www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.4.1

УДК 519.63
ББК 22.19

Дата поступления статьи: 18.06.2023
Дата принятия статьи: 09.09.2023

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Мурат Хамидбиевич Бештоков

Кандидат физико-математических наук, доцент,
ведущий научный сотрудник отдела вычислительных методов,
Институт прикладной математики и автоматизации
Кабардино-Балкарского научного центра РАН
beshtokov-murat@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-2968-9211
ул. Шортанова, 89а, 360000 г. Нальчик, Российская Федерация

Валентина Аркадьевна Водахова

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры
и дифференциальных уравнений,
Институт физики и математики Кабардино-Балкарского государственного
университета им. Х.М. Бербекова
v.a.vod@yandex.ru
https://orcid.org/0009-0001-9990-7467
ул. Чернышевского, 173, 360004 г. Нальчик, Российская Федерация

Мариана Малиловна Исакова

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры
и дифференциальных уравнений,
Институт физики и математики Кабардино-Балкарского государственного
университета им. Х.М. Бербекова
isakova2206@mail.ru
https://orcid.org/0000-0003-1189-9456
ул. Чернышевского, 173, 360004 г. Нальчик, Российская Федерация

Аннотация. Изучена первая краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами. Для численного решения поставленной задачи построена разностная схема высокого порядка точности. Методом энергетических неравенств получена априорная оценка в разностной форме. Из этой оценки следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным, а также сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью $O(h^4+\tau^2)$. Построен алгоритм приближенного решения, проведены численные расчеты тестовых примеров, иллюстрирующие полученные в работе теоретические результаты.

Ключевые слова: первая краевая задача, нагруженное уравнение, уравнение теплопроводности, разностная схема, априорная оценка, устойчивость и сходимость.

Введение

Нагруженными дифференциальными уравнениями в литературе принято называть уравнения, содержащие значения решения или его производных на многообразиях меньшей размерности, чем размерность области определения искомой функции [9].

Настоящая работа посвящена приближенному методу решения первой начально-краевой задачи для нагруженного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами. На равномерной сетке построена разностная схема повышенного порядка точности. Для решения разностной задачи с помощью метода энергетических неравенств получена априорная оценка, откуда следуют единственность и непрерывная зависимость решения от входных данных задачи, а также сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью $O(h^4+\tau^2)$. Построен алгоритм приближенного решения первой начально-краевой задачи для нагруженного уравнения теплопроводности, проведены численные расчеты тестовых примеров, иллюстрирующие полученные в работе теоретические результаты.

Численным методам решения различных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных посвящены работы [1–4; 14]. Построению разностных схем повышенного порядка аппроксимации посвящены работы авторов [13; 16–18].

Настоящая работа является непосредственным продолжением серии работ авторов в этом направлении [6; 7; 13; 14], в которых в основном были предложены разностные методы решения локальных и нелокальных краевых задач для нагруженных уравнений теплопроводности и Аллера.

1. Постановка задачи

В замкнутом прямоугольнике $\overline{Q}_T=\{(x,t): 0\le x\le l,\ 0\le t\le T\}$ рассмотрим первую краевую задачу для нагруженного уравнения теплопроводности

$$u_t=k(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\sum_{s=1}^{m}q_s(x,t)u(\xi_s,t)+f(x,t),\quad 0<x<l,\ 0<t\le T, \tag{1}$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\ 0\le t\le T, \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ 0\le x\le l, \tag{3}$$

где

$$0<c_0\le k(t)\le c_1,\quad |q_s(x,t)|,|q_{s,xx}(x,t)|\le c_2,\quad s=1,2,\dots,m,$$
$$u(x,t)\in C^{6,3}(\overline{Q}_T),\quad k(t)\in C^1[0,T],\quad q_s(x,t),f(x,t)\in C^{4,1}(\overline{Q}_T), \tag{4}$$

$\xi_s,(s=1,2,...,m)$ — произвольные точки интервала $(0,l)$: $0<\xi_1<...<\xi_m<l$.

Задачи такого типа возникают при изучении переноса примеси вдоль русла рек, когда в водоем поступает загрязняющее вещество из m источников определенной интенсивности [5].

2. Устойчивость и сходимость разностной схемы

Для решения задачи (1)–(3) применим метод конечных разностей. Для этого на равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}=\overline{\omega}_h\times\overline{\omega}_\tau$, где $\overline{\omega}_h=\{x_i=ih,\ i=\overline{0,N},\ h=l/N\}$, $\overline{\omega}_\tau= =\{t_j=j\tau,\ j=0,1,\dots,j_0,\ \tau=T/j_0\}$ дифференциальной задаче (1)–(3) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^4+\tau^2)$:

$$\mathcal{H}_h y_t=\frac{1}{2}aY_{\bar{x}x}-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m}\mathcal{H}_h d_s Y(\xi_s,t_j)+\mathcal{H}_h\varphi, \tag{5}$$

$$y_0^{(\sigma)}=y_N^{(\sigma)}=0,\quad y(x_i,0)=u_0(x_i), \tag{6}$$

где

$$y_t=\frac{y^{j+1}-y^j}{\tau},\quad \mathcal{H}_h y_i^j=\frac{1}{12}\left(y_{i+1}^j+10y_i^j+y_{i-1}^j\right)=y_i^j+\frac{h^2}{12}y_{\bar{x}x,i}^j,\quad i=1,\dots,N-1,$$

$$Y^{j+1}=y^{j+1}+y^j,\ a^j=k(t_{j+\frac{1}{2}}),\ d_{s,i}^j=q_s(x_i,t_{j+\frac{1}{2}}),\ \varphi_i^j=f(x_i,t_{j+\frac{1}{2}}),\ x_{i_s}\le\xi_s\le x_{i_s+1},$$

$$\eta_s^j=\frac{(\xi_s-x_{i_s})(\xi_s-x_{i_s+1})(\xi_s-x_{i_s+2})}{-6h^3}y_{i_s-1}^j+\frac{(\xi_s-x_{i_s-1})(\xi_s-x_{i_s+1})(\xi_s-x_{i_s+2})}{2h^3}y_{i_s}^j+$$
$$+\frac{(\xi_s-x_{i_s-1})(\xi_s-x_{i_s})(\xi_s-x_{i_s+2})}{-2h^3}y_{i_s+1}^j+\frac{(\xi_s-x_{i_s-1})(\xi_s-x_{i_s})(\xi_s-x_{i_s+1})}{6h^3}y_{i_s+2}^j, \tag{7}$$

где $\eta_s^j=y(\xi_s,t_j)$, $Y(\xi_s,t_j)=\eta_s^{j+1}+\eta_s^j$.

В дальнейшем будем считать, что $h<\min\{\xi_1,l-\xi_m\}$.

Найдем априорную оценку решения (5), (6) методом энергетических неравенств, в связи с чем введем скалярные произведения и норму в виде:

$$(u,v)=\sum_{i=1}^{N-1}u_iv_ih,\ (u,v]=\sum_{i=1}^{N}u_iv_ih,\ (u,u)=(1,u^2)=\|u(\cdot,t)\|_0^2=\|u\|_0^2.$$

Справедлива следующая лемма [10, с. 120].

Лемма 1. *Для всякой функции $y(x)$, заданной на равномерной сетке*

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = 0, 1, ..., N, x_0 = 0, x_N = l\}$$

и обращающейся в нуль при $x = 0$ и $x = l$, справедливы оценки

$$\frac{h^2}{4}\|y_{\bar{x}}]|^2 \le \|y\|^2 \le \frac{l^2}{8}\|y_{\bar{x}}]|^2.$$

Получим теперь некоторые вспомогательные неравенства с учетом леммы 1:

$$(y, \mathcal{H}_h y) = \left(y, y + \frac{h^2}{12} y_{\bar{x}x}\right) = (y, y) + \left(y, \frac{h^2}{12} y_{\bar{x}x}\right) = (y, y) - \left(y_{\bar{x}}, \frac{h^2}{12} y_{\bar{x}}\right] \ge$$

$$\ge \left(1, y^2 - \frac{1}{3} y^2\right) = \left(1, \frac{2}{3} y^2\right) = \frac{2}{3}\|y\|_0^2. \qquad (8)$$

$$\left(1, \left(y + \frac{h^2}{12} y_{\bar{x}x}\right)^2\right) = \left(1, y^2 + \frac{2h^2}{12} y y_{\bar{x}x} + \frac{h^4}{144} y_{\bar{x}x}^2\right) = \left(1, y^2 - \frac{2h^2}{12}\left(y_{\bar{x}}\right)^2 + \frac{h^4}{144} y_{\bar{x}x}^2\right).$$

Из последнего находим

$$\left(1, y^2 - \frac{2h^2}{12}\left(y_{\bar{x}}\right)^2\right) \le \left(1, \left(y + \frac{h^2}{12} y_{\bar{x}x}\right)^2\right) \le \left(1, y^2 + \frac{h^4}{144} y_{\bar{x}x}^2\right)$$

или

$$\left(1, y^2\right) - \left(1, \frac{2h^2}{12}\left(y_{\bar{x}}\right)^2\right) \le \left(1, \left(y + \frac{h^2}{12} y_{\bar{x}x}\right)^2\right) \le \left(1, y^2\right) + \left(1, \frac{h^4}{144} y_{\bar{x}x}^2\right).$$

Тогда из последнего получим

$$\left(1, y^2\right) - \frac{2}{3}\left(1, y^2\right) \le \left(1, \left(y + \frac{h^2}{12} y_{\bar{x}x}\right)^2\right) \le \left(1, y^2\right) + \frac{1}{9}\left(1, y^2\right).$$

Итак,

$$\frac{1}{3}\|y\|_0^2 \le \|\mathcal{H}_h y\|_0^2 \le \frac{10}{9}\|y\|_0^2. \qquad (9)$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (4)*, тогда существует такое* τ_0, *что если* $\tau \le \tau_0$, *то для решения разностной задачи* (5), (6) *справедлива априорная оценка*

$$\|y^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^{j}\left(\|y_{\bar{x}}^{j+1}]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{j}]|_0^2\right)\tau \le M\left(\|y^0\|_0^2 + \sum_{j'=0}^{j}\|\varphi^{j'}\|_0^2\tau\right),$$

где $M = \mathrm{const} > 0$, *не зависящая от* h *и* τ.

Доказательство. С целью найти априорную оценку решения задачи (5), (6), умножим уравнение (5) скалярно на $Y = y^j + y^{j+1}$:

$$(Y, \mathcal{H}_h y_t) = \frac{1}{2}\left(aY_{\bar{x}x}, Y\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{s=1}^{m}\mathcal{H}_h d_s Y(\xi_s, t_j), Y\right) + \left(\mathcal{H}_h \varphi, Y\right), \qquad (10)$$

Преобразуем слагаемые, входящие в (10)

$$(Y,\mathcal{H}_h y_t)=\left(y^{j+1}+y^j,y_t+\frac{h^2}{12}y_{\bar{x}xt}\right)=\left(y^{j+1}+y^j,y_t\right)+\left(y^{j+1}+y^j,\frac{h^2}{12}y_{\bar{x}xt}\right)=$$

$$=\left(y^{j+1}+y^j,\frac{1}{\tau}\left(y^{j+1}-y^j\right)\right)-\frac{h^2}{12}\left(y_{\bar{x}}^{j+1}+y_{\bar{x}}^j,\frac{1}{\tau}\left(y_{\bar{x}}^{j+1}-y_{\bar{x}}^j\right)\right]=$$

$$=\left(\|y\|_0^2\right)_t-\frac{h^2}{12}\left(\|y_{\bar{x}}]|_0^2\right)_t;$$

$$\frac{1}{2}\left(aY_{\bar{x}x},Y\right)=-\frac{1}{2}\left(a,(Y_{\bar{x}})^2\right]\geq-\frac{c_0}{2}\|Y_{\bar{x}}]|_0^2;$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sum_{s=1}^{m}\mathcal{H}_h d_s Y(\xi_s,t_j),Y\right)=-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m}Y(\xi_s,t_j)\Big(\mathcal{H}_h d_s,Y\Big)\leq$$

$$\leq\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{1}{4}Y^2(\xi_s,t_j)+\frac{c_2^2}{4}\Big(1,Y\Big)^2\right)\leq M_1\sum_{s=1}^{m}Y^2(\xi_s,t_j)+\frac{mlc_2^2}{4}\Big(1,Y^2\Big)\leq$$

$$\leq M_2\left(\varepsilon\|Y_{\bar{x}}]|_0^2+\frac{1}{4\varepsilon}\|Y\|_0^2\right)+\frac{mlc_2^2}{4}\Big(1,Y^2\Big)\leq\varepsilon M_2\|Y_{\bar{x}}]|_0^2+M_3^{\varepsilon}\|Y\|_0^2;$$

$$(\mathcal{H}_h\varphi,Y)\leq\frac{1}{2}\|Y\|_0^2+\frac{1}{2}\|\mathcal{H}_h\varphi\|_0^2.$$

Учитывая полученные преобразования, из (6) находим

$$\left(\|y\|_0^2\right)_t-\frac{h^2}{12}\left(\|y_{\bar{x}}]|_0^2\right)_t+\left(\frac{c_0}{2}-M_2\varepsilon\right)\|Y_{\bar{x}}]|_0^2\leq\left(\frac{1}{2}+M_3^{\varepsilon}\right)\|Y\|_0^2+\frac{1}{2}\|\mathcal{H}_h\varphi\|_0^2. \qquad (11)$$

Выбирая $\varepsilon=\frac{c_0}{4M_2}$, из (11) находим

$$\left(\|y\|_0^2\right)_t-\frac{h^2}{12}\left(\|y_{\bar{x}}]|_0^2\right)_t+\frac{c_0}{4}\|Y_{\bar{x}}]|_0^2\leq M_4\|Y\|_0^2+\frac{1}{2}\|\mathcal{H}_h\varphi\|_0^2, \qquad (12)$$

где M_1, M_2, M_3, $M_4=\mathrm{const}>0$, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи (1)–(3).

Просуммируем (12) по j' от 0 до j, умножив обе части на τ, тогда с помощью леммы получаем

$$\frac{2}{3}\|y^{j+1}\|_0^2+\sum_{j'=0}^{j}\|Y_{\bar{x}}^{j'}]|_0^2\tau\leq M_5\sum_{j'=0}^{j}\|Y^{j'}\|_0^2\tau+M_6\left(\sum_{j'=0}^{j}\|\mathcal{H}_h\varphi^{j'}\|_0^2\tau+\|y^0\|_0^2\right). \qquad (13)$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (13), тогда с учетом $(a+b)^2\leq$ $\leq 2\left(a^2+b^2\right)$, имеем

$$\sum_{j'=0}^{j}\|Y^{j'}\|_0^2\tau=\sum_{j'=0}^{j}\|y^{j'+1}+y^{j'}\|_0^2\tau\leq 2\sum_{j'=0}^{j}\left(\|y^{j'+1}\|_0^2+\|y^{j'}\|_0^2\right)\tau=$$

$$= 2\sum_{j'=0}^{j} \|y^{j'+1}\|_0^2\tau + 2\sum_{j'=0}^{j} \|y^{j'}\|_0^2\tau = 2\sum_{j'=1}^{j+1} \|y^{j'}\|_0^2\tau + 2\sum_{j'=0}^{j} \|y^{j'}\|_0^2\tau =$$

$$= 2\|y^{j+1}\|_0^2 + 2\|y^0\|_0^2 + 4\sum_{j'=1}^{j} \|y^{j'}\|_0^2\tau. \tag{14}$$

Учитывая (14), из (13) находим

$$\left(\frac{2}{3} - 2M_5\tau\right)\|y^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^{j} \|Y_{\bar{x}}^{j'}]|_0^2\tau \le$$

$$\le M_5\sum_{j'=0}^{j} \|y^{j'}\|_0^2\tau + M_6\left(\sum_{j'=0}^{j} \|\mathcal{H}_h\varphi^{j'}\|_0^2\tau + \|y^0\|_0^2\right). \tag{15}$$

Выбирая $\tau \le \tau_0 = \frac{1}{6M_5}$, из (15) находим

$$\|y^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^{j} \|Y_{\bar{x}}^{j'}]|_0^2\tau \le M_7\sum_{j'=0}^{j} \|y^{j'}\|_0^2\tau + M_8\left(\sum_{j'=0}^{j} \|\mathcal{H}_h\varphi^{j'}\|_0^2\tau + \|y^0\|_0^2\right), \tag{16}$$

где M_5, M_6, M_7, $M_8 = \mathrm{const} > 0$, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи (1)–(3).

Применяя разностный аналог леммы Гронуолла [11] к (16), находим оценку

$$\|y^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^{j} \|Y_{\bar{x}}^{j'}]|_0^2\tau \le M_9\left(\sum_{j'=0}^{j} \|\mathcal{H}_h\varphi^{j'}\|_0^2\tau + \|y^0\|_0^2\right), \tag{17}$$

где $M_9 = \mathrm{const} > 0$, зависящее только от входных данных рассматриваемой задачи (1)–(3).

Из априорной оценки (17) следуют единственность решения разностной задачи (5), (6), а также непрерывная зависимость решения задачи от входных данных.

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1)–(3), $y(x_i,t_j) = y_i^j$ — решение разностной задачи (5), (6). Для оценки точности разностной схемы (5), (6) рассмотрим разность $z_i^j = y_i^j - u_i^j$, где $u_i^j = u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y = z + u$ в соотношения (5), (6), получаем задачу для функции z:

$$\mathcal{H}_h z_t = \frac{1}{2}aZ_{\bar{x}x} - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m} \mathcal{H}_h d_s Z(\xi_s, t_j) + \mathcal{H}_h\Psi, \tag{18}$$

$$z_0^{(\sigma)} = z_N^{(\sigma)} = 0, \quad z(x_i, 0) = 0, \tag{19}$$

где $\mathcal{H}_h\Psi = O\left(h^4 + \tau^2\right)$ — погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1)–(3) разностной схемой (5), (6) в классе решений $u = u(x,t)$ задачи (1)–(3).

Применяя априорную оценку (17) к решению задачи (18), (17), получаем неравенство

$$\|z^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^{j} \|Z_{\bar{x}}^{j'}]|_0^2\tau \le M_9 \sum_{j'=0}^{j} \|\mathcal{H}_h \Psi^{j'}\|_0^2 \tau, \tag{20}$$

где M_9 не зависит от h и τ.

Из априорной оценки (20) следует сходимость решения разностной задачи (5), (6) к решению дифференциальной задачи (1)–(3) в смысле нормы $\|z^{j+1}\|_1^2$ на каждом слое так, что существует такое τ_0, что при $\tau \le \tau_0$ справедлива оценка

$$\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_1 \le M\Big(h^4 + \tau^2\Big),$$

где $\|z^{j+1}\|_1^2 = \|z^{j+1}\|_0^2 + \sum\limits_{j'=0}^{j} \|Z_{\bar{x}}^{j'}]|_0^2\tau$.

3. Алгоритм численного решения

Для приближенного решения задачи (1)–(3) приведем разностную схему (5), (6) к расчетному виду. Тогда уравнение (5) приводится к следующему виду [8]:

$$A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} - \frac{1}{24}\sum_{s=1}^{m}\Big(d_{s,i-1}^j + 10 d_{s,i}^j + d_{s,i+1}^j\Big)\eta_s^{j+1} = -F_i^j,\ i = \overline{1, N-1}, \tag{21}$$

где

$$A_i = B_i = -\frac{1}{12\tau} + \frac{a^j}{2h^2}, \quad C_i = \frac{5}{6\tau} + \frac{a^j}{h^2},$$

$$F_i^j = AA_i y_{i-1}^j - CC_i y_i^j + BB_i y_{i+1}^j - \frac{1}{24}\sum_{s=1}^{m}\Big(d_{s,i-1}^j + 10 d_{s,i}^j + d_{s,i+1}^j\Big)\eta_s^j + \frac{1}{12}\Big(\varphi_{i-1}^j + 10\varphi_i^j + \varphi_{i+1}^j\Big),$$

$$AA_i = BB_i = \frac{1}{12\tau} + \frac{a^j}{2h^2}, \quad C_i = -\frac{5}{6\tau} + \frac{a^j}{h^2}.$$

Таким образом, с учетом (21), разностная схема (5), (6) приводится к следующей системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} - \frac{1}{24}\sum\limits_{s=1}^{m}\Big(d_{s,i-1}^j + 10 d_{s,i}^j + d_{s,i+1}^j\Big)\eta_s^{j+1} = -F_i^j, \\ y_0 = y_N = 0, \\ y(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{22}$$

Решение системы (22) будем искать в виде

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \sum_{s=1}^{m} \beta_{s,i+1}\eta_s + \delta_{i+1}, \quad i = \overline{0, N-1}. \tag{23}$$

Найдем теперь $\alpha_i,\ \beta_{s,i+1},\ \delta_i,\ i = \overline{1, N-1}$.
Для первой краевой задачи

$$\alpha_1 = \beta_{s,1} = \delta_1 = 0.$$

Определим y_{i-1} с учетом (23)

$$y_{i-1} = \alpha_i y_i + \sum_{s=1}^{m} \beta_{s,i}\eta_s + \delta_i = \alpha_i\alpha_{i+1}y_{i+1} + \sum_{s=1}^{m} (\alpha_i\beta_{s,i+1} + \beta_{s,i})\,\eta_s + \alpha_i\delta_{i+1} + \delta_i. \quad (24)$$

Подставляя (23), (24) в (21), получим

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i\alpha_i}, \quad \beta_{s,i+1} = \frac{A_i\beta_{s,i} - \bar{d}_{i,s}}{C_i - A_i\alpha_i}, \quad \delta_{i+1} = \frac{F_i^j + A_i\delta_i}{C_i - A_i\alpha_i}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (25)$$

где $\bar{d}_{i,s} = \frac{1}{24}\left(d^j_{s,i-1} + 10d^j_{s,i} + d^j_{s,i+1}\right)$, $s = \overline{1,m}$.

Выразим в (23) неизвестные y_i, y_{i+1}, $i = \overline{0,N}$ через η_s. В связи с чем решение будем искать в виде

$$y_i = \sum_{s=1}^{m} H_{s,i}\eta_s + \Phi_i, \quad y_{i+1} = \sum_{s=1}^{m} H_{s,i+1}\eta_s + \Phi_{i+1}. \quad (26)$$

Подставим (26) в (23) и определим $H_{s,i}, \Phi_i$

$$\sum_{s=1}^{m} H_{s,i}\eta_s + \Phi_i = \alpha_{i+1}\sum_{s=1}^{m} H_{s,i+1}\eta_s + \alpha_{i+1}\Phi_{i+1} + \sum_{s=1}^{m}\beta_{s,i+1}\eta_s + \delta_{i+1},$$

откуда следует

$$H_{s,i} = \alpha_{i+1}H_{s,i+1} + \beta_{s,i+1}, \quad \Phi_i = \alpha_{i+1}\Phi_{i+1} + \delta_{i+1}, \quad i = \overline{N-1,0}, \quad s = \overline{1,m}. \quad (27)$$

Для первой краевой задачи $H_N = \Phi_N = 0$.

Определим теперь η_s, для этого вычислим $y_i = \sum\limits_{s=1}^{m} H_{s,i}\eta_s + \Phi_i$ в узловых точках $i = \{i_s - 1, i_s, i_s + 1, i_s + 2\}$ и получим выражения:

$$y_{i_s-1} = \sum_{s=1}^{m} H_{s,i_s-1}\eta_s + \Phi_{i_s-1}, \quad (28)$$

$$y_{i_s} = \sum_{s=1}^{m} H_{s,i_s}\eta_s + \Phi_{i_s}, \quad (29)$$

$$y_{i_s+1} = \sum_{s=1}^{m} H_{s,i_s+1}\eta_s + \Phi_{i_s+1}, \quad (30)$$

$$y_{i_s+2} = \sum_{s=1}^{m} H_{s,i_s+2}\eta_s + \Phi_{i_s+2}, \quad (31)$$

где $s = 1, 2, ..., m$.

Подставляя (28)–(31) в (7) вместо y_{i_s-1}, y_{i_s}, y_{i_s+1}, y_{i_s+1}, получим систему из m уравнений относительно η_p, $p = 1, 2, \ldots, m$:

$$\eta_p = x_p^{(1)}\sum_{s=1}^{m} H_{s,i_p-1}\eta_s + x_p^{(1)}\Phi_{i_p-1} + x_p^{(2)}\sum_{s=1}^{m} H_{s,i_p}\eta_s + x_p^{(2)}\Phi_{i_p} +$$

$$+x_p^{(3)}\sum_{s=1}^{m}H_{s,i_{p+1}}\eta_s+x_p^{(3)}\Phi_{i_p+1}+x_p^{(4)}\sum_{s=1}^{m}H_{s,i_{p+2}}\eta_s+x_p^{(4)}\Phi_{i_p+2}, \tag{32}$$

где

$$x_p^{(1)}=(\xi_s-x_{i_s})(\xi_s-x_{i_s+1})(\xi_s-x_{i_s+2})/(-6h^3),$$

$$x_p^{(2)}=(\xi_s-x_{i_s-1})(\xi_s-x_{i_s+1})(\xi_s-x_{i_s+2})/(2h^3),$$

$$x_p^{(3)}=(\xi_s-x_{i_s-1})(\xi_s-x_{i_s})(\xi_s-x_{i_s+2})/(-2h^3),$$

$$x_p^{(4)}=(\xi_s-x_{i_s-1})(\xi_s-x_{i_s})(\xi_s-x_{i_s+1})/(6h^3).$$

Решая систему (32) методом Гаусса и далее подставляя найденные η_p, $p=\overline{1,m}$ в (26), находим искомое решение y_i системы (22).

Замечание 1. Предложенный алгоритм численного решения реализуется с использованием метода прогонки и метода Гаусса [12]. Хорошо известно, что вычислительная сложность последовательного метода прогонки для решения системы линейных уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов размерности N составляет $O(N)$ (количество операций умножений и делений $Q\approx 5N$ [15, с. 422]), или линейную сложность, то есть время выполнения метода прогонки растет линейно с увеличением размера матрицы. Вычислительная сложность последовательного варианта метода Гаусса для решения системы линейных уравнений размерности m составляет $O\left(m^3\right)$ (количество операций умножений и делений $Q\approx\frac{m^3}{3}$ [15, с. 401]), или кубическую сложность, то есть время выполнения метода Гаусса растет кубически с увеличением размера матрицы. Это связано с тем, что основным шагом алгоритма является приведение матрицы к треугольному виду, что требует $O\left(m^3\right)$ операций для обычных матриц. Для систем линейных уравнений с размерностью $m>20$ метод Гаусса может потребовать значительных вычислительных ресурсов и занять много времени.

Следовательно, общая вычислительная сложность предлагаемого алгоритма численного решения, представляющего собой комбинацию метода прогонки и метода Гаусса для матриц, близких к трехдиагональным, зависит от размерности исходной матрицы коэффициентов разностной схемы N и размерности матрицы коэффициентов системы уравнений, используемой для определения значения решения в узлах нагрузки, m и составляет с учетом (22)–(32) $O(mN+m^3)$ (количество операций умножений и делений $Q\approx(6m+20)N+\frac{m^3}{3}$). Как видно, эффективность алгоритма в целом зависит от соотношения величин N и m, поэтому для исключения (или уменьшения) влияния метода Гаусса на эффективность (сложность) предлагаемого алгоритма рекомендуется выбирать величину $m\le m_0$ следующим образом:

$$m_0=\begin{cases}N^{\frac{1}{3}}, \text{ если } N<10^4\\ 20, \text{ если } N\ge 10^4.\end{cases}$$

Отметим, что данный алгоритм численного решения реализован с использованием метода Гаусса для решения системы линейных уравнений размерности m, однако, существуют более эффективные методы и техники, позволяющие уменьшить количество арифметических операций при $m>20$, например, итерационные методы.

4. Тестовая задача и численные результаты

Рассмотрим следующий тестовый пример

$$u_t = e^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e^{4x+t} u(\xi_1, t) - \cos(x+t) u(\xi_2, t) - \sin(x+t) u(\xi_3, t) + f(x,t),$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad u(x,0) = u_0(x),$$

где $f(x,t) = 3t^2(x^8 - lx^7) - e^t t^3(56x^6 - 42lx^5) + e^{(4x+t)} t^3(\xi_1^8 - l\xi_1^7) + \cos(x+t)t^3(\xi_2^8 - l\xi_2^7) + \sin(x+t)t^3(\xi_3^8 - l\xi_3^7)$, $l = 1$, $T = 1$.

Точным решением задачи является функция

$$u(x,t) = t^3(x^8 - lx^7).$$

Ниже в таблице при уменьшении шагов сетки приведены максимальные значения погрешности ($z = y - u$) и вычислительный (апостериорный) порядок сходимости (ПС) в нормах $\|\cdot\|_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$, где $\|y\|_{C(\bar{w}_{h\tau})} = \max\limits_{(x_i,t_j)\in\bar{w}_{h\tau}} |y|$, когда $h^2 = \tau$. Погрешность уменьшается в соответствии с порядком аппроксимации $O(h^4 + \tau^2)$.

Вычислительный (апостериорный) порядок сходимости будем определять по принципу Рунге

$$\text{ПС} = \log_2 \frac{||z_1||}{||z_2||},$$

где z_1 и z_2– погрешности, соответствующие шагам $0,5\,h$, h.

Изменение погрешности и порядка сходимости
в нормах $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$ для задачи (1)–(3)
при уменьшении размера сетки при различных значениях
$\xi_1 = 0,21; \xi_2 = 0,51; \xi_3 = 0,91$ **на** $t = 1$**, когда** $h^2 = \tau$**,** $m = 3$

ξ_1	ξ_2	ξ_3	h	$\max\limits_{0<j<m} \|z^j\|_0$	ПС в $\|\cdot\|_0$	$\|z\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$	ПС в $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$
0,21	0,51	0,91	1/10	8,29313e-5		1,24647e-4	
			1/20	5,16237e-6	4,005811	7,80617e-6	3,997098
			1/40	3,20023e-7	4,011789	4,87835e-7	4,000150
			1/80	2,01599e-8	3,988608	3,04689e-8	4,000984
			1/160	1,24992e-9	4,011581	1,90533e-9	3,999224

Замечание 2. Основным результатом исследования является разработка новой численной схемы повышенного порядка аппроксимации для приближенного решения первой начально-краевой задачи для нагруженного уравнения теплопроводности. Исследование проводится методом энергетических неравенств, получена априорная оценка в разностной форме для решения разностной задачи. Из полученной оценки следуют единственность и устойчивость решения относительно входных данных, а также сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью $O(h^4 + \tau^2)$ (в предположении существования последнего в классе достаточно гладких функций). Построен алгоритм приближенного решения, проведены численные расчеты тестового примера, иллюстрирующие полученные в работе теоретические результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдуллаев, В. М. Конечноразностные методы решения нагруженных параболических уравнений / В. М. Абдуллаев, К. Р. Айда-заде // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2016. — № 56 (1). — С. 99–112.

2. Абдуллаев, В. М. О численном решении нагруженных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / В. М. Абдуллаев, К. Р. Айда-заде // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2004. — № 44 (9). — С. 1585–1595.

3. Абдуллаев, В. М. Численное решение задач оптимального управления нагруженными сосредоточенными системами / В. М. Абдуллаев, К. Р. Айда-заде // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2006. — № 46 (9). — С. 1566–1581.

4. Алиханов, А. А. Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их численной реализации / А. А. Алиханов, А. М. Березгов, М. Х. Шхануков-Лафишев // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2008. — № 48 (9). — С. 1619–1628.

5. Анохин, Ю. А. Математические модели и методы управления крупномасштабным водным объектом / Ю. А. Анохин, А. Б. Горстко, Л. Ю. Дамешек. — Новосибирск : Наука, 1987. — 195 с.

6. Бештоков, М. Х. Нелокальные краевые задачи для уравнения конвекции – диффузии дробного порядка / М. Х. Бештоков, В. А. Водахова // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2019. — № 29 (4). — С. 459–482.

7. Бештоков, М. Х. Сеточные методы решения нелокальных краевых задач для уравнения конвекции – диффузии дробного порядка с вырождением / М. Х. Бештоков, В. А. Водахова // Научные ведомости БелГУ. Серия «Математика, Физика». — 2019. — № 51 (3). — С. 347–365.

8. Воеводин, А. Ф. Численные методы расчета одномерных систем / А. Ф. Воеводин, С. М. Шугрин. — Новосибирск : Наука, 1981. — 208 с.

9. Нахушев, А. М. Нагруженные уравнения и их приложения / А. М. Нахушев // Дифференц. уравнения. — 1983. — № 19 (1). — С. 86–94.

10. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. — М. : Наука, 1983. — 616 с.

11. Самарский, А. А. Устойчивость разностных схем / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — М. : Наука, 1983. — 416 с.

12. Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — М. : Наука, 1989. — 432 с.

13. Alikhanov, A. A. The Crank-Nicolson Type Compact Difference Scheme for a Loaded Time-Fractional Hallaire's Equation / A. A. Alikhanov, M. Kh. Beshtokov, M. Mehra // Fract. Calc. Appl. Anal. — 2021. — № 24 (4). — P. 1231–1256.

14. Beshtokov, M. Kh. The Third Boundary Value Problem for Loaded Differential Sobolev Type Equation and Grid Methods of Their Numerical Implementation / M. Kh. Beshtokov // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. Vol. — 2016. — № 158 (1). — P. 12–19.

15. Burden, R. L. Numerical Analysis / R. L. Burden, D. J. Faires, A. M. Burden. — USA : Cengage Learning, 2014. — 918 p.

16. Gao, G. H. A Compact Finite Difference Scheme for the Fractional Sub-Diffusion Equations / G. H. Gao, Z. Z. Sun // J. Comput. Phys. — 2011. — № 230 (3). — P. 586–595.

17. Lele, S. K. Compact Finite Difference Schemes with Spectral-Like Resolution / S. K. Lele // J. Comput. Phys. — 1992. — № 103 (1). — P. 16–42.

18. Sun, Z. Z. On the Compact Difference Scheme for Heat Equation with Neuman Boundary Conditions / Z. Z. Sun // Numer. Methods Partial Diff. Eqns. — 2009. — № 25. — P. 320–1341.

REFERENCES

1. Abdullaev B.M., Ayda-zade K.R. Konechnoraznostnye metody resheniya nagruzhennykh parabolicheskikh uravneniy [Finite-Difference Methods for Solving Loaded Parabolic Equations]. *Zhurn. vychisl. matem. i matem. fiz.*, 2016, no. 56 (1), pp. 99-112.

2. Abdullaev B.M., Ayda-zade K.R. O chislennom reshenii nagruzhennykh sistem obyknovennykh differentsialnykh uravneniy [On the Numerical Solution of Loaded Systems of Ordinary Differential Equations]. *Zhurn. vychisl. matem. i matem. fiz.*, 2004, no. 44 (9), pp. 1585-1595.

3. Abdullaev B.M., Ayda-zade K.R. Chislennoe reshenie zadach optimalnogo upravleniya nagruzhennymi sosredotochennymi sistemami [Numerical Solution of Optimal Control Problems for Loaded Lumped Parameter Systems]. *Zhurn. vychisl. matem. i matem. fiz.*, 2006, no. 46 (9), pp. 1566-1581.

4. Alikhanov A.A., Berezgov A.M., Shkhanukov-Lafishev M.Kh. Kraevye zadachi dlya nekotorykh klassov nagruzhennykh differentsialnykh uravneniy i raznostnye metody ikh chislennoy realizatsii [Boundary Value Problems for Certain Classes of Loaded Differential Equations and Solving Them by Finite Difference Methods]. *Zhurn. vychisl. matem. i matem. fiz.*, 2008, no. 48 (9), pp. 1619-1628.

5. Anokhin Yu.A., Gorstko A.B., Dameshek L.Yu. *Matematicheskie modeli i metody upravleniya krupnomasshtabnym vodnym obyektom* [Mathematical Models and Methods for Managing a Large-Scale Water Body]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1987. 195 p.

6. Beshtokov M.Kh., Vodakhova V.A. Nelokalnye kraevye zadachi dlya uravneniya konvektsii – diffuzii drobnogo poryadka [Nonlocal Boundary Value Problems for a Fractional-Order Convection-Diffusion Equation]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuternye nauki*, 2019, no. 29 (4), pp. 459-482.

7. Beshtokov M.Kh., Vodakhova V.A. Setochnye metody resheniya nelokalnykh kraevykh zadach dlya uravneniya konvektsii – diffuzii drobnogo poryadka s vyrozhdeniem [Grid Methods for Solving Nonlocal Boundary Value Problems for the Fractional-Order Convection-Diffusion Equation with Degeneracy]. *Nauchnye vedomosti BelGU. Seriya «Matematika, Fizika»*, 2019, no. 51 (3), pp. 347-365.

8. Voevodin A.F., Shugrin S.M. *Chislennye metody rascheta odnomernykh sistem* [Numerical Methods for Calculating One-Dimensional Systems]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1981. 208 p.

9. Nakhushev A.M. Nagruzhennye uravneniya i ikh prilozheniya [Loaded Equations and Their Applications]. *Differents. uravneniya*, 1983, no. 19 (1), pp. 86-94.

10. Samarskiy A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 616 p.

11. Samarskiy A.A., Gulin A.V. *Ustoychivost raznostnykh skhem* [Stability of Difference Schemes]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 416 p.

12. Samarskiy A.A., Gulin A.V. *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 432 p.

13. Alikhanov A.A., Beshtokov M.Kh., Mehra M. The Crank-Nicolson Type Compact Difference Scheme for a Loaded Time-Fractional Hallaire's Equation. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2021, no. 24 (4), pp. 1231-1256.

14. Beshtokov M.Kh. The Third Boundary Value Problem for Loaded Differential Sobolev Type Equation and Grid Methods of Their Numerical Implementation. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. Vol.*, 2016, no. 158 (1), pp. 12-19.

15. Burden R.L., Faires D.J., Burden A.M. *Numerical Analysis*. USA, Cengage Learning, 2014. 918 p.

16. Gao G.H., Sun Z.Z. A Compact Finite Difference Scheme for the Fractional Sub-Diffusion Equations. *J. Comput. Phys.*, 2011, no. 230 (3), pp. 586-595.

17. Lele S.K. Compact Finite Difference Schemes with Spectral-Like Resolution. *J. Comput. Phys.*, 1992, no. 103 (1), pp. 16-42.

18. Sun Z.Z. On the Compact Difference Scheme for Heat Equation with Neuman Boundary Conditions. *Numer. Methods Partial Diff. Eqns.*, 2009, no. 25, pp. 320-1341.

APPROXIMATE SOLUTION OF THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE LOADED HEAT CONDUCTION EQUATION

Murat Kh. Beshtokov

Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Leading Researcher, Department of Computational Methods,
Institute of Applied Mathematics and Automation,
Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
beshtokov-murat@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-2968-9211
Shortanova St, 89A, 360000 Nalchik, Russian Federation

Valentina A. Vodakhova

Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Department of Algebra and Differential Equations,
Institute of Physics and Mathematics,
Kabardino-Balkarian State University named after Kh.M. Berbekov
v.a.vod@yandex.ru
https://orcid.org/0009-0001-9990-7467
Chernyshevskogo St, 173, 360004 Nalchik, Russian Federation

Mariana M. Isakova

Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Department of Algebra and Differential Equations,
Institute of Physics and Mathematics,
Kabardino-Balkarian State University named after Kh.M. Berbekov
isakova2206@mail.ru
https://orcid.org/0000-0003-1189-9456
Chernyshevskogo St, 173, 360004 Nalchik, Russian Federation

Abstract. The first boundary value problem for the loaded heat equation with variable coefficients is studied. For the numerical solution of the problem posed, a difference scheme of a high order of accuracy is constructed. An a priori estimate in difference form is obtained by the method of energy inequalities. This estimate implies the uniqueness and stability of the solution with respect to the right-hand side and initial data, as well as the convergence of the solution of the difference problem to the solution of the original differential problem at a rate of $O(h^4+\tau^2)$. An algorithm for the approximate solution is constructed, and numerical calculations of test examples are carried out, illustrating the theoretical results obtained in the work.

Key words: first boundary value problem, loaded equation, heat equation, difference scheme, a priori estimate, stability and convergence.