www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.3.1

УДК 517.927.4
ББК 22.161.6

Дата поступления статьи: 26.04.2023
Дата принятия статьи: 03.07.2023

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Гусен Эльдерханович Абдурагимов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики,
Дагестанский государственный университет
gusen_e@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-7095-932X
ул. Дзержинского, 12, 367025 г. Махачкала, Российская Федерация

Патимат Эльдерхановна Абдурагимова

Учебный мастер кафедры прикладной математики,
Дагестанский государственный университет
abpatuka@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-9050-0209
ул. Дзержинского, 12, 367025 г. Махачкала, Российская Федерация

Мадина Магомедрасуловна Курамагомедова

Соискатель кафедры прикладной математики,
Дагестанский государственный университет
madina19.12@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-6424-9348
ул. Дзержинского, 12, 367025 г. Махачкала, Российская Федерация

Аннотация. В статье рассматривается двухточечная краевая задача с однородными граничными условиями для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. С помощью теоремы Го — Красносельского получены достаточные условия существования положительного решения рассматриваемой задачи. Для доказательства единственности положительного решения был привлечен принцип сжатых отображений. Приведен пример, иллюстрирующий выполнение полученных достаточных условий однозначной разрешимости рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: краевая задача, положительное решение, функция Грина, конус, дифференциальные уравнения.

Введение

Нелинейным краевым задачам посвящено достаточно большое количество работ, в которых рассматриваются вопросы существования решений, их поведения, асимптотики и т. д., причем естественным орудием исследования являются методы функционального анализа, основанные на использовании полуупорядоченных пространств, теория которых связана с именами Ф. Рисса, М.Г. Крейна, Л.В. Канторовича, Г. Фрейденталя, Г. Биркгофа и др. В последующем методы исследования положительных решений операторных уравнений были развиты М.А. Красносельским и его учениками Л.А. Ладыженским, И.А. Бахтиным, В.Я. Стеценко, Ю.В. Покорным и др.

Работ, посвященных непосредственно краевым задачам для нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка, относительно немного, например, [6; 8–11; 13–21]. Однако за редким исключением в перечисленных работах исследованы вопросы существования и единственности положительных решений. Среди близких к данной статье публикаций можно отметить [3–5]. В [3] получены достаточные условия существования и единственности положительного решения с аналогичными граничными условиями при достаточно жестких ограничениях степенного характера на правую часть f уравнения. В [4] в краевой задаче с близкими граничными условиями в качестве f взята надлинейная степенная функция, установлены достаточные условия существования и единственности положительного решения такой задачи, а также предложен достаточно эффективный численный алгоритм решения. В [5] показано существование положительного решения задачи для нелинейного уравнения с сильной степенной нелинейностью со схожими краевыми условиями. Во всех вышеупомянутых работах рассмотрены краевые задачи с требованиями на f надлинейного степенного роста с различными граничными условиями. В данной статье предпринята попытка обобщить условия на f и немного расширить соответствующий класс задач.

Полученные результаты дополняют исследования авторов по данной тематике. В частности, к последним публикациям можно отнести [1; 2].

1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим краевую задачу

$$x^{(4)}(t) + f(t, x(t)) = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, \tag{2}$$

$$x'''(1) = 0, \tag{3}$$

где $f(t,x)$ — неотрицательная и непрерывная на $[0,1]\times[0,\infty)$ функция, причем $f(\cdot,0)\equiv$ $\equiv 0$.

Обозначим через $C^k \quad (k\geq 0)$ пространство k раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций.

Определение 1. *Под положительным решением задачи* (1)–(3) *будем понимать функцию $x(t)\in C^4$, положительную в интервале $(0,1)$ и удовлетворяющую на указанном интервале уравнению* (1) *и граничным условиям* (2), (3).

Как несложно видеть, исходную задачу с помощью функции Грина можно записать в эквивалентной форме

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))\,ds, \qquad 0\leq t\leq 1, \tag{4}$$

где

$$G(t,s)=\begin{cases}\frac{s^3}{6}-\frac{s^2}{2}t+\frac{s}{2}t^2, & \text{если } 0\leq s\leq t,\\ \frac{t^3}{6}, & \text{если } t\leq s\leq 1.\end{cases}$$

Лемма 1. *Ядро $G(t,s)$ обладает следующими свойствами:*

1) $G(t,s)>0, \quad (t,s)\in(0,1)\times(0,1)$;

2) $G(t,s)\leq \max_{0\leq t\leq 1} G(t,s)=G(1,s), \quad (t,s)\in[0,1]\times[0,1]$;

3) $\min_{\frac{1}{2}\leq t\leq 1} G(t,s)\geq \frac{1}{16}\max_{0\leq t\leq 1} G(t,s)=\frac{1}{16}G(1,s), \quad s\in[0,1]$.

Доказательство. В выполнении свойства 1 легко убедиться. Кроме того, возрастание $G(t,s)$ по первому аргументу обеспечивает выполнение второго свойства леммы.

Покажем теперь выполнение свойства 3. В силу монотонности $G(t,s)$ имеем

$$\min_{\frac{1}{2}\leq t\leq 1} G(t,s)=G\left(\frac{1}{2},s\right)=\begin{cases}\frac{s^3}{6}-\frac{s^2}{4}+\frac{s}{8}, & \text{если } 0\leq s\leq \frac{1}{2},\\ \frac{1}{48}, & \text{если } \frac{1}{2}\leq s\leq 1,\end{cases}$$

$$\frac{1}{16}\max_{0\leq t\leq 1} G(t,s)=\frac{s^3}{96}-\frac{s^2}{32}+\frac{s}{32}.$$

Для всех $s\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ свойство (3) леммы примет вид

$$\frac{s^3}{6}-\frac{s^2}{4}+\frac{s}{8}\geq\frac{s^3}{96}-\frac{s^2}{32}+\frac{s}{32}.$$

Последнее равносильно

$$5s^3-7s^2+3s\geq 0$$

и, как несложно видеть, выполняется для всех $s\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

При $s\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ свойство (3) соответственно запишется так:

$$\frac{1}{48}\geq\frac{s^3}{96}-\frac{s^2}{32}+\frac{s}{32}.$$

Или же

$$s^3-3s^2+3s-2\leq 0.$$

На указанном интервале это неравенство очевидно выполняется.

В операторной форме уравнение (4) можно переписать в виде

$$x = Ax,$$

где A — оператор, определенный равенством

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s))\, ds, \qquad 0 \le t \le 1$$

действует в пространстве неотрицательных непрерывных функций и вполне непрерывен [7, с. 161].

Обозначим через K конус неотрицательных и непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условию

$$\min_{\frac{1}{2} \le t \le 1} x(t) \ge \frac{1}{16} \|x\|_C.$$

Лемма 2. *Оператор A оставляет инвариантным конус K.*

Доказательство. В силу свойств 2 и 3 леммы 1 соответственно имеем

$$\|Ax\|_C \le \int_0^1 \max_{0 \le t \le 1} G(t,s) f(s, x(s))\, ds,$$

$$\min_{\frac{1}{2} \le t \le 1} (Ax)(t) = \min_{\frac{1}{2} \le t \le 1} \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s))\, ds \ge \frac{1}{16} \int_0^1 \max_{0 \le t \le 1} G(t,s) f(s, x(s))\, ds \ge \frac{1}{16} \|Ax\|_C.$$

В дальнейшем для доказательства существования по крайней мере одного положительного решения задачи (1)–(3) нам понадобится следующая известная теорема Го — Красносельского [12].

Теорема 1. *Пусть E — банахово пространство, $K \subset E$ — конус, а Ω_1, Ω_2 — два ограниченных открытых шара E с центром в начале координат с $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. Предположим, что $T : K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1) \to K$ — вполне непрерывный оператор такой, что выполнено одно из двух условий*

(*i*) $\|Tu\| \ge \|u\|$, $\forall u \in K \cap \partial\Omega_1$ *и* $\|Tu\| \le \|u\|$, $\forall u \in K \cap \partial\Omega_2$,

(*ii*) $\|Tu\| \le \|u\|$, $\forall u \in K \cap \partial\Omega_1$ *и* $\|Tu\| \ge \|u\|$, $\forall u \in K \cap \partial\Omega_2$.

Тогда T имеет неподвижную точку в $K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$.

Предположим, что $f(t,x)$ удовлетворяет одному из следующих условий:

$$(H1): \ \lim_{x\to\infty} \frac{f(t,x)}{x} = \infty, \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(t,x)}{x} = 0, \quad t \in [0,1].$$

$$(H2): \ \lim_{x\to\infty} \frac{f(t,x)}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(t,x)}{x} = \infty, \quad t \in [0,1],$$

Введем обозначения:

$$\Omega_r = \big\{u \in C : \|u\| < r\big\},$$
$$\Omega_R = \big\{u \in C : \|u\| < R\big\},$$
$$\Omega = \overline{\Omega}_R \backslash \Omega_r,$$

где r и R — некоторые положительные числа, которые будут определены ниже.

Теорема 2. *При выполнении одного из условий (H1) и (H2) краевая задача* (1)–(3) *имеет по крайней мере одно положительное решение.*

Доказательство. Проверим выполнение условия (i) теоремы 1.

Предположим, что имеет место (H1). Тогда найдутся положительные числа M и N, такие что

$$f(t,x) \geq \alpha x, \quad t \in [0,1], \quad x \geq M, \tag{5}$$

$$f(t,x) \leq \beta x, \quad t \in [0,1], \quad 0 \leq x \leq N, \tag{6}$$

где $\alpha \geq \frac{256}{\int_{\frac{1}{2}}^1 G(1,s)\,ds}, \quad 0 < \beta \leq \frac{1}{\int_0^1 G(1,s)\,ds}$.

В определении множеств Ω_r и Ω_R выберем соответственно $r \geq 16M$ и $0 < R \leq N$. Тогда для $x \in K \cap \partial\Omega_r$ имеем

$$x(t) \geq \min_{1/2 \leq t \leq 1} x(t) \geq \frac{1}{16}\|x\|_C = \frac{r}{16} \geq M.$$

Таким образом, в силу (5) и леммы 1 имеем

$$(Ax)(t) \geq \int_{\frac{1}{2}}^1 G(t,s) f(s,x(s))\,ds \geq \frac{\alpha}{256}\int_{\frac{1}{2}}^1 G(1,s)\|x\|_C\,ds \geq r = \|x\|_C.$$

Для $x \in K \cap \partial\Omega_R$ из (6) и леммы 1 соответственно получим

$$(Ax)(t) \leq \int_0^1 G(1,s)\beta\|x\|\,ds \leq \beta R\int_0^1 G(1,s)\,ds \leq R.$$

В случае (H2) аналогичным образом устанавливается выполнение условий (ii) теоремы 1.

Таким образом, при соответствующем выборе r и R нетрудно обеспечить выполнение условий теоремы (1). Следовательно, вполне непрерывный оператор A имеет по крайней мере одну неподвижную точку в $K \cap \Omega$, что равносильно существованию хотя бы одного положительного решения краевой задачи (1)–(3) такого, что $r \leq \|x\|_C \leq R$, где r и R определены выше.

Теорема 3. *При выполнении условий теоремы 2 краевая задача* (1)–(3) *имеет единственное положительное решение, если функция $f(t,x)$ непрерывно дифференцируема, производная $f'_x(t,x)$ монотонно возрастает по второму аргументу и*

$$\int_0^1 G(1,s)\left|f'_x(s,R)\right|\,ds < 1. \tag{7}$$

Доказательство. Воспользовавшись монотонностью производной $f'_x(t,x)$ по второму аргументу и применив формулу конечных приращений Лагранжа, для $x_1, x_2 \in K \cap \Omega$ получим

$$\|Ax_1 - Ax_2\|_C = \max_{0 \leq t \leq 1}\int_0^1 G(t,s)\left|f'_x(s,\tilde{x}(s))\right||y(s)|\,ds \leq$$

$$\leq \int_0^1 G(1,s)\left|f'_x(s,R)\right||y(s)|\,ds \leq \|y\|_C\int_0^1 G(1,s)\left|f'_x(s,R)\right|\,ds,$$

где $\tilde{x}(t)$ принимает значения промежуточные между $x_1(t)$ и $x_2(t)$, $y(t)$ соответственно обозначает разность $x_1(t) - x_2(t)$.

Из принципа сжатых отображений, с учетом условия (7) теоремы, следует, что краевая задача (1)–(3) имеет единственное положительное решение.

Замечание 1. В случае убывания $f'_x(t,x)$ по второму аргументу несложно вывести достаточное условие единственности, аналогичное (7).

Пример 1. Рассмотрим задачу

$$x^{(4)}(t) + ax(t)(e^{x(t)} - 1) = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{8}$$

$$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, \tag{9}$$

$$x'''(1) = 0, \tag{10}$$

где $a > 0$.

Выполнение условий (H1), гарантирующих в соответствии с теоремой 2 существование по меньшей мере одного положительного решения задачи (8)–(10), очевидно. Выясним теперь, при каких условиях это решение единственно.

Для определения R, участвующего в условии (7) теоремы 3, рассмотрим неравенство (6)

$$ax(e^x - 1) \le \beta x,$$

где $0 < \beta \le 8$.

Откуда

$$0 \le x(t) \le N, \quad t \in [0,1],$$

где $N = \ln\left(1 + \frac{\beta}{a}\right)$.

При $R \in (0, N]$ в силу теоремы 3 выполнение неравенства

$$a\left[e^R(1+R) - 1\right] < 8$$

влечет единственность положительного решения задачи (8)–(10).
Например, при $a = \beta = 1$ и $R = 0,1$ несложно убедиться в справедливости этого неравенства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдурагимов, Г. Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка / Г. Э. Абдурагимов, П. Э. Абдурагимова, М. М. Курамагомедова // Вестник российских университетов. Математика. — 2021. — Т. 26, вып. 136. — С. 341–347.

2. Абдурагимов, Г. Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка / Г. Э. Абдурагимов, П. Э. Абдурагимова, М. М. Курамагомедова // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2022. — Т. 25, вып. 4. — С. 5–14. — DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2022.4.1

3. Абдурагимов, Э. И. Положительное решение двухточечной краевой задачи для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка / Э. И. Абдурагимов // Изв. вузов. Математика. — 2006. — Т. 8. — С. 3–6.

4. Абдурагимов, Э. И. Положительное решение двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка и численный метод его построения / Э. И. Абдурагимов // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2010. — Т. 2, вып. 76. — С. 5–12.

5. Абдурагимов, Э. И. Существование положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка / Э. И. Абдурагимов // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — Т. 10, вып. 121. — С. 9–16.

6. Бекиев, А. В. Разрешимость нелокальной обратной задачи для уравнения четвертого порядка / А. В. Бекиев // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2023. — Т. 42, № 1. — С. 9–26.

7. Крейн, С. Г. Функциональный анализ / С. Г. Крейн. — М. : Наука, 1972. — 544 с.

8. Abdullaev, A. Periodic Boundary-Value Problem for a Fourth-Order Differential Equation / A. Abdullaev, E. Skachkova // Russian Mathematics. — 2013. — Vol. 57. — P. 1–7.

9. Bonanno, G. A Fourth-Order Boundary Value Problem for a Sturm – Liouville Type Equation / G. Bonanno, B. Di. Bella // Appl. Math. Comput. — 2010. — Vol. 217, iss. 8. — P. 3635–3640.

10. Bonanno, G. Existence Results for a Two Point Boundary Value Problem Involving a Fourth-Order Equation / G. Bonanno, A. Chinni, S. A. Tersian // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2015. — Vol. 33. — P. 1–9.

11. Buryachenko, K. O. Solvability of Inhomogeneous Boundary-Value Problems for Fourth-Order Differential Equations / K. O. Buryachenko // Ukr. Math. J. — 2012. — Vol. 63. — P. 1165–1175.

12. Cabada, A. Existence Results for a Clamped Beam Equation with Integral Boundary Conditions / A. Cabada, R. Jebari // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2020. — Vol. 70. — P. 1–17.

13. Chen, H. Existence and Uniqueness of Solutions to the Nonlinear Boundary Value Problem for Fourth-Order Differential Equations with all Derivatives / H. Chen, Y. Chui // J. Inequal. Appl. — 2023. — Vol. 23. — P. 1–13.

14. Gao, Y. Existence of Solutions of Three-Point Boundary Value Problems for Nonlinear Fourth Order Differential Equation / Y. Gao // Appl. Math. Mech. — 1996. — Vol. 17, iss. 6. — P. 569–576.

15. Graff, J. R. Existence and Nonexistence of Positive Solutions of Fourth Order Nonlinear Boundary Value Problems / J. R. Graff, B. Yang // Appl. Anal. Discret. Math. — 2000. — Vol. 74, iss. 1-2. — P. 201–214.

16. Ibraheem, R. H. The Collocation Method For Fourth Order Fuzzy Boundary Value Problems / R. H. Ibraheem // Journal of the College of Basic Education. — 2022. — Vol. 20. — P. 1–10.

17. Jangveladze, T. On a Nonlocal Boundary Value Problem for a Fourth-Order Ordinary Differential Equation / T. Jangveladze, G. B. Lobjanidze // Diff. Equat. — 2011. — Vol. 47, iss. 2. — P. 179–186.

18. Kulaev, R. C. On the Spectrum of a Multipoint Boundary Value Problem for a Fourth-Order Equation / R. C. Kulaev // Diff. Equat. — 2016. — Vol. 52. — P. 316–326.

19. Namazova, N. M. On Some Boundary Value Problems for a Fourth Order Differential Equation with Multiple Characteristics / N. M. Namazova // Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences. — 2012. — Vol. 4. — P. 79–86.

20. Positive Solutions of Four-Point Boundary Value Problem for Fourth Order Ordinary Differential Equation / C. Yu, S. Chen, F. Austin, J. Lu // Math. Comp. Model. — 2010. — Vol. 52, iss. 1-2. — P. 200–206.

21. Zhang, Y. Positive Solutions for Two-Point Boundary Value Problems for Fourth-Order Differential Equations with Fully Nonlinear Terms / Y. Zhang, Y. Cui // Mathematical Problems in Engineering. — 2020. — Vol. 2020. — P. 1–7.

REFERENCES

1. Abduragimov G.E., Abduragimova P.E., Kuramagomedova M.M. O sushchestvovanii i edinstvennosti polozhitelnogo resheniya kraevoy zadachi dlya nelineynogo obyknovennogo differentsialnogo uravneniya chetnogo poryadka [On the Existence and Uniqueness of a Positive Solution to a Boundary Value Problem for a Nonlinear Ordinary Differential Equation of Even Order]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika* [Bulletin of Russian Universities. Mathematics], 2021, vol. 26, iss. 136, pp. 341-347.

2. Abduragimov G.E., Abduragimova P.E., Kuramagomedova M.M. O sushchestvovanii i edinstvennosti polozhitelnogo resheniya kraevoy zadachi dlya odnogo nelineynogo differentsialnogo uravneniya vtorogo poryadka [On the Existence and Uniqueness of a Positive Solution to a Boundary Value Problem for a Non-Linear Second-Order Differential Equation]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2022, vol. 25, iss. 4, pp. 5-14. DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2022.4.1

3. Abduragimov E.I. Polozhitelnoe reshenie dvukhtochechnoy kraevoy zadachi dlya odnogo nelineynogo obyknovennogo differentsialnogo uravneniya chetvertogo poryadka [A Positive Solution of a Two-Point Boundary Value Problem for One Nonlinear Ordinary Differential Equation of the Fourth Order]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2006, vol. 8, pp. 3-6.

4. Abduragimov E.I. Polozhitelnoe reshenie dvukhtochechnoy kraevoy zadachi dlya odnogo nelineynogo ODU chetvertogo poryadka i chislennyy metod ego postroeniya [A Positive Solution of a Two-Point Boundary Value Problem for One Nonlinear Fourth-Order ODE and a Numerical Method for Its Construction]. *Vestn. SamGU. Estestvennonauch. ser.* [Vestn. SamGU. Natural Science ser], 2010, vol. 2, iss. 76, pp. 5-12.

5. Abduragimov E.I. Sushchestvovanie polozhitelnogo resheniya dvukhtochechnoy kraevoy zadachi dlya odnogo nelineynogo ODU chetvertogo poryadka [Existence of a Positive Solution to a Two-Point Boundary Value Problem for One Nonlinear Fourth-Order ODE]. *Vestn. SamGU. Estestvennonauch. ser.* [Vestn. SamGU. Natural Science Ser.], 2014, vol. 10, iss. 121, pp. 9-16.

6. Bekiev A.V. Razreshimost nelokalnoy obratnoy zadachi dlya uravneniya chetvertogo poryadka [Solvability of a Nonlocal Inverse Problem for a Fourth-Order Equation]. *Vestnik KRAUNTs. Fiz.-mat. nauki* [Vestnik KRAUNTS. Phys.-Math. Sciences], 2023, vol. 42, no. 1, pp. 9-26.

7. Kreyn S.G. *Funktsionalnyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 544 p.

8. Abdullaev A., Skachkova E. Periodic Boundary-Value Problem for a Fourth-Order Differential Equation. *Russian Mathematics*, 2013, vol. 57, pp. 1-7.

9. Bonanno G., Bella B.Di. A Fourth-Order Boundary Value Problem for a Sturm – Liouville Type Equation. *Appl. Math. Comput.*, 2010, vol. 217, iss. 8, pp. 3635-3640.

10. Bonanno G., Chinni A., Tersian S.A. Existence Results for a Two Point Boundary Value Problem Involving a Fourth-Order Equation. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2015, vol. 33, pp. 1-9.

11. Buryachenko K.O. Solvability of Inhomogeneous Boundary-Value Problems for Fourth-Order Differential Equations. *Ukr. Math. J.*, 2012, vol. 63, pp. 1165-1175.

12. Cabada A., Jebari R. Existence Results for a Clamped Beam Equation with Integral Boundary Conditions. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2020, vol. 70, pp. 1-17.

13. Chen H., Chui Y. Existence and Uniqueness of Solutions to the Nonlinear Boundary Value Problem for Fourth-Order Differential Equations with All Derivatives. *J. Inequal. Appl.*, 2023, vol. 23, pp. 1-13.

14. Gao Y. Existence of Solutions of Three-Point Boundary Value Problems for Nonlinear Fourth Order Differential Equation. *Appl. Math. Mech.*, 1996, vol. 17, iss. 6, pp. 569-576.

15. Graff J.R., Yang B. Existence and Nonexistence of Positive Solutions of Fourth Order Nonlinear Boundary Value Problems. *Appl. Anal. Discret. Math.*, 2000, vol. 74, iss. 1-2, pp. 201-214.

16. Ibraheem R.H. The Collocation Method For Fourth Order Fuzzy Boundary Value Problems. *Journal of the College of Basic Education*, 2022, vol. 20, pp. 1-10.

17. Jangveladze T., Lobjanidze G.B. On a Nonlocal Boundary Value Problem for a Fourth-Order Ordinary Differential Equation. *Diff. Equat.*, 2011, vol. 47, iss. 2, pp. 179-186.

18. Kulaev R.C. On the Spectrum of a Multipoint Boundary Value Problem for a Fourth-Order Equation. *Diff. Equat.*, 2016, vol. 52, pp. 316-326.

19. Namazova N.M. On Some Boundary Value Problems for a Fourth Order Differential Equation with Multiple Characteristics. *Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences*, 2012, vol. 4, pp. 79-86.

20. Yu C., Chen S., Austin F., Lu J. Positive Solutions of Four-Point Boundary Value Problem for Fourth Order Ordinary Differential Equation. *Math. Comp. Model.*, 2010, vol. 52, iss. 1-2, pp. 200-206.

21. Zhang Y., Cui Y. Positive Solutions for Two-Point Boundary Value Problems for Fourth-Order Differential Equations with Fully Nonlinear Terms. *Mathematical Problems in Engineering*, 2020, vol. 2020, pp. 1-7.

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF A POSITIVE SOLUTION TO A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL FOURTH ORDER EQUATION

Gusen E. Abduragimov

Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Department of Applied Mathematics,
Dagestan State University
gusen_e@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-7095-932X
Dzerzhinskogo St, 12, 367025 Makhachkala, Russian Federation

Patimat E. Abduragimova

Class Master, Department of Applied Mathematics,
Dagestan State University
abpatuka@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-9050-0209
Dzerzhinskogo St, 12, 367025 Makhachkala, Russian Federation

Madina M. Kuramagomedova

Candidate for a Degree, Department of Applied Mathematics,
Dagestan State University
madina19.12@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-6424-9348
Dzerzhinskogo St, 12, 367025 Makhachkala, Russian Federation

Abstract. The article deals with the boundary value problem

$$\begin{aligned} &x^{(4)}(t) + f(t, x(t)) = 0, \qquad 0 < t < 1, \\ &x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, \\ &x'''(1) = 0, \end{aligned}$$

where $f(t,x)$ — non-negative and continuous on $[0,1] \times [0,\infty)$ function and $f(\cdot,0) \equiv 0$. This problem is reduced to an equivalent integral equation, the kernel of which is the Green's function. Using the well-known Go—Krasnoselsky theorem, we prove the existence of at least one positive solution in some cone of the problem under consideration. Further, using a priori estimates, relying on the principle of compressed mappings, the uniqueness of such a solution is established. In conclusion, an example illustrating the results obtained is given.

Key words: boundary value problem, positive solution, Green's function, cone, differential equations.