



DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.3.6>

УДК 519.6, 517.95  
ББК 22.192.3

Дата поступления статьи: 08.06.2023

Дата принятия статьи: 28.06.2023



## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ИЗМЕНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОВОДИМОСТИ НА РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОИМПЕДАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ <sup>1</sup>

**Анна Александровна Афанасьева**

Аспирант кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования,  
Томский государственный университет  
anna.afanaseva@stud.tsu.ru  
просп. Ленина, 36, 634050 г. Томск, Российская Федерация

**Александр Васильевич Старченко**

Доктор физико-математических наук, профессор,  
заведующий кафедрой вычислительной математики и компьютерного моделирования,  
старший научный сотрудник Регионального математического центра,  
Томский государственный университет  
starch@math.tsu.ru  
просп. Ленина, 36, 634050 г. Томск, Российская Федерация

**Аннотация.** В электроимпедансной томографии (ЭИТ) определяется проводимость внутри тела с помощью электрических измерений, выполняемая на исследуемой поверхности. Сама задача ЭИТ относится к обратной задаче и является некорректной, особенно в реальных приложениях, где доступны только частичные граничные данные. ЭИТ делится на прямую и обратную задачи. Информация, полученная при решении прямой задачи, будет полезна при решении обратных задач ЭИТ, так как необходимо понимать, какие данные измерений важны, как измерять напряжение, как подавать ток, чтобы получить больше информации о внутренней структуре объекта. Чем больше будет полезной информации о распределении напряжения, тем лучше получится определить распределение проводимости в обратной задаче. В данной

работе проведено численное исследование влияния изменения электрической проводимости на решение прямой задачи электроимпедансной томографии. Учитываются вариации того, как различные проводимости, конфигурации тока и сопротивления электродов влияют на напряжение.

**Ключевые слова:** уравнение эллиптического типа с кусочно-постоянными коэффициентами, неструктурированные сетки, полная электродная модель, проводимость, контактное сопротивление.

## Введение

Электроимпедансная томография (ЭИТ) оценивает внутренние электрические характеристики человеческого тела путем проведения измерений с внешней поверхности тела [12]. Обычно это делается путем подачи тока на объект через электроды, расположенные на его поверхности, и измерения соответствующих напряжений. Цель здесь состоит в том, чтобы восстановить распределения электрической проницаемости и проводимости внутри объекта на основе знаний об измеренных напряжениях на электродах и характере приложенного тока путем решения обратной задачи [10]. В ЭИТ любые значительные изменения импеданса приведут лишь к незначительному изменению на поверхности, что сделает решение обратной задачи весьма сложной задачей.

ЭИТ имеет более низкое разрешение изображения по сравнению с магнитно-резонансной томографией (МРТ) и компьютерной томографией (КТ). ЭИТ является полностью неинвазивным методом визуализации без радиационного воздействия. Данный метод имеет преимущества перед другими методами визуализации, такими как портативность, низкая стоимость и более быстрые возможности визуализации. ЭИТ оказывается эффективным при создании карты импеданса внутренней части человеческого черепа даже в тех областях, где ультразвуковые методы оказались недостаточными.

В системах ЭИТ качество и точность измерений зависят от многих факторов, таких как конфигурация электродов и распределение подаваемого тока. Необходимо учитывать размер, геометрию и расположение электродов, поскольку они могут повлиять на данные, используемые для реконструкции. Потери напряжения из-за эффективного контактного импеданса, который представляет собой тонкий резистивный слой между электродом и объектом, также следует учитывать для точного измерения граничных напряжений. В медицинских целях поверхность кожи подготавливается с использованием определенного геля для снижения и стабилизации контактного сопротивления между кожей и электродом. Более того, эффект шунтирования тока через съемные электроды — хорошо известная проблема в системах ЭИТ. Это явление можно эффективно уменьшить за счет геометрии электродов или их разделения. Кроме того, граничное распределение тока или характер тока влияют на данные, поскольку они линейно связаны при фиксированном распределении проводимости [8]. Важно учитывать все эти параметры, чтобы получить более точные данные для построения изображений [13].

### 1. Физическая постановка задачи

Физически прямую задачу ЭИТ можно описать следующим образом [7]. Предполагается, что исследуемый объект (рис. 1, область  $D$ ) находится в воздухе, имеет

достаточно гладкую границу  $\Gamma$  и характеризуется кусочно-постоянными значениями коэффициента электропроводности  $\sigma$ .  $E_1, \dots, E_l$  отмечают места крепления на поверхности объекта электродов, к которым подается электрический ток относительно низкой частоты  $I_1, \dots, I_l$  (рис. 1) [4; 7; 9; 11]. Из-за отсутствия источников тока внутри объекта сумма входящего и выходящего токов должна быть равна нулю по закону сохранения заряда. Электроды имеют одинаковые размеры, но могут обладать различными значениями электрического сопротивления  $z_1, \dots, z_l$  из-за различного качества крепления электродов к поверхности объекта. Требуется найти распределение электрического потенциала внутри объекта и напряжение тока  $U_1, \dots, U_l$  на электродах.

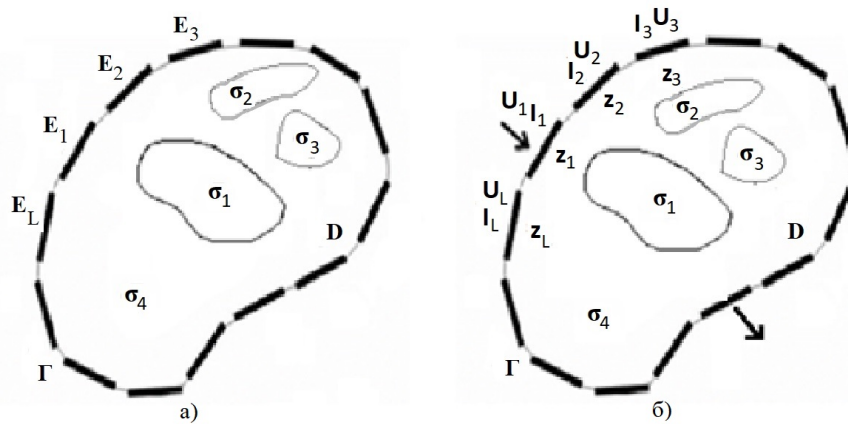


Рис. 1. а) геометрия объекта с электродами; б) объект с указанием заданных и измеряемых величин, стрелками отмечено направление подачи тока через электроды

## 2. Математическая постановка задачи

Математическая постановка рассматриваемой задачи может быть получена с использованием уравнений Максвелла в проводниках [5; 7; 14]:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathbf{H}}}{\partial t} + \text{rot } \bar{\mathbf{E}} = 0, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial t} = \text{rot } \bar{\mathbf{H}} - \frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{j}}, \quad (1)$$

$$\text{div } \bar{\mathbf{E}} = \rho, \quad \text{div } \bar{\mathbf{H}} = 0$$

и закона Ома для стационарных проводников [7]:  $\bar{\mathbf{j}} = \sigma \bar{\mathbf{E}}$ .

Здесь  $\bar{\mathbf{E}}$  и  $\bar{\mathbf{H}}$  — интенсивность электрического и магнитного поля соответственно;  $c$  — скорость света;  $t$  — время;  $\bar{\mathbf{j}}$  — плотность электрического тока;  $\rho$  — объемная плотность заряда электрического тока;  $\sigma$  — коэффициент электрической проводимости.

В соответствии с физической постановкой задачи можно считать [7; 14], что процесс стационарен ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ), интенсивность магнитного поля невелика  $\bar{\mathbf{H}} \approx 0$  и что интенсивность источников заряженных частиц внутри ткани биологического объекта равна нулю ( $\rho = 0$ ). Тогда имеем  $\text{rot } \bar{\mathbf{E}} = 0$  или  $\bar{\mathbf{E}} = \text{grad}(u)$ , где  $u$  — потенциал электрического поля. Из второго и третьего уравнений (1) можно записать уравнение,

описывающее распределение электрического потенциала внутри исследуемой области:

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad}(u)) = 0. \quad (2)$$

Или, с учетом допущения о двумерности изучаемого процесса,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0. \quad (3)$$

На границе области  $\bar{D}$ , где нет электродов, плотность электрического тока  $\bar{j} = \sigma \operatorname{grad}(u)$  равняется 0 в силу отсутствия тока, здесь используются простые условия Неймана:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad (4)$$

где  $n$  — внешняя нормаль к границе области  $\bar{D}$ .

На электродах рассматриваются граничные условия, соответствующие так называемой полной электродной модели [4; 7; 9; 11; 14], в которой учитывается сопротивление электродов:

$$u + z_l \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = U_l, l = 1, \dots, L. \quad (5)$$

Здесь  $U_l$  — напряжение на  $l$ -м электроде, которое наряду с электрическим потенциалом  $u(x, y)$  является искомой величиной. Также на электроде известна сила подаваемого или отводимого тока  $I_l$ ,  $l = 1, \dots, L$ , причем по закону сохранения заряда  $\sum_{l=1}^L I_l = 0$  (при принятом выше предположении об отсутствии внутренних источников заряда внутри области). Величина силы тока на  $l$ -м электроде определяется как интеграл от плотности электрического тока по контактной поверхности электрода  $E_l$ :

$$I_l = \int_{E_l} j_n ds = \int_{E_l} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} ds. \quad (6)$$

Комбинируя граничные условия (5) и (6) и исключая пока неизвестные величины  $U_l$ , можно получить интегро-дифференциальные граничные условия для уравнения (3) на электродах

$$u + z_l \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{E_l} \left( \int_{E_l} u ds + z_l I_l \right), l = 1, \dots, L.$$

Таким образом, с учетом принятых предположений и допущений, математическая

постановка прямой задачи ЭИТ в полной электродной модели имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 0, (x, y) \in D; \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial n} &= 0, (x, y) \notin \bigcup_{l=1}^L E_l; \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial n} &= \frac{1}{z_l E_l} \left( \int_{E_l} u ds + z_l I_l \right) - \frac{u}{z_l}, (x, y) \in E_l, l = 1, \dots, L; \\ \sum_{l=1}^L I_l &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Как было доказано в работе [15], решение рассматриваемой математической постановки единственно, если  $\sum_{l=1}^L U_l = 0$ .

Для удобства исследования необходимо привести уравнения (7) к безразмерному виду, то есть провести операцию обезразмеривания переменных, в результате которой все переменные математической модели будут иметь одинаковый порядок.

Безразмерные переменные вводятся с помощью соотношений:

$$\tilde{x} = \frac{x}{R}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{R}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{u_0}, \quad \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_0},$$

где  $R$  — масштаб длины, а переменные с индексом 0 соответствуют характерным параметрам модели. Тогда сила тока и контактное сопротивление запишутся следующим образом:

$$\tilde{I} = \frac{I \sigma_0}{R}, \quad \tilde{z} = \frac{z \sigma_0}{R}.$$

Затем подставим новые обозначения в (7) и получим математическую постановку прямой задачи ЭИТ в полной электродной модели в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \tilde{\sigma}(\tilde{x}, \tilde{y}) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left( \tilde{\sigma}(\tilde{x}, \tilde{y}) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right) &= 0, (\tilde{x}, \tilde{y}) \in D; \\ \tilde{\sigma} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{n}} &= 0, (\tilde{x}, \tilde{y}) \notin \bigcup_{l=1}^L \tilde{E}_l; \\ \tilde{\sigma} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{n}} &= \frac{1}{\tilde{z}_l \tilde{E}_l} \left( \int_{\tilde{E}_l} \tilde{u} d\tilde{s} + \tilde{z}_l \tilde{I}_l \right) - \frac{\tilde{u}}{\tilde{z}_l}, (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{E}_l, l = 1, \dots, L; \\ \sum_{l=1}^L \tilde{I}_l &= 0; \\ \sum_{l=1}^L \tilde{U}_l &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

### 3. Прямая задача и сбор данных

Первым шагом для решения прямой задачи является сбор данных об интересующей области тела субъекта. В обычной системе ЭИТ используется ряд электродов, которые подключаются к внешней поверхности наблюдаемого или изучаемого участка тела пациента. К телу прикладывают ток или напряжение и рассчитывают результирующий ток или напряжение. Как правило, ток подается от источника переменного тока на несколько электродов, а измеряемые напряжения рассчитываются для формирования остальных электродов.

Существует много типов конфигураций, используемых для подачи тока и расчета результирующих напряжений, но наиболее распространенной является конфигурация парной подачи. Конфигурация парной подачи состоит из одного источника тока, который подключен к парам электродов, которые используются для подачи тока в среду, а результирующий потенциал рассчитывается на всех электродах. После получения первого измерения источник переменного тока перемещается к другой паре электродов, и процесс продолжается до тех пор, пока не будут завершены все измерения. Стоит отметить, что существуют и другие способы подачи тока. Например, в статье [14] ток подается по синусу, но также можно подавать по косинусу. Ток стараются подавать таким образом, чтобы обеспечить сохранение заряда.

Информация важна для решения обратной задачи, следовательно, нужно понимать, какая информация будет полезна, а какая не будет содержать необходимых данных. Поэтому целью работы является исследование чувствительности электрического напряжения на электродах за счет влияния электрической проводимости и контактного сопротивления электродов при различных конфигурациях подачи тока.

### 4. Построение расчетной сетки

В данной работе расчетные сетки построены с помощью программы Gambit [2]. Идея работы в Gambit заключается в том, что моделирование объекта происходит постепенно, сначала определяются точки, затем строятся линии, после чего строится сетка и определяются граничные условия. А в дальнейшем получившуюся сетку можно экспортировать в текстовый файл и продолжить работу с данными. Правильно созданная расчетная модель, грамотно разбитая на конечные объемы, существенно повышает качество решения поставленной задачи и способствует достижению результатов, близких к экспериментально полученным. Кроме того, качественная расчетная модель и сетка существенно облегчают процесс получения решения, повышая сходимость и устойчивость вычислительных процессов.

В программе Gambit можно использовать функции, оценивающие качество построенной неструктурированной сетки. Часто для этого применяется характеристика угловой скошенности (EquiAngle Skew) [2]. Считается, что величина угловой скошенности не должна превышать 0,85 для получения корректного решения. В нашем случае самое наибольшее значение угловой скошенности = 0,38, поэтому полученная сетка корректна для дальнейшего численного решения.

### 5. Решение задачи в постановке полной электродной модели

Для решения задачи в силу сложности геометрической формы области исследуемого объекта использовался метод конечного объема на неструктурированных треугольных сетках [3], в результате применения которого дифференциальная задача заменяется конечно-разностной (системой линейных уравнений). Решение конечно-разностной задачи даст приближенное решение дифференциальной задачи в узлах неструктурированной сетки.

Численный метод решения прямой двумерной задачи ЭИТ приведен в [1]. Численное решение разностной схемы выполнялось методом Гаусса с частичным выбором главного элемента. Также в работе проводились методические расчеты с кратным четырем измельчением площади ячеек сетки. Численные значения электрического потенциала, полученные на последовательности вложенных неструктурированных сеток, сравнивались с известным приближенным аналитическим решением [6]. Результаты показали соответствующее уменьшение погрешности — максимального значения модуля разности численного и аналитического решения во всей сеточной области, что свидетельствует о сходимости построенной разностной схемы. Кроме того, результаты этих экспериментов с кратным четырем дроблением ячеек сетки позволили установить, используя правило Рунге, что порядок аппроксимации рассматриваемой разностной схемы близок ко второму.

В качестве тестовой задачи ЭИТ рассмотрим прямую задачу ЭИТ в круге единичного радиуса с кусочно-постоянными значениями электрической проводимости. Вставки с различной электрической проводимостью круглые, центр первой вставки —  $(-0,5; 0,1)$ , а второй —  $(0,2; 0,4)$ , также они имеют разные радиусы  $\rho_1 = 0,3$  и  $\rho_2 = 0,2$  соответственно (см. рис. 2). Середины электродов шириной  $2w$  расположены при  $\{\pi/4; \pi/2; 3\pi/4; \pi; 5\pi/4; 3\pi/2; 7\pi/4; 2\pi\}$ , полуширина электрода  $w = 0,25$ . Рассматривались следующие значения проводимости для вставок [7]:

- 1) проводимость одинаковая  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1$ ;
- 2) проводимость одинаковая у вставок  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,66$ ,  $\sigma_3 = 1$ ;
- 3) проводимость одинаковая у вставок  $\sigma_1 = \sigma_2 = 5$ ,  $\sigma_3 = 1$ ;
- 4) проводимость у вставок разная  $\sigma_1 = 0,01$ ,  $\sigma_2 = 5$ ,  $\sigma_3 = 1$ ;
- 5) проводимость у вставок разная  $\sigma_1 = 5$ ,  $\sigma_2 = 0,01$ ,  $\sigma_3 = 1$ .

Ток подается на двух электродах  $\pm 1$ , в зависимости от описанной ниже конфигурации. Один электрод используется для подачи тока, а другой — для приема тока. Напряжение  $\{U_i\}$  фиксировалось на всех электродах. Для исследования влияния электрической проводимости включений на напряжение использовались различные конфигурации подачи тока через два электрода.

- 1) Ток подается по схеме, если  $in$  — номер подающего, то  $out = (in + 4) \bmod L$  — номер принимающего.

На рисунке 3 изображено напряжение на электродах для вариантов распределения  $\sigma$  1)–5).

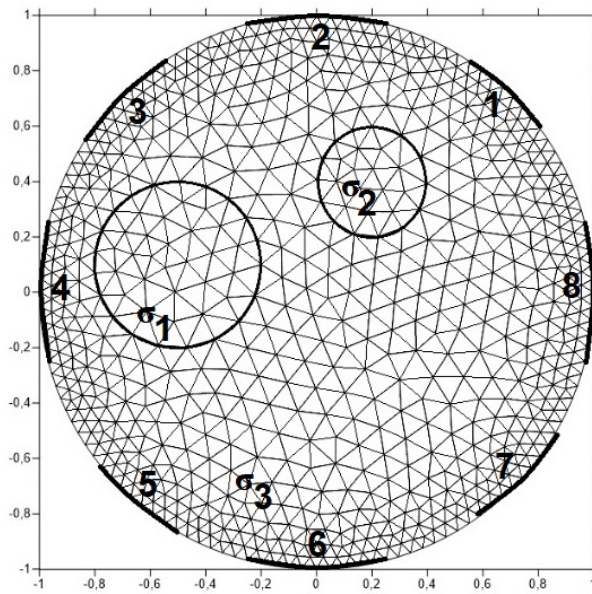


Рис. 2. Расчетная сетка со сгущением на всей границе (1 394 ячейки)

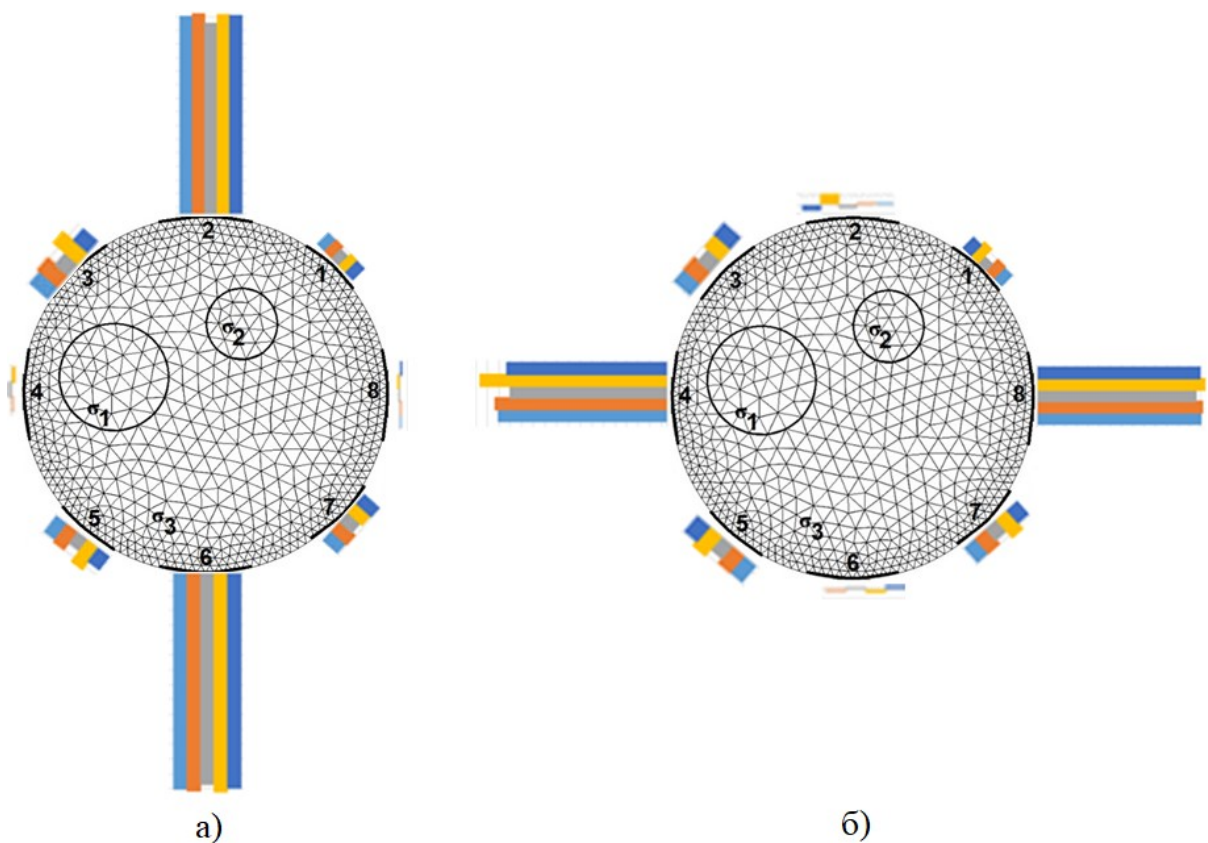


Рис. 3. а) ток подается на 2 электроде, а принимается на 6; б) ток подается на 4 электроде, а принимается на 8



Таблица 1

Случаи	Номер электрода							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Ток подается на 2 электроде, а принимается на 6								
2-1	0,014	0,036	0,032	0,009	0,027	0,022	0,016	0,007
3-1	0,044	<b>0,099</b>	<b>0,081</b>	0,029	<b>0,076</b>	<b>0,060</b>	0,042	0,017
4-1	0,020	0,023	<b>0,100</b>	0,046	<b>0,091</b>	0,040	0,003	0,032
5-1	0,011	0,020	<b>0,061</b>	0,012	0,043	0,013	0,013	0,025
Ток подается на 4 электроде, а принимается на 8								
2-1	0,030	0,011	0,017	<b>0,067</b>	0,015	0,009	0,020	0,028
3-1	<b>0,095</b>	0,034	0,049	<b>0,196</b>	0,048	0,021	<b>0,057</b>	<b>0,086</b>
4-1	<b>0,082</b>	<b>0,118</b>	0,005	<b>0,317</b>	<b>0,062</b>	0,039	<b>0,070</b>	<b>0,075</b>
5-1	0,001	<b>0,067</b>	0,017	<b>0,138</b>	0,011	0,029	0,028	0,008

2) Ток подается по схеме  $out = (in + 3) \bmod L$ :

Таблица 2

Случаи	Номер электрода							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Ток подается на 2 электроде, а принимается на 5								
2-1	0,022	0,041	0,033	0,025	0,036	0,022	0,012	0,000
3-1	<b>0,069</b>	<b>0,113</b>	<b>0,082</b>	<b>0,076</b>	<b>0,104</b>	<b>0,061</b>	0,029	0,006
4-1	<b>0,052</b>	<b>0,067</b>	<b>0,124</b>	<b>0,125</b>	<b>0,139</b>	0,047	0,014	<b>0,053</b>
5-1	0,002	0,007	<b>0,077</b>	0,047	<b>0,065</b>	0,016	0,016	0,030
Ток подается на 6 электроде, а принимается на 1								
2-1	0,025	0,021	0,011	0,017	0,023	0,015	0,007	0,005
3-1	<b>0,080</b>	<b>0,060</b>	0,024	<b>0,053</b>	<b>0,071</b>	0,045	0,017	0,021
4-1	0,015	0,038	<b>0,087</b>	0,036	<b>0,061</b>	0,022	0,002	0,007
5-1	<b>0,067</b>	0,004	<b>0,071</b>	0,014	0,010	0,002	0,004	0,017

3) Ток подается по схеме  $out = (in + 2) \bmod L$ :

Таблица 3

Случаи	Номер электрода							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Ток подается на 2 электроде, а принимается на 4								
2-1	0,031	0,038	0,011	<b>0,064</b>	0,028	0,007	0,004	0,014
3-1	<b>0,094</b>	<b>0,110</b>	0,023	<b>0,186</b>	<b>0,080</b>	0,019	0,013	0,043
4-1	<b>0,097</b>	<b>0,091</b>	0,033	<b>0,327</b>	<b>0,102</b>	0,022	<b>0,079</b>	<b>0,107</b>
5-1	0,015	0,016	0,029	<b>0,150</b>	0,039	0,024	<b>0,051</b>	<b>0,054</b>
Ток подается на 6 электроде, а принимается на 8								
2-1	0,014	0,008	0,004	0,012	0,014	0,007	0,000	0,007
3-1	0,045	0,023	0,009	0,039	0,044	0,021	0,001	0,026
4-1	0,006	0,049	<b>0,063</b>	0,035	<b>0,051</b>	0,023	0,007	0,000
5-1	0,027	0,030	0,049	0,001	0,015	0,008	0,009	0,021

4) Ток подается по схеме  $out = (in + 1) \bmod L$ :

Таблица 4

Случаи	Номер электрода							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Ток подается на 3 электроде, а принимается на 4								
2-1	0,017	0,031	0,031	0,044	0,028	0,011	0,002	0,006
3-1	0,048	<b>0,082</b>	<b>0,084</b>	<b>0,127</b>	<b>0,077</b>	0,029	0,002	0,020
4-1	<b>0,088</b>	<b>0,111</b>	<b>0,135</b>	<b>0,248</b>	<b>0,138</b>	0,035	0,022	<b>0,063</b>
5-1	0,039	<b>0,055</b>	<b>0,078</b>	<b>0,124</b>	<b>0,070</b>	0,018	0,010	0,030
Ток подается на 6 электроде, а принимается на 7								
2-1	0,006	0,004	0,002	0,007	0,007	0,003	0,001	0,004
3-1	0,020	0,010	0,005	0,022	0,022	0,008	0,003	0,014
4-1	0,011	0,030	0,030	0,027	0,031	0,013	0,003	0,003
5-1	0,005	0,020	0,022	0,006	0,012	0,006	0,005	0,007

В таблицах 1–4 приведена чувствительность  $\delta U$ , то есть отклонение полученных напряжений от случая 1, где проводимость одинаковая, для разных конфигураций подачи тока. Будем считать, что информативны те случаи, где  $\delta U > 0,05$  и выделим их в таблицах 1–4.

По результатам можно сделать следующие выводы:

- Наиболее чувствительны к изменениям электрической проводимости активные электроды (токоподающий и токо–принимающий), а наименее чувствительны удаленные, причем чем дальше от активных электродов, тем меньше изменение  $\delta U$ .
- При заметном увеличении или уменьшении электрической проводимости включений  $\sigma$  амплитуда возмущений напряжения  $\delta U$  на электродах сохраняется.
- Если неоднородность находится в стороне от пути тока между активными электродами, то она не оказывает заметного влияния на величину напряжения на удаленном электроде.
- Неоднородность большего размера оказывает наибольшее влияние на изменения напряжения, чем вставка меньшего размера.
- Электроды, расположенные возле активных электродов, также характеризуются значительными колебаниями напряжения при изменении электрической проводимости в области.
- На электроде, находящемся между активными электродами, расчеты показывают почти нулевое напряжение.
- Токовая конфигурация, направленная мимо неоднородностей, незначительно влияет на значения напряжения на остальных электродах (неактивных).

Также заметную роль играет значение контактного сопротивления электродов. В таблице 5 представлены изменения напряжений  $\delta U$  в зависимости от заданного сопротивления  $z$ , рассмотрим случай, когда ток подается на 2 электрода, а принимается на 4.

Таблица 5

Номер электрода							
1	2	3	4	5	6	7	8
Сопротивление $z = 10$							
0,031	0,039	0,011	<b>0,065</b>	0,028	0,007	0,004	0,014
<b>0,096</b>	<b>0,112</b>	0,023	<b>0,189</b>	<b>0,081</b>	0,019	0,014	0,044
<b>0,099</b>	<b>0,093</b>	0,032	<b>0,334</b>	<b>0,103</b>	0,024	<b>0,081</b>	<b>0,109</b>
0,015	0,016	0,029	<b>0,153</b>	0,039	0,025	<b>0,052</b>	<b>0,055</b>
Сопротивление $z = 0, 1$							
0,028	0,035	0,011	<b>0,058</b>	0,026	0,007	0,003	0,013
<b>0,087</b>	<b>0,101</b>	0,023	<b>0,172</b>	<b>0,075</b>	0,018	0,012	0,041
<b>0,088</b>	<b>0,082</b>	0,035	<b>0,294</b>	<b>0,094</b>	0,017	<b>0,070</b>	<b>0,096</b>
0,016	0,017	0,028	<b>0,140</b>	0,037	0,021	0,046	0,049
Сопротивление $z = 1, z_2 = 10, z_4 = 10$							
0,031	0,038	0,011	<b>0,064</b>	0,028	0,007	0,004	0,014
<b>0,095</b>	<b>0,110</b>	0,023	<b>0,186</b>	<b>0,080</b>	0,019	0,013	0,043
<b>0,097</b>	<b>0,092</b>	0,033	<b>0,328</b>	<b>0,102</b>	0,022	<b>0,079</b>	<b>0,107</b>
0,015	0,016	0,030	<b>0,151</b>	0,039	0,024	<b>0,051</b>	<b>0,054</b>
Сопротивление $z = 1, z_2 = 0, 1, z_4 = 0, 1$							
0,030	0,038	0,011	<b>0,062</b>	0,027	0,007	0,004	0,014
<b>0,093</b>	<b>0,109</b>	0,023	<b>0,183</b>	<b>0,079</b>	0,018	0,013	0,043
<b>0,096</b>	<b>0,090</b>	0,029	<b>0,321</b>	<b>0,101</b>	0,022	<b>0,078</b>	<b>0,106</b>
0,017	0,016	0,026	<b>0,149</b>	0,039	0,024	<b>0,051</b>	<b>0,054</b>
Сопротивление $z = 1, z_2 = 0, 1, z_4 = 10$							
0,030	0,038	0,012	<b>0,064</b>	0,028	0,007	0,004	0,014
<b>0,093</b>	<b>0,110</b>	0,025	<b>0,186</b>	<b>0,080</b>	0,019	0,013	0,043
<b>0,098</b>	<b>0,092</b>	0,033	<b>0,328</b>	<b>0,102</b>	0,022	<b>0,079</b>	<b>0,107</b>
0,017	0,017	0,028	<b>0,152</b>	0,040	0,024	<b>0,050</b>	<b>0,055</b>
Сопротивление $z = 1, z_2 = 10, z_4 = 0, 1$							
0,031	0,038	0,010	<b>0,063</b>	0,027	0,007	0,004	0,014
<b>0,094</b>	<b>0,109</b>	0,021	<b>0,184</b>	<b>0,079</b>	0,018	0,014	0,043
<b>0,095</b>	<b>0,089</b>	0,029	<b>0,321</b>	<b>0,100</b>	0,023	<b>0,079</b>	<b>0,106</b>
0,014	0,015	0,027	<b>0,148</b>	0,038	0,025	<b>0,051</b>	<b>0,054</b>

По результатам, представленным в таблице 5, можно сделать следующие выводы:

- 1) Чем больше сопротивление внутренних включений, тем больше напряжение на электродах, и наоборот.
- 2) Когда контактное сопротивление одного электрода большое, тогда напряжение на этом электроде тоже большое, а другие электроды принимают почти одинаковые значения напряжения. Таким образом, информация о расположении включений, отображаемых на электродах, интерпретируется не совсем корректно. Это может ухудшить восстановление электропроводности ЭИТ, если эти электроды расположены со стороны искомым включений.

### Заключение

В данной работе представлена двумерная математическая постановка для прямой задачи ЭИТ в биологическом неоднородном токопроводящем объекте с учетом сопротивления приложенных к нему электродов, используемых для подачи и съема тока и измерения напряжения. Результаты, полученные в этой работе, согласуются с результатами статьи [14]. Полезная информация в ЭИТ содержится в основном на малой части границы, то есть на электродах, близких к возмущениям электрической проводимости. Граничные измерения, являющиеся входными данными для обратной задачи проводимости, более чувствительны к аномалиям, расположенным вблизи границы, и к аномалиям большего размера. Это исследование полезно для того, чтобы узнать критические значения параметров (размер, местоположение) малоамплитудного возмущения проводимости, при которых измерения нечувствительны и, следовательно, неоднородности не могут быть обнаружены.

### ПРИМЕЧАНИЕ

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2023-943).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьева, А. А. Численное решение прямой задачи электроимпедансной томографии в полной электродной постановке / А. А. Афанасьева, А. В. Старченко // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2022. — № 78. — С. 5–21. — DOI: 10.17223/19988621/78/1
2. Батулин, О. В. Построение расчетных моделей в препроцессоре Gambit универсального программного комплекса Fluent : электрон. учеб. пособие / О. В. Батулин, Н. В. Батулин, В. Н. Матвеев. — Самара : Изд-во СГАУ, 2010. — 166 с.
3. Клячин, А. А. Построение треугольной сетки для областей, ограниченных замкнутыми простыми кривыми / А. А. Клячин // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2018. — № 3 (21). — С. 31–38. — DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.3.3>
4. Пеккер, Я. С. Электроимпедансная томография / Я. С. Пеккер, К. С. Бразовский, В. Ю. Усов. — Томск : Изд-во НТЛ, 2004. — 192 с.
5. Седов, Л. И. Механика сплошной среды / Л. И. Седов. — М. : Наука, 1994. — 528 с.
6. Старченко, А. В. Приближенное аналитическое решение прямой задачи электроимпедансной томографии в неоднородном круге с учетом сопротивления электродов / А. В. Старченко, М. А. Седнев, С. В. Панько // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2021. — № 74. — С. 19–29. — DOI: 10.17223/19988621/74/3
7. Borcea, L. Electric Impedance Tomography. Topical Review / L. Borcea // Inverse Problems. — 2002. — Vol. 18. — P. R99-R136.
8. Chen, Z. Q. Reconstruction Algorithms for Electrical Impedance Tomography : PhD Thesis / Z. Q. Chen. — New South Wales, Australia : University of Wollongong, 1990. — 242 p.
9. Cheney, M. Electrical Impedance Tomography / M. Cheney, D. Isaacson, J. C. Newell // Society for Industrial and Applied Mathematics. — 1999. — Vol. 41, № 1. — P. 85–101.
10. Efficient Simultaneous Reconstruction of Time-Varying Images and Electrode Contact Impedances in Electrical Impedance Tomography / G. Boverman, D. Isaacson, J. C. Newell, G. J. Saulnier, T. J. Kao, B. C. Amm, X. Wang, D. M. Davenport, D. H. Chong, R. Sahni // IEEE Trans. Biomed. Eng. — 2017. — Vol. 64. — P. 795–806.

11. Electrical Impedance Tomography / G. J. Saulnier, R. S. Blue, J. C. Newell, D. Isaacson, P. M. Edic // *IEEE Signal Processing Magazine*. — 2001. — Vol. 18, № 6. — P. 31–43.
12. Garg, D. Design and Development of Electrical Impedance Tomography (EIT) Based System / D. Garg, V. Goel // *AIP Conf. Proc.* — 2013. — Vol. 74. — P. 33–36.
13. Saulnier, G. A High-Precision Voltage Source for EIT / G. Saulnier, A. Ross, N. Lui // *Physiol. Meas.* — 2006. — Vol. 27. — P. 221–236.
14. Sensitivity Analysis of the Complete Electrode Model for Electrical Impedance Tomography / M. Darbas, J. Heleine, R. Mendoza, A. C. Velasco // *AIMS Mathematics*. — 2021. — Vol. 6 (7). — P. 7333–7366.
15. Somersalo, E. Existence and Uniqueness for Electrode Models for Electric Current Computed Tomography / E. Somersalo, M. Cheney, D. Isaacson // *SIAM J. Appl. Math.* — 1992. — Vol. 52. — P. 1034–1040.

### REFERENCES

1. Afanaseva A.A., Starchenko A.V. Численное решение прямой задачи электроимпедансной томографии в полной электродной постановке [Numerical Solution of the Direct Problem of Electrical Impedance Tomography in the Complete Electrode Model]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2022, no. 78, pp. 5-21. DOI: 10.17223/19988621/78/1
2. Baturin O.V., Baturin N.V., Matveev V.N. *Postroenie raschetnykh modeley v preprotssore Gambit universalnogo programmnoy kompleksa Fluent: elektron. ucheb. posobie* [Building Computational Models in the Gambit Preprocessor of the Fluent Universal Software Package]. Samara, Izd-vo SGAU, 2010. 166 p.
3. Klyachin A.A. Postroenie treugolnoy setki dlya oblastey, ogranichennykh zamknutymi prostymi krivymi [Construction of a Triangular Mesh for Areas Bounded by Closed Simple Curves]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovaniye*, 2018, no. 3 (21), pp. 31-38. DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.3.3>
4. Pekker Ya.S., Brazovskiy K.S., Usov V.Yu. *Elektroimpedansnaya tomografiya* [Electrical Impedance Tomography]. Tomsk, Izd-vo NTL, 2004. 192 p.
5. Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoy sredy* [Continuum Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1994. 528 p.
6. Starchenko A.V., Sednev M.A., Panko S.V. Priblizhennoe analiticheskoe reshenie pryamoy zadachi elektroimpedansnoy tomografii v neodnorodnom krugе s uchetom soprotivleniya elektrodov [An Approximate Analytical Solution to the Forward Inhomogeneous Eit Problem on the 2d Disk with Allowance for the Electrode Contact Impedance]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2021, no. 74, pp. 19-29. DOI: 10.17223/19988621/74/3
7. Borcea L. Electric Impedance Tomography. Topical Review. *Inverse Problems*, 2002, vol. 18, pp. R99-R136.
8. Chen Z.Q. *Reconstruction Algorithms for Electrical Impedance Tomography: PhD Thesis*. New South Wales, Australia, University of Wollongong, 1990. 242 p.
9. Cheney M., Isaacson D., Newell J.C. Electrical Impedance Tomography. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1999, vol. 41, no. 1, pp. 85-101.
10. Boverman G., Isaacson D., Newell J.C., Saulnier G.J., Kao T.J., Amm B.C., Wang X., Davenport D.M., Chong D.H., Sahni R. Efficient Simultaneous Reconstruction of Time-Varying Images and Electrode Contact Impedances in Electrical Impedance Tomography. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 2017, vol. 64, pp. 795-806.
11. Saulnier G.J., Blue R.S., Newell J.C., Isaacson D., Edic P.M. Electrical Impedance Tomography. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2001, vol. 18, no. 6, pp. 31-43.
12. Garg D., Goel V. Design and Development of Electrical Impedance Tomography (EIT) Based System. *AIP Conf. Proc.*, 2013, vol. 74, pp. 33-36.

13. Saulnier G., Ross A., Lui N. A High-Precision Voltage Source for EIT. *Physiol. Meas.*, 2006, vol. 27, pp. 221-236.
14. Darbas M., Heleine J., Mendoza R., Velasco A.C. Sensitivity Analysis of the Complete Electrode Model for Electrical Impedance Tomography. *AIMS Mathematics*, 2021, vol. 6 (7), pp. 7333-7366.
15. Somersalo E., Cheney M., Isaacson D. Existence and Uniqueness for Electrode Models for Electric Current Computed Tomography. *SIAM J. Appl. Math.*, 1992, vol. 52, pp. 1034-1040.

**NUMERICAL STUDY OF THE INFLUENCE OF CHANGES  
IN ELECTRICAL CONDUCTIVITY ON THE SOLUTION  
OF THE DIRECT PROBLEM  
OF ELECTRICAL IMPEDANCE TOMOGRAPHY**

**Anna A. Afanaseva**

Postgraduate Student, Department of Computational Mathematics  
and Computer Modelling,  
Tomsk State University  
anna.afanaseva@stud.tsu.ru  
Prosp. Lenina, 36, 634050 Tomsk, Russian Federation

**Alexander V. Starchenko**

Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor,  
Head of the Department of Computational Mathematics and Computer Modelling,  
Senior Researcher, Regional Mathematical Center,  
Tomsk State University  
starch@math.tsu.ru  
Prosp. Lenina, 36, 634050 Tomsk, Russian Federation

**Abstract.** Electrical Impedance Tomography (EIT) uses electrical stimulation and measurement at the body surface to image the electrical properties of internal tissues. It has the advantage of non-invasiveness and high temporal resolution but suffers from poor spatial resolution and sensitivity to electrode movement and contact quality. EIT can be useful to applications where there are conductive contrasts between tissues, fluids or gases, such as imaging of cancerous or ischemic tissue or functional monitoring of breathing, blood flow, gastric motility and neural activity. The work uses a complete electrode model (CEM), which is a practical model in EIT, which most realistically models electrodes. This model can simulate EIT measurements with much greater accuracy than continuum models. The mathematical formulation of the problem is written as follows:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, (x, y) \in D;$$

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial n} = 0, (x, y) \notin \bigcup_{l=1}^L E_l;$$

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{z_l E_l} \left( \int_{E_l} u \, ds + z_l I_l \right) - \frac{u}{z_l}, (x, y) \in E_l, l = 1, \dots, L;$$

$$\sum_{l=1}^L I_l = 0.$$

In the article [15] shows that in order for the problem to have a unique solution, the following condition must be met:

$$\sum_{l=1}^L U_l = 0.$$

Numerical studies are consistent with the conclusions from the article [14]. Useful information in the EIT is contained mainly on a small part of the boundary, i.e., on the electrodes close to the perturbations of the electrical conductivity. Boundary measurements, which are the input to the inverse conductivity problem, are more sensitive to anomalies near the boundary and to larger anomalies. This study is useful in order to know the critical values of the parameters (size, location) of a low-amplitude perturbation of conductivity, at which the measurements are insensitive and, therefore, inhomogeneities cannot be detected.

**Key words:** elliptic equation with piecewise constant coefficients, unstructured grids, complete electrode model, conductivity, contact impedance.