



DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2024.1.1>

УДК 517.548+517.956
ББК 22.161.6

Дата поступления статьи: 17.01.2023

Дата принятия статьи: 01.02.2024



О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ С ЗАДАННОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ЧАСТЬЮ НА ГРАНИЦЕ

Александр Николаевич Кондрашов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных наук
и экспериментальной математики,

Волгоградский государственный университет

ankondr@mail.ru, alexander.kondrashov@volsu.ru

<https://orcid.org/0000-0003-1614-0393>

просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В [4] нами был установлен один результат (теорема 3, стр. 108) о допустимой скорости стремления к нулю решений уравнения вида $\Delta u + c(x)u = 0$ на концах римановых многообразий с метриками специального вида. Нами установлено, что в двумерном случае этот результат может быть полезен при решении задач несколько иного типа. А именно, нами установлена специальная версия теоремы единственности для уравнения Бельтрами $w_{\bar{z}} = \mu(z)w_z$.

Ключевые слова: теоремы единственности, уравнение Бельтрами, комплексная дилатация, асимптотическое поведение, μ -гиперболическая область, кольцевидная область.

1. Предварительные факты

Основная цель данной работы посвящена установлению одной специальной теоремы единственности для уравнения Бельтрами (см. раздел 3), которое тесно связано с двумерными квазиконформными отображениями и теорией обобщенных аналитических функций [2]. Однако особенностью основного результата нашей работы является

то, что получен он был на основе (двумерного) частного случая результата работы [4], касающегося асимптотического поведения решений эллиптического уравнения вида

$$\Delta u + c(x)u = 0, \quad (1)$$

заданного на некомпактном римановом многообразии $\mathcal{M}$, имеющем конец $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}$ специального вида. Эллиптические уравнения на некомпактных римановых многообразиях вызывали и вызывают интерес многих исследователей (см., например, [3; 5; 7–12; 17] и библиографию в них).

Приведем необходимый нам вышеупомянутый результат работы [4] в удобной для нас формулировке.

Пусть $\mathcal{M}$ — некомпактное многообразие класса C^∞ , снабженное римановой метрикой g класса C^∞ ; $\dim \mathcal{M} = N \geq 2$. Допускается, что $\partial \mathcal{M} \neq \emptyset$ и $\mathcal{M}$ не предполагается полным. Обозначим Δ — оператор Лапласа — Бельтрами в метрике g .

Пусть $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}$ — некоторое множество. Следуя [17, с. 212] (см. также [5]) будем называть $\mathcal{X}$ *концом* многообразия, если выполнены следующие условия

- 1) замыкание $[\mathcal{X}]$ в топологии $\mathcal{M}$ не является компактным;
- 2) $\partial \mathcal{X}$ — компакт.

Пусть $F(x) : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая функция и A произвольное вещественное число или один из символов $\infty, +\infty, -\infty$. В дальнейшем будем говорить, что $F(x)$ *стремится к A на конце $\mathcal{X}$* или имеет предел A , если для любой последовательности точек $x_n \in \mathcal{X}$ не имеющей точек накопления в $\mathcal{M}$ выполнено $F(x_n) \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$. Записываем этот факт следующим образом: $\lim_{\mathcal{X}} F(x) = A$.

Пусть $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}$ конец многообразия $\mathcal{M}$ (см. [5]). Будем предполагать, что замыкание $[\mathcal{X}]$ изометрично многообразию с краем $R_+ \times S$, где $R_+ = [\rho_0, +\infty)$, S — компактное риманово многообразие без края ($\dim S = N - 1$), на котором задана метрика

$$dl^2 = h^2(\rho)d\rho^2 + q^2(\rho)d\theta^2. \quad (2)$$

Здесь $h(\rho), q(\rho)$ — положительные гладкие функции, заданные на R_+ , а

$$d\theta^2 = \sum_{i,j=1}^{N-1} \omega_{ij}(\theta) d\theta_i d\theta_j$$

риманова метрика класса C^∞ , заданная на S . Здесь $\theta \in S$, а θ_i — обозначают локальные координаты на S . Через Δ_θ будем обозначать оператор Лапласа — Бельтрами в метрике $d\theta^2$.

Пусть на $\mathcal{M}$ определено дифференциальное уравнение (1). Решения уравнения (1) понимаются в классическом смысле, то есть это функции $u = f(x) \in C^\infty(\mathcal{M})$, дающие при подстановке в это уравнение верное равенство.

В случае $c(x) \leq 0$ на $\mathcal{M}$ уравнение (1) называется стационарным уравнением Шредингера, а в случае $c(x) \geq 0$ — уравнением Гельмгольца.

Предположим, что на конце $\mathcal{X}$ в координатах ρ, θ функция $c(x)$ имеет вид $c(x) = c(\rho)$. Тогда в этих координатах уравнение (1) имеет вид (см. [10])

$$\frac{1}{h^2(\rho)} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{h^2(\rho)} \left[(N-1) \frac{q'}{q} - \frac{h'}{h} \right] \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{q^2(\rho)} \Delta_\theta u + c(\rho)u = 0. \quad (3)$$

Имеет место теорема.

Теорема 1. Пусть задан конец $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}$ на котором метрика имеет вид (2). Предположим, что для некоторого $\alpha < 2$ выполнено

$$\int_{\rho_0}^{+\infty} \frac{h(s)}{q^{N-1}(s)} ds < \infty, \quad (4)$$

$$\sup_{\rho \in [\rho_0, +\infty)} \left(q^{2(N-2)}(\rho) + |c(\rho)| q^{2(N-1)}(\rho) \right) \left(\int_{\rho}^{+\infty} \frac{h(s)}{q^{N-1}(s)} ds \right)^{\alpha} < +\infty. \quad (5)$$

Тогда, если для некоторых решений $f_1(\rho, \theta)$, $f_2(\rho, \theta)$ уравнения (1), заданных на $\mathcal{M}$, на конце $\mathcal{X}$ имеет место асимптотика

$$\int_S |f_2(\rho, \theta) - f_1(\rho, \theta)| d\sigma = o\left(\int_{\rho}^{+\infty} \frac{h(s)}{q^{N-1}(s)} ds\right) \text{ при } \rho \rightarrow +\infty, \quad (6)$$

то $f_1(\rho, \theta) \equiv f_2(\rho, \theta)$ на $\mathcal{M}$.

2. Случай аналитических функций

Всюду далее будем использовать следующие обозначения для комплексных переменных и их вещественной и мнимой частях: $z = x + iy$, $w = u + iv$, $\zeta = \xi + i\eta$, считая, при этом, что каждая из этих комплексных переменных пробегает область расположенную в отдельном экземпляре комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Далее используем следующие стандартные обозначения:

- 1) B_r ($r > 0$) — единичный круг в комплексной плоскости с центром в нуле $0 \in \mathbb{C}$;
- 2) S_t — окружность в комплексной плоскости радиуса $t > 0$ с центром в нуле $0 \in \mathbb{C}$;
- 3) K_{t_1, t_2} — круговое кольцо в комплексной плоскости, ограниченное (концентрическими) окружностями S_{t_1}, S_{t_2} , причем такими, что $0 < t_1 < t_2$.

Здесь подразумевается, что B_r, K_{t_1, t_2} открытые множества, то есть области.

Доказательству основного результата (теорема 2) предположим следующее утверждение.

Лемма 1. Предположим, что в кольце $K_{R,1}$ ($0 < R < 1$) задана голоморфная функция $w(z)$. Если

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{1}{1-r} \int_{S_r} |\operatorname{Re} w(z)| |dz| = 0, \quad z = re^{i\varphi}, \quad (7)$$

тогда $w(z) = ia$, где $a \in \mathbb{R}$.

Доказательство. В круге $B_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ с евклидовой метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2$ введем "обобщенные" полярные координаты (ρ, θ) ($\rho \geq 0$, $\theta \in [0, \pi)$) связанные с координатами x, y формулами $x = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \rho \cos \theta$, $y = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \rho \sin \theta$, а со стандартными полярными координатами (r, φ) формулами $r = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \rho$, $\varphi = \theta$. В этих координатах евклидова метрика приобретает вид

$$ds^2 = \frac{4}{\pi^2(1 + \rho^2)^2} [d\rho^2 + (1 + \rho^2)^2 (\operatorname{arctg} \rho)^2 d\theta^2]. \quad (8)$$

Тем самым круг B_1 можно рассматривать как случай двумерного риманова многообразия (M, g) описанного в разделе 1, а кольцо $K_{R,1}$ как конец на этом многообразии. В координатах (ρ, θ) ему соответствует область $\rho > \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}R)$. На этом конце метрика (8) имеет вид (2) причем

$$h(\rho) = \frac{2}{\pi(1 + \rho^2)}, \quad q(\rho) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \rho = r. \quad (9)$$

Одномерным многообразием S выступает единичная окружность, которую мы отождествляем с промежутком $[0, \pi)$. Пусть $N = 2$, $0 \leq \alpha < 2$ задано произвольно, $c(\rho) \equiv 0$. Прямой проверкой нетрудно убедиться в выполнении условий (4), (5).

Пусть $u(z) = u(\rho, \theta) = \operatorname{Re} w(z)$. Эта функция является гармонической в евклидовой метрике. Пусть в теореме 1 $f_2(\rho, \theta) = u(\rho, \theta)$, $f_1(\rho, \theta) \equiv 0$. Тогда интеграл из левой части условия (6) равен

$$\int_S |u(\rho, \theta)| d\theta = \frac{1}{r} \int_S |u(r, \varphi)| r d\varphi = \frac{1}{r} \int_{S_r} |u(z)| |dz|, \quad r = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \rho. \quad (10)$$

Интеграл из правой части (6), с учетом $N = 2$ и (9) равен

$$\int_{\rho}^{+\infty} \frac{h(s)}{q(s)} ds = \int_{\rho}^{+\infty} \frac{ds}{(1 + s^2) \operatorname{arctg} s} = \ln \frac{\pi}{2 \operatorname{arctg} \rho} = \ln \frac{1}{r}. \quad (11)$$

Из (10), (11) имеем

$$\left(\int_{\rho}^{+\infty} \frac{h(s)}{q(s)} ds \right)^{-1} \int_S |u(\rho, \theta)| d\theta = \frac{1}{r \ln \frac{1}{r}} \int_{S_r} |u(z)| |dz| = \frac{1-r}{r \ln \frac{1}{r}} \frac{1}{1-r} \int_{S_r} |u(z)| |dz|. \quad (12)$$

Учитывая, что r и ρ связаны соотношением $r = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \rho$, видим что $r \rightarrow 1-0 \Leftrightarrow \rho \rightarrow \infty$. Так как $\frac{1-r}{r \ln \frac{1}{r}} \rightarrow 1$ при $r \rightarrow 1-0$, то из (12) и условия леммы (7) вытекает, что

$$\left(\int_{\rho}^{+\infty} \frac{h(s)}{q(s)} ds \right)^{-1} \int_S |u(\rho, \theta)| d\theta \rightarrow 0$$

при $\rho \rightarrow \infty$. По теореме 1 заключаем, что $u(x) \equiv 0$ в $K_{R,1}$. Но тогда в силу аналитичности функции $w(z) = u(z) + iv(z)$ заключаем, что $v(z)$ вещественная постоянная. Пусть $v(z) = a$, тогда $w(z) = ia$. Лемма доказана.

3. Основной результат

Пусть в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ задано дифференциальное уравнение Бельтрами

$$f_{\bar{z}}(z) = \mu(z) f_z(z), \quad (13)$$

где $\mu(z)$ — измеримая комплекснозначная функция, причем $|\mu(z)| < 1$ почти всюду в D .

Коэффициент $\mu(z) = f_{\bar{z}}(z)/f_z(z)$, напомним [1, с. 7], называется *комплексной дилатацией* отображения $f(z)$, а условие (14) эквивалентно его локальной квазиконформности. В последние десятилетия уравнению Бельтрами было посвящено довольно много работ (см., например, [23; 24] и библиографию там). Это обусловлено тем, что уравнение Бельтрами (13) является одним из средств описания квазиконформных отображений и, кроме того, оно играет ключевую роль в задаче построения изотермических координат на двумерной поверхности (см. [2]).

Известно (см. [2, глава 2]), что при условии

$$\operatorname{ess\,sup}_{D'} |\mu(z)| < 1 \text{ во всякой подобласти } D' \Subset D, \quad (14)$$

уравнение (13) имеет гомеоморфное решение $w = f(z)$, принадлежащее классу $W_{\operatorname{loc}}^{1,2}$ вместе с обратным. Это решение единственно с точностью до суперпозиции с конформным отображением. Из данного факта и классической теоремы Римана вытекает, что для $\mu(z)$ удовлетворяющего условию (14) либо существует решение $f(z)$ класса $W_{\operatorname{loc}}^{1,2}$ (вместе с обратным f^{-1}) гомеоморфно отображающее D на круг B_1 , либо на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$. В первом случае будем называть область D μ -гиперболической, а во втором μ -параболической. Всюду далее предполагается, что область D является μ -гиперболической.

Зафиксируем $\zeta = \omega(z) = \alpha(z) + i\beta(z)$ — произвольное решение (13) гомеоморфно отображающее D на единичный круг $B_1 = \{\zeta \mid \zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| < 1\}$.

Пусть $E \subset D$ — компактное подмножество и $F = D \setminus E$ кольцевидная область, внешняя часть границы которого совпадает с границей ∂D . Введем обозначения $\Sigma_t = \omega^{-1}(|\omega| = t) = \{z \mid z \in F, |\omega(z)| = 1\}$, $H_1(dz)$ — 1-мера Хаусдорфа в D .

Теорема 2. Пусть в F определено решение w уравнения (13). Если

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{1-t} \int_{\Sigma_t} |\operatorname{Re} w(z)| |\omega_z(z)| H_1(dz) = 0, \quad (15)$$

то $w(z) = ia$, где $a \in \mathbb{R}$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $E' = \omega(E) \Subset B_1$. Зафиксируем произвольно $0 < R < 1$, так чтобы E' лежало в круге $B_R = \{\zeta \mid \zeta \in B_1, |\zeta| < R\}$. Для любых t_1, t_2 , т.ч. $R \leq t_1 < t_2 \leq 1$ через K_{t_1, t_2} будем обозначать кольцо $K_{t_1, t_2} = \{\zeta \mid t_1 < |\zeta| < t_2\}$, а через $D_{t_1, t_2} = \omega^{-1}(K_{t_1, t_2})$ его прообраз в D .

Положим $W(\zeta) = w(\omega^{-1}(\zeta))$; пусть $w(z) = u(z) + iv(z)$, $W(\zeta) = U(\zeta) + iV(\zeta)$. Функция $W(\zeta)$ аналитическая в $B_1 \setminus E'$, а значит и в $K_{R, 1}$. Обозначим $I_{\zeta, z}(z)$ якобиан отображения $\zeta = \omega(z)$, то есть определитель

$$I_{\zeta, z}(z) = \begin{vmatrix} \alpha_x(z) & \alpha_y(z) \\ \beta_x(z) & \beta_y(z) \end{vmatrix} = \alpha_x(z)\beta_y(z) - \alpha_y(z)\beta_x(z).$$

Пусть $t_0, t_1 \in (R, 1)$ ($t_0 < t_1$) — произвольны. Пользуясь формулой замены переменной в интеграле (см. [21]), имеем

$$\int_{K_{t_0, t_1}} |U(\zeta)| d\xi d\eta = \int_{D_{t_0, t_1}} |u(z)| I_{\zeta, z}(z) dx dy. \quad (16)$$

Далее, по формуле Кронрода—Федерера (см., например, [18; 20; 22]), имеем

$$\int_{K_{t_0 t_1}} |U(\zeta)| d\xi d\eta = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{S_t} |U(\zeta)| |d\zeta|, \quad (17)$$

$$\int_{D_{t_0 t_1}} |u(z)| I_{\zeta, z}(z) dx dy = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\Sigma_t} |u(z)| \frac{I_{\zeta, z}(z)}{|\nabla|\omega(z)||} H_1(dz). \quad (18)$$

Вычитая из равенства (18) равенство (17) и деля на $t_1 - t_0$, и учитывая (16), приходим к соотношению

$$\frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\int_{S_t} |U(\zeta)| |d\zeta| - \int_{\Sigma_t} |u(z)| \frac{I_{\zeta, z}(z)}{|\nabla|\omega(z)||} H_1(dz) \right) = 0. \quad (19)$$

Устремляя $t_1 \rightarrow t_0 + 0$ и пользуясь известными свойствами интеграла Лебега, получаем при почти всех $t_0 \in (R, 1)$ равенство

$$\int_{S_t} |U(\zeta)| |d\zeta| = \int_{\Sigma_t} |u(z)| \frac{I_{\zeta, z}(z)}{|\nabla|\omega(z)||} H_1(dz). \quad (20)$$

Из (20) следует, что если

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} \frac{1}{1-t} \int_{\Sigma_t} |u(z)| \frac{I_{\zeta, z}(z)}{|\nabla|\omega(z)||} H_1(dz) = 0, \quad (21)$$

то для функции $W(\zeta)$ выполнено условие (7) леммы 1 и значит $W(\zeta) = ia$, a — вещественная постоянная. Отсюда будет следовать утверждение теоремы. Покажем, что из условия (15) теоремы 2 вытекает (21).

Имеем $|\omega(z)| = \sqrt{(\alpha(z))^2 + (\beta(z))^2}$ и почти всюду в $D_{R,1}$

$$|\nabla\omega(z)| = \frac{\alpha(z)\nabla\alpha(z) + \beta(z)\nabla\beta(z)}{|\omega(z)|^2}.$$

Отсюда

$$|\nabla|\omega(z)||^2 = \frac{(\alpha(z))^2 |\nabla\alpha(z)|^2 + 2\alpha(z)\beta(z)\langle\nabla\alpha(z), \nabla\beta(z)\rangle + (\beta(z))^2 |\nabla\beta(z)|^2}{(\alpha(z))^2 + (\beta(z))^2}. \quad (22)$$

Для произвольной точки дифференцируемости z функции $\omega(z)$ рассмотрим следующую неотрицательно определенную квадратичную форму

$$B(X, Y) = |\nabla\alpha(z)|^2 X^2 + 2\langle\nabla\alpha(z), \nabla\beta(z)\rangle XY + |\nabla\beta(z)|^2 Y^2.$$

В силу известных свойств квадратичных форм имеет место неравенство

$$\lambda_{\min} \leq \frac{B(X, Y)}{X^2 + Y^2} \leq \lambda_{\max}, \quad (23)$$

где $\lambda_{min}, \lambda_{max}$ — наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы квадратичной формы $B(X, Y)$. Эти числа являются решениями следующего квадратного уравнения

$$\begin{vmatrix} |\nabla\alpha(z)|^2 - \lambda & \langle\alpha(z), \beta(z)\rangle \\ \langle\alpha(z), \beta(z)\rangle & |\nabla\beta(z)|^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - S(z)\lambda + (\delta(z))^2 = 0, \quad (24)$$

где $S(z) = |\nabla\alpha(z)|^2 + |\nabla\beta(z)|^2$, $(\delta(z))^2 = |\nabla\alpha(z)|^2|\nabla\beta(z)|^2 - \langle\alpha(z), \beta(z)\rangle^2$. С помощью простых выкладок нетрудно установить равенство

$$(\delta(z))^2 = (\alpha_x(z)\beta_y(z) - \alpha_y(z)\beta_x(z))^2 = (I_{\zeta,z}(z))^2,$$

то есть $\delta(z) = I_{\zeta,z}(z)$. Решая квадратное уравнение (24), находим

$$\lambda_{min}(z) = \frac{S(z) - \sqrt{(S(z))^2 - (\delta(z))^2}}{2}, \quad \lambda_{max}(z) = \frac{S(z) + \sqrt{(S(z))^2 - (\delta(z))^2}}{2}.$$

Отсюда имеем оценку

$$\begin{aligned} \lambda_{min}(z) &= \frac{S(z) - \sqrt{(S(z))^2 - (\delta(z))^2}}{2} = \frac{(\delta(z))^2}{2(S(z) + \sqrt{(S(z))^2 - (\delta(z))^2})} \geq \\ &\geq \frac{(\delta(z))^2}{4S(z)} = \frac{(I_{\zeta,z}(z))^2}{4(|\nabla\alpha(z)|^2 + |\nabla\beta(z)|^2)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Используя соотношение

$$|\nabla\alpha(z)|^2 + |\nabla\beta(z)|^2 = 2(|\omega_z(z)|^2 + |\omega_{\bar{z}}(z)|^2),$$

из (25), получаем оценку

$$\lambda_{min}(z) \geq \frac{(I_{\zeta,z}(z))^2}{8(|\omega_z(z)|^2 + |\omega_{\bar{z}}(z)|^2)} = \frac{(I_{\zeta,z}(z))^2}{8|\omega_z(z)|^2(1 + |\mu(z)|^2)} \geq \frac{(I_{\zeta,z}(z))^2}{16|\omega_z(z)|^2}. \quad (26)$$

Полагая в (23) $X = \alpha(z)$, $Y = \beta(z)$ получим (22), следовательно из (26) вытекает, что

$$|\nabla|\omega(z)|| \geq \lambda_{min}(z) \geq \frac{I_{\zeta,z}(z)}{4|\omega_z(z)|} \Leftrightarrow I_{\zeta,z}(z) \leq 4|\nabla|\omega(z)|||\omega_z(z)|. \quad (27)$$

Снова возьмем произвольно $t_0, t_1 \in (R, 1)$, $t_0 < t_1$ и воспользовавшись формулой Кронрода—Федерера и оценкой (27), получим

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{D_{t_0 t_1}} |u(z)| (4|\nabla|\omega(z)|||\omega_z(z)| - I_{\zeta,z}(z)) dx dy = \\ &= \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\Sigma_t} |u(z)| \left(4|\omega_z(z)| - \frac{I_{\zeta,z}(z)}{|\nabla|\omega(z)||} \right) H_1(dz). \end{aligned}$$

Устремляя в этом неравенстве $t_1 \rightarrow t_0 + 0$, получаем неравенство верное при почти всех $t_0 \in (R, 1)$

$$4 \int_{\Sigma_{t_0}} |u(z)||\omega_z(z)| H_1(dz) \geq \int_{\Sigma_{t_0}} |u(z)| \frac{I_{\zeta,z}(z)}{|\nabla|\omega(z)||} H_1(dz).$$

Из этого неравенства следует, что, если выполнено условие теоремы (15), то выполнено и условие (21), что и доказывает теорему. Теорема доказана.

Нетрудно показать (см. [13, стр. 235–236]), что вещественная и мнимая части решения $w(z) = u(z) + iv(z)$ являются решениями дивергентного локально равномерно эллиптического уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (a_{11}(z)f_x(z) + a_{12}(z)f_y(z)) + \frac{\partial}{\partial y} (a_{21}(z)f_x(z) + a_{22}(z)f_y(z)) &= 0, \\ a_{11}(z) &= \frac{(1-\mu_1)^2 + \mu_2^2}{1-|\mu|^2}, \quad a_{22}(z) = \frac{(1+\mu_1)^2 + \mu_2^2}{1-|\mu|^2}, \\ a_{12}(z) &= a_{21}(z) = -\frac{2\mu_2}{1-|\mu|^2}, \end{aligned}$$

класса $W_{\text{loc}}^{1,2}$, понимаемые в обобщенном смысле. Поэтому, по сути результат теоремы 2 касается обобщенных решений уравнений такого вида. Теоремам единственности для уравнений второго порядка эллиптического типа посвящена обширная литература, подробнее с этим можно познакомиться в [14; 19]. К этому же кругу вопросов примыкают теоремы о допустимой скорости стремления к нулю на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка [15; 16].

4. Благодарность

Автор выражает глубокую благодарность всем участникам семинара "Геометрический анализ и вычислительная геометрия" за обсуждение работы за полезные замечания и ценные рекомендации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белинский, П. П. Общие свойства квазиконформных отображений / П. П. Белинский. — Новосибирск : Наука, Сибирское отделение, 1974. — 100 с.
2. Векуа, И. Н. Обобщенные аналитические функции / И. Н. Векуа. — М. : Наука, 1988. — 512 с.
3. Зубанкова, К. А. Об асимптотическом поведении решений стационарного уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях / К. А. Зубанкова, Е. А. Мазепа, Н. М. Полубоярова // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2023. — Т. 26, № 4. — С. 18–30. — DOI: 10.15688/mrsm.jvolsu.2023.4.2
4. Кондрашов, А. Н. Об асимптотике решений эллиптических уравнений на концах некомпактных римановых многообразий с метриками специального вида / А. Н. Кондрашов // Изв. РАН. Сер. матем. — 2019. — Т. 83, № 2. — С. 97–125. — DOI: <https://doi.org/10.1070/IM8720>
5. Корольков, С. А. Гармонические функции на римановых многообразиях с концами / С. А. Корольков // Сиб. матем. журн. — 2008. — Т. 49, № 6. — С. 1319–1332.
6. Ландис, Е. М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов / Е. М. Ландис. — М. : Наука, 1971. — 288 с.
7. Лосев, А. Г. Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида / А. Г. Лосев // Изв. вузов. Математика. — 1991. — № 12. — С. 15–24.
8. Лосев, А. Г. О некоторых лиувиллевых теоремах на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев // Сиб. матем. журн. — 1998. — Т. 39, № 1. — С. 87–93.
9. Лосев, А. Г. О разрешимости задачи Дирихле для уравнения Пуассона на некоторых некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев // Дифф. ур. — 2017. — Т. 53, № 12. — С. 1643–1652.

10. Лосев, А. Г. Об асимптотическом поведении решений некоторых уравнений эллиптического типа на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Изв. вузов. Математика. — 1999. — № 6. — С. 41–49.
11. Лосев, А. Г. Об одном критерии гиперболичности некомпактных римановых многообразий специального вида / А. Г. Лосев // Матем. заметки. — 1996. — Т. 59, № 4. — С. 558–564.
12. Мазепа, Е. А. Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера на римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Сиб. матем. журн. — 2002. — Т. 43, № 3. — С. 591–599.
13. Миклюков, В. М. Функции весовых классов Соболева, анизотропные метрики и вырождающиеся квазиконформные отображения / В. М. Миклюков. — Волгоград : Изд-во Волгоградского гос. ун-та, 2010. — 304 с.
14. Мешков, В. З. Теорема единственности для эллиптических уравнений второго порядка / В. З. Мешков // Матем. сб. — 1986. — Т. 129 (171), № 3. — С. 386–396. — DOI: <https://doi.org/10.1070/SM1987v057n02ABEH003075>
15. Мешков, В. З. О возможной скорости убывания на бесконечности решений уравнений в частных производных второго порядка / В. З. Мешков // Матем. сб. — 1991. — Т. 182, № 3. — С. 364–383. — DOI: <https://doi.org/10.1070/SM1992v072n02ABEH001414>
16. Шифрин, М. А. О возможной скорости убывания решений эллиптических уравнений / М. А. Шифрин // Матем. сб. — 1972. — Т. 89(131), № 4(12). — С. 616–629. — DOI: <https://doi.org/10.1070/SM1972v018n04ABEH001867>
17. Grigor'yan, A. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds / A. Grigor'yan // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). — 1999. — Vol. 36, № 2. — P. 135–249.
18. Hajlasz, P. Sobolev mappings, co-area formula and related topics / P. Hajlasz // Proceedings on Analysis and Geometry. — Novosibirsk Akademgorodok : Sobolev Institute Press, 2000. — P. 227–254.
19. Hörmander, L. Uniqueness theorems for second order elliptic differential equations / L. Hörmander // Comm. Partial Differ. Equat. — 1983. — Vol. 8, № 1. — P. 21–64. — DOI: <https://doi.org/10.1080/03605308308820262>
20. Malý, J. Absolutely Continuous Functions of Several Variables / J. Malý // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1999. — Vol. 231, № 2. — P. 492–508. — DOI: <https://doi.org/10.1006/jmaa.1998.6246>
21. Malý, J. Sufficient conditions for change of variables in integral / J. Malý // Proceedings on Analysis and Geometry. — Novosibirsk Akademgorodok : Sobolev Institute Press, 2000. — P. 370–386.
22. Malý, J. The co-area formula for Sobolev mappings / J. Malý, D. Swanson, W. P. Ziemer // Trans. Amer. Math. Soc. — 2003. — Vol. 355, № 2. — P. 477–492. — DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-02-03091-X>
23. Martio, O. On existence and uniqueness of degenerate Beltrami equations / O. Martio, V. M. Miklyukov // Complex Variables. — 2004. — Vol. 49, № 7-9. — P. 647–656.
24. The Beltrami Equations: A Geometric Approach / V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. — New York : Springer, 2012. — xiv+301 p.

REFERENCES

1. Belinskiy P.P. *Obshchie svoystva kvazikonformnykh otobrazheniy* [General Properties of Quasiconformal Mappings]. Novosibirsk, Nauka, Sibirskoe otdelenie Publ., 1974. 100 p.
2. Vekua I.N. *Obobshchennye analiticheskie funktsii* [Generalized Analytic Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 512 p.
3. Zubankova K.A., Mazepa E.A., Poluboyarova N.M. Ob asimptoticheskom povedenii resheniy statsionarnogo uravneniya Shredingera na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On the Asymptotic Behavior of Solutions of the Stationary Schrödinger

Equation on Non-Compact Riemannian Manifolds]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2023, vol. 26, no. 4, pp. 18-30. DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2023.4.2

4. Kondrashov A.N. Ob asimptotike resheniy ellipticheskikh uravneniy na kontsakh nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziy s metrikami spetsialnogo vida [On the Asymptotics of Solutions of Elliptic Equations at the Ends of Non-Compact Riemannian Manifolds with Metrics of a Special Form]. *Izv. RAN. Ser. matem.* [Izv. Math.], 2019, vol. 83, no. 2, pp. 97-125. DOI: <https://doi.org/10.1070/IM8720>

5. Korolkov S.A. Garmonicheskie funktsii na rimanovykh mnogoobraziyakh s kontsami [Harmonic Functions on Riemannian Manifolds with Ends]. *Sib. matem. zhurn.*, 2008, vol. 49, no. 6, pp. 1319-1332.

6. Landis E.M. *Uravneniya vtorogo poryadka ellipticheskogo i parabolicheskogo tipov* [Second Order Equations of Elliptic and Parabolic Type]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 288 p.

7. Losev A.G. Nekotorye liuvillevy teoremy na rimanovykh mnogoobraziyakh spetsialnogo vida [Some Liouville Theorems on Riemannian Manifolds of a Special Type]. *Izv. vuzov. Matematika*, 1991, no. 12, pp. 15-24.

8. Losev A.G. O nekotorykh liuvillevykh teoremakh na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [Some Liouville Theorems on Noncompact Riemannian Manifolds]. *Sib. matem. zhurn.*, 1998, vol. 39, no. 1, pp. 87-93.

9. Losev A.G. O razreshimosti zadachi Dirikhle dlya uravneniya Puassona na nekotorykh nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [Solvability of the Dirichlet Problem for the Poisson Equation on Some Noncompact Riemannian Manifolds]. *Diff. ur* [Diff. Eq.], 2017, vol. 53, no. 12, pp. 1643-1652.

10. Losev A.G., Mazepa E.A. Ob asimptoticheskom povedenii resheniy nekotorykh uravneniy ellipticheskogo tipa na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On the Asymptotic Behavior of Solutions of Some Elliptic-Type Equations on Noncompact Riemannian Manifolds]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 1999, no. 6, pp. 41-49.

11. Losev A.G. Ob odnom kriterii giperbolichnosti nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziy spetsialnogo vida [On the Hyperbolicity Criterion for Noncompact Riemannian Manifolds of Special Type]. *Matem. zametki*, 1996, vol. 59, no. 4, pp. 558-564.

12. Mazepa E.A. Kraevye zadachi dlya statsionarnogo uravneniya Shryodingera na rimanovykh mnogoobraziyakh [Boundary Value Problems for the Stationary Schrödinger Equation on Riemannian Manifolds]. *Sib. matem. zhurn.*, 2002, vol. 43, no. 3, pp. 591-599.

13. Miklyukov V.M. *Funktsii vesovykh klassov Soboleva, anizotropnye metriki i vyrozhdaiushchiesya kvazikonformnye otobrazheniya* [Functions of Sobolev Weight Classes, Anisotropic Metrics, and Degenerate Quasiconformal Mappings]. Volgograd, Izd-vo Volgogradskogo gos. un-ta Publ., 2010. 304 p.

14. Meshkov V.Z. Teorema edinstvennosti dlya ellipticheskikh uravneniy vtorogo poryadka [A uniqueness Theorem for Second Order Elliptic Equations]. *Matem. sb.* [Math. USSR-Sb.], 1986, vol. 129 (171), no. 3, pp. 386-396. DOI: <https://doi.org/10.1070/SM1987v057n02ABEH003075>

15. Meshkov V.Z. O vozmozhnoy skorosti ubyvaniya na beskonechnosti resheniy uravneniy v chastnykh proizvodnykh vtorogo poryadka [On the Possible Decay of Solutions of Second Order Partial Differential Equations]. *Matem. sb.* [Math. USSR-Sb.], 1991, vol. 182, no. 3, pp. 364-383. DOI: <https://doi.org/10.1070/SM1992v072n02ABEH001414>

16. Shifrin M.A. O vozmozhnoy skorosti ubyvaniya resheniy ellipticheskikh uravneniy [The Rate of Decrease of Solutions of Elliptic Equations]. *Matem. sb.* [Math. USSR-Sb.], 1972, vol. 89(131), no. 4(12), pp. 616-629. DOI: <https://doi.org/10.1070/SM1972v018n04ABEH001867>

17. Grigor'yan A. Analytic and Geometric Background of Recurrence and Non-Explosion of the Brownian Motion on Riemannian Manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 1999, vol. 36, no. 2, pp. 135-249.

18. Hajlasz P. Sobolev mappings, co-area formula and related topics. *Proceedings on Analysis and Geometry*. Novosibirsk Akademgorodok, Sobolev Institute Press, 2000, pp. 227-254.

19. Hörmander L. Uniqueness Theorems for Second Order Elliptic Differential Equations. *Comm. Partial Differ. Equat.*, 1983, vol. 8, no. 1, pp. 21-64. DOI: <https://doi.org/10.1080/03605308308820262>

20. Malý J. Absolutely Continuous Functions of Several Variables. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1999, vol. 231, no. 2, pp. 492-508. DOI: <https://doi.org/10.1006/jmaa.1998.6246>

21. Malý J. Sufficient conditions for change of variables in integral. *Proceedings on Analysis and Geometry*. Novosibirsk Akademgorodok, Sobolev Institute Press, 2000, pp. 370-386.

22. Malý J., Swanson D., Ziemer W. P. The Co-Area Formula for Sobolev Mappings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2003, vol. 355, no. 2, pp. 477-492. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-02-03091-X>

23. Martio O., Miklyukov V.M. On Existence and Uniqueness of Degenerate Beltrami Equations. *Complex Variables*, 2004, vol. 49, no. 7-9, pp. 647-656.

24. Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. *The Beltrami Equations: A Geometric Approach*. New York, Springer, 2012. xiv+301 p.

ON THE UNIQUENESS OF SOLUTIONS OF THE BELTRAMI EQUATION WITH A GIVEN REAL PART ON A BOUNDARY

Alexander N. Kondrashov

Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Department of Computer Sciences and Experimental Mathematics,
Volgograd State University
ankondr@mail.ru, alexander.kondrashov@volsu.ru
<https://orcid.org/0000-0003-1614-0393>
Prosp. Universitetskyy, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. Previously (2019), we established one result on the admissible rate of tending to zero of solutions of an equation of the form $\Delta u + c(x)u = 0$ at the ends of Riemannian manifolds with a metric of a special form. In this paper we show that in the two-dimensional case this result can be useful in solving problems of a slightly different type. Namely, for problems in the theory of functions of a complex variable. We have established a special version of the uniqueness theorem for the Beltrami equation

$$w_{\bar{z}} = \mu(z)w_z.$$

Let us present this result. It is known that if

$$\operatorname{ess\,sup}_{D'} |\mu(z)| < 1 \text{ in each subarea } D' \Subset D,$$

then the Beltrami equation has a homeomorphic solution $w = f(z) \in W_{\operatorname{loc}}^{1,2}$. Moreover, $w = f(z)$ also belongs to the class $W_{\operatorname{loc}}^{1,2}$. This solution is unique up to superposition with a conformal mapping. There are two possible cases of $f(D) = \mathbb{C}$ or $f(D) = G$, where G is a simply connected domain whose boundary ∂G has more than two points. In the first case, the domain D is called μ -parabolic, and in the second case it is called μ -hyperbolic. We are only interested in μ -hyperbolic domains. If the domain D is μ -hyperbolic, then it can

be map homeomorphic onto the unit disk $B_1 = \{\zeta \mid \zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| < 1\}$ using some solution the Beltrami equation. Let us arbitrarily fix $\zeta = \omega(z) = \alpha(z) + i\beta(z)$ such a solution. Let $E \subset D$ be a compact subset and $F = D \setminus E$ be a ring-shaped domain whose outer part of the boundary coincides with the boundary of ∂D . Let's introduce the notation $\Sigma_t = \omega^{-1}(|\omega| = t) = \{z \mid z \in F, |\omega(z)| = t\}$, $H_1(dz)$ — 1-Hausdorff measure in D . The following theorem is true.

Theorem. *Let the solution w of the Beltrami equation be given in the domain F . If*

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{1-t} \int_{\Sigma_t} |\operatorname{Re} w(z)| |\omega_z(z)| H_1(dz) = 0,$$

then $w(z) = ia$, where $a \in \mathbb{R}$.

Key words: uniqueness theorems, Beltrami equation, complex dilatation, asymptotic behavior, μ -hyperbolic domain, ring-shaped domain.