по номеру i получить список треугольников, которые точку M_i имеют в качестве своей вершины;
- по номеру i получить список соседних с M_i узлов сетки, то есть тех точек, которые связаны с M_i ребрами триангуляции;
- по номеру k получить список всех треугольников, которые имеют с треугольником T_k общую сторону;
- по номеру l получить список треугольников, которые имеют общую сторону Γ_l .
- по номеру i получить список ребер триангуляции, выходящих из вершины M_i .

Помимо этого, мы сформировали массив, в который занесли информацию о том, является ли узел триангуляции граничным или нет. Кроме того, так как граничные условия для уравнения 4-го порядка включают в себя условия на нормальные производные, то формируется массив, указывающий на то, что треугольник триангуляции является граничным или внутренним. Треугольник будет граничным, если хотя бы две его вершины являются граничными.

Теперь опишем сам алгоритм одного шага итерации в методе градиентного спуска для минимизации выражения (3).

- 1) Для каждой внутренней вершины M_i , которая не принадлежит граничному треугольнику, изменяем текущее значение U_i на некоторую величину ΔU

$$U_i^+ = U_i + \Delta U, \quad U_i^- = U_i - \Delta U.$$

- 2) Перебирая все ребра, выходящие из вершины M_i , вычисляем для них суммарное изменение dS_1^\pm выражения $\langle \nabla L' - \nabla L'', \vec{e}_1^t \rangle$ при переходе к новым значениям U_i^\pm .
- 3) Перебирая все ребра, противоположные вершине M_i , вычисляем для них суммарное изменение dS_2^\pm выражения $\langle \nabla L' - \nabla L'', \vec{e}_1^t \rangle$ при переходе к новым значениям U_i^\pm .
- 4) Для самой точки M_i и всех ее соседних вычисляем суммарное изменение dS_3^\pm выражения

$$\sum_j^{d_i} \left(d_i \tilde{B}_i(M_i) + 2\tilde{B}_i(M_i^j) \right) |S_i^j|$$

при переходе к новым значениям U_i^\pm .

- 5) Вычисляем новое значение функции U в точке M_i по формуле

$$U_i^{new} = U_i - \alpha \frac{dS_1^+ + dS_2^+ + dS_3^+ - dS_1^- - dS_2^- - dS_3^-}{2\Delta U},$$

где $\alpha > 0$ — подбираемый параметр.

Для проверки алгоритма мы рассмотрели классическую краевую задачу для бигармонического уравнения

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0, \quad (x, y) \in (a, b) \times (c, d),$$

$$u(a, y) = \varphi_a(y), \quad u(b, y) = \varphi_b(y), \quad y \in [c, d],$$

$$u(x, c) = \varphi_c(x), \quad u(x, d) = \varphi_d(x), \quad x \in [a, b],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} = \psi_a(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=b} = \psi_b(y), \quad y \in [c, d],$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=c} = \psi_c(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=d} = \psi_d(x), \quad x \in [a, b].$$

Треугольная сетка строилась следующим образом. Для любых натуральных n и m полагаем

$$x_i = a + i(b - a)/n, \quad y_j = c + j(d - c)/m, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

После чего точки $M_{ij} = (x_i, y_j)$ соединяем в треугольники

$$\Delta M_{ij}M_{i+1j}M_{i+1j+1}, \quad \Delta M_{ij}M_{ij+1}M_{i+1j+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1, \quad j = 0, 1, \dots, m - 1.$$

Для бигармонического уравнения соответствующий функционал имеет вид

$$I(u) = \iint_{[a,b] \times [c,d]} (u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2) dx dy.$$

Нужно отметить, что программная реализация алгоритма выполнялась так, чтобы она практически не зависела от выбора триангуляции. Для тестирования программы мы взяли прямоугольник $[0, 2] \times [0, 3]$, а в качестве точного решения — функцию $u_0(x, y) = 0,05(x^4 - y^4)$. При $n = m = 6$ и 1000 итераций максимальная абсолютная ошибка составила 0,005672. На следующем рисунке приведен график абсолютной ошибки в зависимости от количества итераций.

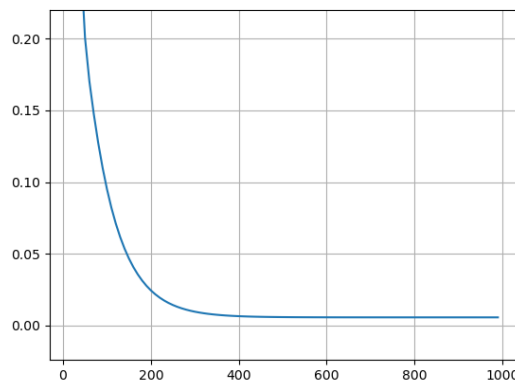


Рис. 2. График абсолютной погрешности приближенного решения

В таблице ниже можно видеть значения ошибки, соответствующие количеству итераций.

Номер итерации	Погрешность	Номер итерации	Погрешность
50	0,200608	550	0,0057517
100	0,0950549	600	0,00570848
150	0,046695	650	0,00568868
200	0,0244725	700	0,0056796
250	0,0142873	750	0,00567544
300	0,00961995	800	0,00567353
350	0,00748111	850	0,00567266
400	0,00650098	900	0,00567226
450	0,00605184	950	0,00567208
500	0,00584602	1000	0,00567199

Заключение

На основе ряда численных экспериментов, проведенных для бигармонического уравнения, можно сделать следующий вывод. Приведенный в работе метод построения непрерывно дифференцируемой функции, являющейся результатом сглаживания кусочно-линейной функции по ребрам и вершинам триангуляции, позволяет применять его при решении краевых задач уравнений 4-го порядка вариационного типа на треугольных сетках любой конфигурации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берикелашвили, Г. К. О скорости сходимости разностного решения первой краевой задачи для эллиптического уравнения четвертого порядка / Г. К. Берикелашвили // Дифференц. уравнения. — 1999. — № 35 (7). — С. 958–963.
2. Боган, Ю. А. О методе потенциала для эллиптического уравнения четвертого порядка из анизотропной теории упругости / Ю. А. Боган // Сиб. журн. индустр. матем. — 2000. — № 3 (2). — С. 29–34.
3. Вабищевич, П. Н. Численное решение вариационных эллиптических неравенств четвертого порядка / П. Н. Вабищевич // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1984. — № 24 (9). — С. 1312–1319.
4. Карачик, В. В. Решение задачи типа Робена для бигармонического уравнения / В. В. Карачик // Изв. вузов. Матем. — 2018. — № 2. — С. 39–53. — DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X18020056>
5. Карчевский, М. М. Смешанный метод конечных элементов для неклассических граничных задач теории пологих оболочек / М. М. Карчевский // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2016. — № 158 (3). — С. 322–335.
6. Клячин, А. А. Аппроксимация уравнений с частными производными 4-го порядка в классе кусочно-полиномиальных функций на треугольной сетке / А. А. Клячин, В. А. Клячин // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2019. — Т. 22, № 2. — С. 65–72. — DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2019.2.5>
7. Клячин, А. А. О C^1 -сходимости кусочно-полиномиальных решений вариационного уравнения 4-го порядка / А. А. Клячин // Уфимский математический журнал. — 2022. — № 14 (3). — С. 63–73.
8. Клячин, А. А. Оценка погрешности вычисления функционала, содержащего производные второго порядка, на треугольной сетке / А. А. Клячин // Сибирские электронные математические известия. — 2019. — № 16. — С. 1856–1867.
9. Клячин, А. А. Построение C^1 -гладких кусочно-квадратичных функций при решении краевых задач уравнений 4-го порядка / А. А. Клячин // Мате-

математическая физика и компьютерное моделирование. — 2022. — № 25 (3). — С. 5–14. — DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2022.3.1>

10. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : в 10 т. Т. VII : Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : Наука, 1987. — 248 с.

11. Приказчикова, В. Г. Асимптотическая оценка точности дискретной спектральной задачи для уравнения четвертого порядка / В. Г. Приказчикова // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1991. — № 31(3). — С. 372–380.

12. Уткина, Е. А. Задача Неймана для одного уравнения четвертого порядка / Е. А. Уткина // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2009. — № 2 (19). — С. 29–37.

13. Ушаков, А. Л. Итерационная факторизация для численного решения эллиптического уравнения четвертого порядка в прямоугольной области / А. Л. Ушаков // Вестн. Южно-Урал. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ. — 2014. — № 6 (1). — С. 42–49.

14. Шапеев, В. П. Решение с повышенной точностью бигармонического уравнения в нерегулярных областях методом коллокации и наименьших квадратов / В. П. Шапеев, В. А. Беляев // Вычислительные методы и программирование. — 2018. — № 19 (4). — С. 340–355.

15. A Compact Difference Scheme for the Biharmonic Equation in Planar Irregular Domains / M. Ben-Artzi, I. Chorev, J. P. Croisille, D. Fishelov // SIAM J. Numer. Anal. — 2009. — № 47 (4). — P. 3087–3108. — DOI: <https://doi.org/10.1137/080718784>

16. Mutigrad Solution of Automatically Generated High-Order Discretizations for the Biharmonic Equation / I. Altas, J. Dyn, M. M. Gupta, R. P. Manohar // SIAM J. Sci. Comput. — 1998. — Vol. 19, № 5. — P. 1575–1585. — DOI: <https://doi.org/10.1137/S1464827596296970>

17. Ženišek, A. Interpolation Polynomials on the Triangle / A. Ženišek // Numer. Math. — 1970. — № 15. — P. 283–296.

REFERENCES

1. Berikelashvili G.K. O skorosti skhodimosti raznostnogo resheniya pervoy kraevoy zadachi dlya ellipticheskogo uravneniya chetvertogo poryadka [On the Rate of Convergence of a Difference Solution of the First Boundary Value Problem for a Fourth-Order Elliptic Equation]. *Differents. uravneniya* [Differential Equations], 1999, no. 35 (7), pp. 958–963.

2. Bogan Yu.A. O metode potentsiala dlya ellipticheskogo uravneniya chetvertogo poryadka iz anizotropnoy teorii uprugosti [On the Potential Method for the Fourth Elliptic Equation Order From Anisotropic Elasticity Theory]. *Sib. zhurn. industr. matem.* [Siberian Journal of Industrial Mathematics], 2000, no. 3 (2), pp. 29–34.

3. Vabishchevich P.N. Chislennoe reshenie variatsionnykh ellipticheskikh neravenstv chetvyortogo poryadka [Numerical Solution of Variational Elliptic Inequalities of the Fourth Order]. *Zhurn. vychisl. matem. i matem. fiz.* [J. Comput. Math. and Mat. Physical], 1984, no. 24 (9), pp. 1312–1319.

4. Karachik V.V. Reshenie zadachi tipa Robena dlya bigarmonicheskogo uravneniya [Solving a Problem of Robin Type for Biharmonic Equation]. *Izv. vuzov. Matem.* [Russian Mathematics], 2018, no. 2, pp. 39–53. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X18020056>

5. Karchevskiy M.M. Smeshanny metod konechnykh elementov dlya neklassicheskikh granichnykh zadach teorii pologikh obolochek [Mixed Finite Element Method for Non-Classical Boundary Value Problems in the Theory of Shallow Shells]. *Uchen. zap. Kazan. un-ta. Ser. Fiz.-matem. nauki* [Scientific Notes Kazan. University Ser. Phys.-Math. Sciences], 2016, no. 158 (3), pp. 322–335.

6. Klyachin A.A., Klyachin V.A. Approksimatsiya uravneniy s chastnymi proizvodnymi 4-go poryadka v klasse kusochno-polinomialnykh funktsiy na treugolnoy setke [Approximation of 4th order Partial Differential Equations in the Class of Piecewise Polynomial Functions on a Triangular Grid]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie*

[Mathematical Physics and Computer Simulation], 2019, vol. 22, no. 2, pp. 65-72. DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2019.2.5>

7. Klyachin A.A. О C^1 -skhodimosti kusochno-polinomialnykh resheniy variatsionnogo uravneniya 4-go poryadka [On the C^1 -Convergence of Piecewise Polynomial Solutions of a Fourth-Order Variational Equation]. *Ufimskiy matematicheskiy zhurnal* [Ufa Mathematical Journal], 2022, no. 14 (3), pp. 63-73.

8. Klyachin A.A. Otsenka pogreshnosti vychisleniya funktsionala, sodержashchego proizvodnye vtorogo poryadka, na treugolnoy setke [An Estimate of the Error in Calculating a Functional Containing Second-Order Derivatives on a Triangular Grid]. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports], 2019, no. 16, pp. 1856-1867.

9. Klyachin A.A. Postroenie C^1 -gladkikh kusochno-kvadratichnykh funktsiy pri reshenii kraevykh zadach uravneniy 4-go poryadka [Construction of C^1 -Smooth Piecewise Quadratic Functions in Solving Boundary Value Problems of 4th order Equations]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2022, no. 25 (3), pp. 5-14. DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2022.3.1>

10. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika: v 10 t. T. VII: Teoriya uprugosti* [Course of Theoretical Physics. Vol. 7: Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 248 p.

11. Prikazchikova V.G. Asimptoticheskaya otsenka tochnosti diskretnoy spektralnoy zadachi dlya uravneniya chetvertogo poryadka [Asymptotic Accuracy Estimate Discrete Spectral Problem for the Fourth Order Equation]. *Zhurn. vychisl. matem. i matem. fiz.* [J. Comput. Math. and Mat. Physical], 1991, no. 31(3), pp. 372-380.

12. Utkina E.A. Zadacha Neymana dlya odnogo uravneniya chetvyortogo poryadka [The Neumann Problem for One Fourth-Order Equation]. *Vestn. Samar. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki*, 2009, no. 2 (19), pp. 29-37.

13. Ushakov A.L. Iteratsionnaya faktorizatsiya dlya chislennogo resheniya ellipticheskogo uravneniya chetvyortogo poryadka v pryamougolnoy oblasti [Iterative Factorization for the Numerical Solution of a Fourth-Order Elliptic Equation in a Rectangular Domain]. *Vestn. Yuzhno-Ural. un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz.* [Bulletin of the South Ural University. Ser. Mat. Mechanics Phys.], 2014, no. 6 (1), pp. 42-49.

14. Shapeev V.P., Belyaev V.A. Reshenie s povyshennoy tochnostyu bigarmonicheskogo uravneniya v neregulyarnykh oblastiakh metodom kollokatsii i naimenshikh kvadratov [Solution with Increased Accuracy of the Biharmonic Equation in Irregular Domains by the Collocation Method and the Least Squares]. *Vychislitelnye metody i programmirovaniye* [Numerical Methods and Programming], 2018, no. 19 (4), pp. 340-355.

15. Ben-Artzi M., Chorev I., Croisille J.P., Fishelov D. A Compact Difference Scheme for the Biharmonic Equation in Planar Irregular Domains. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2009, no. 47 (4), pp. 3087-3108. DOI: <https://doi.org/10.1137/080718784>

16. Altas I., Dyn J., Gupta M.M., Manohar R.P. Mutigrid Solution of Automatically Generated High-Order Discretizations for the Biharmonic Equation. *SIAM J. Sci. Comput.*, 1998, vol. 19, no. 5, pp. 1575-1585. DOI: <https://doi.org/10.1137/S1464827596296970>

17. Ženišek A. Interpolation Polynomials on the Triangle. *Numer. Math.*, 1970, no. 15, pp. 283-296.

**CONSTRUCTION OF C^1 -SMOOTH PIECEWISE QUADRATIC FUNCTIONS
FOR SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS
OF FOURTH-ORDER EQUATIONS ON A TRIANGULAR GRID**

Aleksey A. Klyachin

Doctor of Sciences (Physics and Mathematics),
Head of the Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
Aleksey.klyachin@volsu.ru, klyachin-aa@yandex.ru
<https://orcid.org/0000-0003-3293-9066>
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Ilya Yu. Verevkin

Assistant, Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
prorokk-iliya@yandex.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. In this paper, we present one approach to constructing continuously differentiable piecewise-quadratic functions on a triangular grid, based on smoothing a piecewise-linear function in the vicinity of edges and triangulation nodes. In the works [7; 8], the issues of approximation of the functional (1) in triangular grids and the convergence of the variational method for solving the boundary value problem of the equation (2) were studied. However, in the numerical solution there are difficulties associated with the construction of continuously differentiable piecewise polynomial functions on triangulations. In particular, their construction requires solving large systems of equations at each step of the variational method. When trying to get by with only continuous piecewise polynomial functions, we got a negative result (divergence of approximate solutions was found) [9]. In this paper, we circumvent the difficulties that arise — we indicate a method for constructing piecewise polynomial functions that have continuous partial derivatives. With the help of this class of functions, we have obtained formulas for approximating the functional (1) and tested the method on the example of a biharmonic equation.

Key words: biharmonic functions, triangular grid, piecewise polynomial functions, calculation error, gradient descent method.