www.volsu.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ,
ИНФОРМАТИКА И УПРАВЛЕНИЕ

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2024.2.2

УДК 536.25:53.02
ББК 22.311

Дата поступления статьи: 24.04.2024
Дата принятия статьи: 30.05.2024

ЗАДАЧА О ТЕПЛОМАССООБМЕНЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ВОЗДУШНЫМ ПОТОКОМ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ИЗМЕНЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОЗДУХА

Анатолий Михайлович Афанасьев

Доктор технических наук, профессор кафедры информационной безопасности,
Волгоградский государственный университет
a.m.afanasiev@yandex.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Юлия Сагидулловна Бахрачева

Кандидат технических наук, доцент кафедры информационной безопасности,
Волгоградский государственный университет
bakhracheva@yandex.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Сформулирована система дифференциальных уравнений, краевых и начальных условий для расчета полей температуры и влагосодержания в однородном полупространстве, граница которого обдувается воздушным потоком. Теплообмен границы с воздушной средой происходит по закону Ньютона, а массообмен — по закону испарения Дальтона. В исходном состоянии воздух и материал имеют одинаковую температуру, а водяной пар, как вблизи поверхности материала, так и за пределами пограничного слоя, находится в состоянии насыщения, поэтому обмена теплом и влагой между воздухом и материалом не происходит. В некоторый момент температура воздуха начинает совершать малые гармонические колебания вблизи своего первоначального значения. Для математической модели тепломассопереноса, в которой движение влаги к поверхности считают обусловленным только перепадом влагосодержания, то есть явлением термодиффузии пренебрегают, получен асимптотический по времени вид полей температуры и влагосодержания. Поле влагосодержания имеет вид затухающей гармонической волны, а поле температуры представляется наложением двух волн такого же типа, у которых одна и та же частота, но разные коэффициенты затухания и фазовые скорости. Проведен расчет основных параметров волн для материала с характеристиками глины, дано сравнение полученных результатов с экспериментальными данными. Построенное решение является обобщением известных в литературе формул Фурье, которые справедливы лишь в ситуации, когда материал не содержит влаги, а по гармоническому закону изменяется не температура воздуха, а температура поверхности. Полученные в статье результаты найдут применение в геокриологии в качестве теоретического инструмента при исследовании сезонных колебаний теплофизического состояния почвы, что является важной задачей при планировании хозяйственной деятельности в области распространения мерзлых пород.

Ключевые слова: тепломассоперенос, уравнения Лыкова, задача для полупространства, гармонический режим, затухающие волны, глубина проникновения, время запаздывания, геокриология.

Введение

К числу классических задач математической физики относятся задачи о расчете установившихся температурных полей в полупространстве и пластине при условии, что температура поверхности материала, плотность теплового потока на этой поверхности или температура окружающей среды (указанные величины считаются заданными при постановке задач Дирихле, Неймана и третьего рода соответственно) изменяются во времени по периодическому закону. Вместо полупространства и пластины при постановке такого рода задач можно говорить о температурных полях в полубесконечном или конечном тонком стержне, теплоизолированном с боков. Получить представление о достигнутых в этой области результатах можно с помощью работ [4, с. 99–103; 5, с. 85–87, с. 109–112; 7, с. 298–313; 13, с. 238–247; 15, с. 656–659; 16, с. 131–140]. Построенные там решения имеют вид суперпозиции бегущих затухающих гармонических волн, распространение которых сопровождается дисперсией, а глубина проникновения быстро уменьшается с ростом частоты. Эти тепловые явления представляются аналогами явлений скин-эффекта в теории электромагнетизма [12, с. 457–460]; математическим описанием процессов в обоих случаях выступает уравнение диффузии. Решения указанных задач имеют многочисленные применения, например, в теории автоматических систем регулирования температуры, в теории теплоизоляции строительных конструкций, в теории экспериментальных устройств для измерения теплофизических характеристик материалов (в частности, классическими методами таких измерений являются методы Ангстрема и Неймана, они описаны в [5; 13]). Но наиболее известным применением достигнутых в этой области результатов является расчет коэффициентов температуропроводности почвы и горных пород на основе формул, моделирующих колебания температуры в поверхностном слое земной коры, вызываемых суточными и годовыми колебаниями температуры окружающей среды. Этими расчетами занимались еще Фурье и

Пуассон. Они использовали данные многолетних наблюдений метеорологических станций о температурном поле Земли на разных глубинах. Известно, что суточные колебания температуры затухают в почве на глубине порядка 1 метра, а годовые колебания — на глубине порядка 20 метров; на больших глубинах температура практически не изменяется (в рамках теории, не учитывающей радиоактивный распад элементов земной коры). В настоящее время полученные Фурье формулы [13, с. 244–245] нашли широкое применение в мерзлотоведении (геокриологии), где они используются для решения проблем метеорологии, климатологии, гидрогеологии, охраны окружающей среды, строительства зданий и развития сельского хозяйства в области распространения мерзлых пород [6]. Существенным недостатком формул Фурье, который ограничивает их применение для решения проблем геокриологии, является то, что они не учитывают наличия в почве влаги и связанных с ней процессов испарения и конденсации, а также механизма существенного влияния влаги на величину коэффициента температуропроводности почвы. Теории, учитывающей влияние указанных факторов на распространение температурных волн, в настоящее время еще не создано. В работах авторов [2; 3] предпринята попытка этот недостаток устранить. Там разработан общий алгоритм для решения задачи Фурье о температурных колебаниях в почве с учетом содержащейся в ней влаги. Однако доведение этого алгоритма до итоговых формул, позволяющих проанализировать распространение волн температуры и влагосодержания при конкретных значениях всех определяющих процесс величин, было осуществлено авторами лишь для случая простейшей модели тепломассопереноса, в которой не учитываются явления термодиффузии и внутреннего испарения. В настоящей статье мы проанализируем модель следующего по сложности уровня и сопоставим результаты проведенных в рамках этой модели расчетов с известными из литературы экспериментальными результатами.

1. Постановка задачи о тепломассообмене полупространства с воздушным потоком

Рассмотрим однородное, содержащее влагу, полупространство $x > 0$, граница которого $x = 0$ обдувается воздухом, имеющим за пределами пограничного слоя температуру $T_{\text{В}}$ и влажность φ. Будем считать, что интенсивность теплообмена Q и интенсивность массообмена J поверхности $x = 0$ с воздушной средой не зависят от координат переменной точки на этой поверхности и являются функциями только времени τ. В такой ситуации поля температуры T и влагосодержания U будут зависеть только от x и τ, то есть искомыми функциями будут $T(x,\tau)$ и $U(x,\tau)$. Известно, что при детальном учете всех факторов, влияющих на процессы переноса тепла и влаги, начально-краевая задача для расчета функций T и U оказывается нелинейной, и что одной из основных причин нелинейности является формула для интенсивности массообмена J. В настоящей статье мы примем для этой величины выражение в форме закона испарения Дальтона

$$J(\tau) = \alpha_m \left[P(T(0,\tau)) - \varphi \cdot P(T_{\text{В}}(\tau))\right]; \quad P(T) = 6{,}03 \cdot 10^{-3} \cdot \exp \frac{17{,}3 \cdot T}{T + T_1}.$$

Здесь α_m — коэффициент массообмена по перепаду давления пара; $P(T)$ — функция Г.К. Филоненко, моделирующая зависимость относительного парциального давления насыщенного водяного пара от его температуры T при общем нормальном давлении; $T_1 = 238\,^{\circ}\text{C}$ — постоянная. Формула справедлива только в ситуации, когда водяной пар вблизи поверхности $x = 0$ является насыщенным. В следующем пункте мы начнем рассматривать ситуацию, когда температура поверхности $T(0,\tau)$ и температура воздуха $T_{\text{В}}(\tau)$ будут совершать малые колебания вблизи некоторой температуры T_0. Пользуясь малостью отклонений указанных температур от T_0, зависимость $J(\tau)$ можно линеаризовать, разложив функцию $P(T)$ в ряд Тейлора в окрестности точки T_0. Сделав это, и приняв $\varphi = 1$, то есть считая водяной пар насыщенным по обе стороны от пограничного слоя, мы вместо исходной формулы для интенсивности массообмена получим приближенную формулу

$$J(\tau) = \tilde{\alpha}_m \left[T(0,\tau) - T_{\text{В}}(\tau)\right], \quad \text{где } \tilde{\alpha}_m = \alpha_m \cdot P'(T_0) -$$

коэффициент массообмена по перепаду температуры.

Представление функции $J(\tau)$ в таком виде превращает систему уравнений тепломассопереноса в линейную систему, на что в дальнейшем мы будем существенным образом опираться. Указанная система будет иметь следующий вид [1; 8]:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a_w \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{r\gamma}{c}\frac{\partial U}{\partial \tau}; \qquad 0 < x < \infty; \tag{1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = a_m \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a_m \delta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \qquad 0 < x < \infty; \tag{2}$$

$$\tilde{\alpha}_m[T(0,\tau) - T_{\text{В}}(\tau)] = a_m \rho \left[\frac{\partial U}{\partial x}(0,\tau) + \delta \frac{\partial T}{\partial x}(0,\tau)\right]; \qquad x = 0; \tag{3}$$

$$\alpha_w[T(0,\tau) - T_{\text{В}}(\tau)] + r(1-\gamma)\cdot\tilde{\alpha}_m[T(0,\tau) - T_{\text{В}}(\tau)] = \lambda \frac{\partial T}{\partial x}(0,\tau); \quad x = 0. \tag{4}$$

Соотношения (1) и (2) представляют собой уравнения распространения тепла и влаги в области, занятой материалом, причем второе слагаемое в правой части (1), с точностью до множителя, имеет смысл плотности внутренних источников тепла, возникающих за счет процессов испарения воды или конденсации пара. Граничное условие (3) выражает равенство двух потоков влаги: отводимого от поверхности материала в воздух через пограничный слой и подводимого к этой поверхности изнутри материала. Граничное условие (4) выражает соотношение между тепловыми потоками на поверхности $x = 0$, причем потоки в этой формуле, если перечислять их слева направо, имеют следующий смысл: поток тепла $Q(\tau)$, отводимый по закону Ньютона с поверхности в воздух; поток тепла, необходимый для испарения с поверхности подступающего к ней из материала потока жидкости; поток тепла, подходящий к поверхности изнутри материала.

Коэффициенты в уравнениях (1)–(4) имеют следующие названия: c, ρ, λ, γ, a_m, δ — теплофизические характеристики материала, а именно удельная теплоемкость, плотность в сухом состоянии, коэффициент теплопроводности, критерий испарения, коэффициент диффузии влаги, относительный коэффициент термодиффузии влаги; $a_w = \lambda/(c\rho)$ — коэффициент диффузии тепла (коэффициент температуропроводности); r — удельная теплота парообразования воды; α_w — коэффициент теплообмена поверхности образца с воздушной средой. Индексы m и w в приведенных соотношениях имеют следующий смысл: m — moisture (влага); w — warmth (тепло).

По причине, о которой будет сказано ниже, вводить в рассмотрение начальные условия для функций T и U мы не будем.

2. Гармонические граничные условия и постановка задачи об асимптотике искомых полей

Рассмотрим ситуацию, когда при $\tau < 0$ температура материала и его влагосодержание имели постоянные по всему полупространству значения T_0 и U_0 соответственно, а температура воздуха $T_{\text{В}}$ совпадала с температурой материала T_0. Ясно, что в таком состоянии система может находиться неограниченно долго, потому что все приведенные выше уравнения оказываются удовлетворенными, причем для интенсивности тепломассообмена мы будем иметь $Q = 0$ и $J = 0$.

Пусть теперь, с момента $\tau = 0$, температура воздуха $T_{\text{В}}$ начинает совершать вблизи T_0 малые гармонические колебания по закону

$$T_{\text{В}}(\tau) = T_0 + \Delta T_{\text{В}} \cdot \sin(\omega\tau + \psi_{\text{В}}), \tag{5}$$

где $\Delta T_{\text{В}}$, ω, $\psi_{\text{В}}$ — заданные величины. Несложно увидеть, что тогда, рассматривая систему (1)–(5), мы сможем поставить вопрос о нахождении решения этой системы вида

$$\begin{aligned} T(x,\tau) &= T_0 + T(x) \cdot \sin(\omega\tau + \psi_t(x)), \\ U(x,\tau) &= U_0 + U(x) \cdot \sin(\omega\tau + \psi_u(x)), \end{aligned} \tag{6}$$

в котором температура материала $T(x,\tau)$ и его влагосодержание $U(x,\tau)$, так же как и температура воздуха $T_{\text{В}}(\tau)$, совершают при каждом x малые гармонические колебания вблизи своих первоначальных значений T_0 и U_0 соответственно. Заметим тут, что амплитуды этих колебаний должны удовлетворять имеющим очевидный смысл *условиям на бесконечности*

$$T(x) \to 0 \ \text{ и } \ U(x) \to 0 \ \text{ при } x \to \infty. \tag{7}$$

Поставленная нами задача относится к числу *задач без начальных данных* [13]; ее решение дает *асимптотику* полей T и U при $\tau \to \infty$.

3. Постановка краевой задачи для комплексов

Введем вместо функций (6) новые искомые функции

$$\begin{aligned} \tilde{T}(x,\tau) &= T(x,\tau) - T_0 &= T(x) \cdot \sin(\omega\tau + \psi_t(x)), \\ \tilde{U}(x,\tau) &= U(x,\tau) - U_0 &= U(x) \cdot \sin(\omega\tau + \psi_u(x)). \end{aligned}$$

Обратившись к методу комплексных амплитуд, поставим в соответствие этим функциям их комплексы $\dot{T}(x)$ и $\dot{U}(x)$:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(x,\tau) &\leftrightarrow \dot{T}(x) = T(x) \cdot \exp(i\psi_t(x)), \\ \tilde{U}(x,\tau) &\leftrightarrow \dot{U}(x) = U(x) \cdot \exp(i\psi_u(x)). \end{aligned}$$

Выражая в системе (1)–(4) функции T и U через функции $\tilde{T}$ и $\tilde{U}$ и пользуясь правилами работы с комплексами, вместо уравнений для $\tilde{T}$ и $\tilde{U}$ получим уравнения для комплексов этих функций $\dot{T}$ и $\dot{U}$:

$$i\omega\dot{T}(x) = a_w \frac{d^2\dot{T}(x)}{dx^2} + i\omega\frac{r\gamma}{c}\dot{U}(x); \tag{8}$$

$$i\omega\dot{U} = a_m \frac{d^2\dot{U}(x)}{dx^2} + a_m\delta\frac{d^2\dot{T}(x)}{dx^2}; \tag{9}$$

$$\tilde{\alpha}_m[\dot{T}(0) - \Delta\dot{T}_{\text{В}}] = a_m\rho\left[\frac{d\dot{U}}{dx}(0) + \delta\frac{d\dot{T}}{dx}(0)\right]; \tag{10}$$

$$\tilde{\alpha}_w[\dot{T}(0) - \Delta\dot{T}_{\text{В}}] = \lambda\frac{d\dot{T}}{dx}(0). \tag{11}$$

Здесь обозначено

$$\tilde{\alpha}_w = \alpha_w + r(1-\gamma)\tilde{\alpha}_m, \quad \Delta\dot{T}_{\text{В}} = \Delta T_{\text{В}} \cdot \exp(i\psi_{\text{В}}) -$$

эффективный коэффициент теплообмена и заданное комплексное число соответственно.

Построив общее решение системы дифференциальных уравнений (8), (9), мы затем из системы уравнений (10), (11) найдем входящие в это общее решение произвольные постоянные. После этого останется только перейти от комплексов к оригиналам, то есть к вещественным функциям координат и времени (6), которые и дадут нам асимптотический вид полей температуры и влагосодержания.

4. Решение краевой задачи для комплексов в модели тепломассопереноса с $\delta = 0$

В работах [2; 3] авторы решили поставленную в конце предыдущего пункта задачу для простого частного случая, а именно для математической модели, в которой полагают $\delta = 0$ и $\gamma = 0$ (пренебрегают термодиффузией и внутренним парообразованием соответственно). Обоснование применимости такой упрощенной модели к задачам теории тепломассопереноса и анализ получаемых решений можно найти в работе [11]. Уравнения для температуры и влагосодержания в этом частном случае оказываются независимыми (функции T и U в этой модели оказываются связанными только через граничные условия), что существенно упрощает алгоритм исследования процесса. Следующими по уровню сложности для анализа являются модели, в которых или $\delta = 0$, $\gamma \neq 0$, или $\delta \neq 0$, $\gamma = 0$. В данной статье мы сосредоточимся на первой из этих моделей.

Система (8), (9) для рассматриваемой модели будет выглядеть так:

$$\begin{cases} i\omega\dot{T}(x) = a_w\dfrac{d^2\dot{T}(x)}{dx^2} + i\omega\dfrac{r\gamma}{c}\dot{U}(x), \\[2ex] i\omega\dot{U}(x) = a_m\dfrac{d^2\dot{U}(x)}{dx^2}. \end{cases} \tag{12}$$

Здесь мы имеем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно двух неизвестных комплекснозначных функций действительной переменной. Система линейная, однородная, с постоянными коэффициентами, неопределенная. Поставим задачу о нахождении общего решения этой системы. Согласно [14] эта система имеет два линейно независимых (фундаментальных) решения

$$\{\dot{T}_1(x), \dot{U}_1(x)\}, \qquad \{\dot{T}_2(x), \dot{U}_2(x)\}, \tag{13}$$

произвольная линейная комбинация которых и дает общее решение. Известный в теории метод нахождения фундаментальных решений основан на *характеристическом уравнении* системы, но в нашем случае система (12) имеет упрощенный вид по сравнению с тем общим видом, который вводится в теории дифференциальных уравнений, и характеристического уравнения можно не вводить. Для построения первого фундаментального решения положим $\dot{U}_1(x) = 0$. Тогда второе уравнение в (12) будет удовлетворено, а из первого уравнения, решая его методом Эйлера, найдем для функции $\dot{T}(x)$ два возможных решения. Отбрасывая то из них, которое не удовлетворяет условию на бесконечности (7), и нормируя оставшееся решение условием $\dot{T}_1(0) = 1$, в качестве первого фундаментального решения нашей системы получим

$$\dot{T}_1(x) = \exp(\mu_1 x),\ \mu_1 = -\sqrt{\frac{\omega}{2a_w}}(1+i);\quad \dot{U}_1(x) = 0. \tag{14}$$

Чтобы построить второе фундаментальное решение, в качестве решения второго уравнения (12), удовлетворяющего условию на бесконечности (7), возьмем функцию

$$\dot{U}_2(x) = \exp(\mu_2 x),\ \mu_2 = -\sqrt{\frac{\omega}{2a_w}}(1+i). \tag{15}$$

Подставив эту функцию в первое уравнение (12), будем искать решение $\dot{T}_2(x)$ получившегося уравнения в виде

$$\dot{T}_2(x) = T_2 \cdot \exp(\mu_2 x), \tag{16}$$

где постоянную T_2 нужно найти, а условие на бесконечности уже удовлетворено. Проделав вычисления и приняв во внимание, что корень μ_2 обладает свойством $\mu_2^2 = i\omega/a_m$, получим для постоянной T_2 *вещественное* значение

$$T_2 = \frac{r\gamma}{c}\frac{Lu}{Lu-1},\quad \text{где}\quad Lu = \frac{a_m}{a_w}\ - \tag{17}$$

критерий Лыкова.

Таким образом, фундаментальная система (13) построена. Тогда общее решение системы (12) в матричном виде будет выглядеть так:

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{T}(x) \\ \dot{U}(x) \end{array} \right\| = C_1 \cdot \left\| \begin{array}{c} \exp(\mu_1 x) \\ 0 \end{array} \right\| + C_2 \cdot \left\| \begin{array}{c} T_2 \cdot \exp(\mu_2 x) \\ \exp(\mu_2 x) \end{array} \right\|. \tag{18}$$

Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

В дальнейшем коэффициенты μ_1 и μ_2, являющиеся функциями частоты ω, мы будем записывать в виде

$$\mu_1 = -\beta_w(1+i),\ \beta_w = \sqrt{\frac{\omega}{2a_w}};\quad \mu_2 = -\beta_m(1+i),\ \beta_m = \sqrt{\frac{\omega}{2a_m}}. \tag{19}$$

Для нахождения постоянных C_1 и C_2 обратимся к краевым условиям (10), (11), где следует положить $\delta = 0$. Используя (18), вычислим входящие в краевые условия величины:

$$\dot{T}(0) = C_1 + C_2 T_2;\quad \frac{d\dot{T}}{dx}(0) = C_1\mu_1 + C_2 T_2 \mu_2;\quad \frac{d\dot{U}}{dx}(0) = C_2\mu_2.$$

Подставляя эти значения в (10), (11), получим, после преобразований, систему линейных алгебраических уравнений для нахождения C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 + \left(T_2 - \dfrac{a_m \rho}{\tilde{\alpha}_m}\mu_2\right) C_2 = \Delta \dot{T}_\text{В}; \\ \left(1 - \dfrac{\lambda}{\tilde{\alpha}_w}\mu_1\right) C_1 + T_2 \left(1 - \dfrac{\lambda}{\tilde{\alpha}_w}\mu_2\right) C_2 = \Delta \dot{T}_\text{В}. \end{cases} \tag{20}$$

Решая эту систему, найдем, что

$$C_2 = \frac{k \cdot \Delta \dot{T}_\text{В}}{(\beta + \beta_m) + i\beta_m}; \quad C_1 = C_2 \cdot T_3. \tag{21}$$

Здесь обозначено

$$k = \frac{\tilde{\alpha}_m}{a_m \rho}, \ \beta = \frac{\tilde{\alpha}_m}{\lambda \sqrt{Lu}} \left(\frac{\tilde{\alpha}_w}{\tilde{\alpha}_m} + r\gamma \frac{\sqrt{Lu} - 1}{Lu - 1}\right), \ T_3 = \frac{\sqrt{Lu}}{c} \left(\frac{\tilde{\alpha}_w}{\tilde{\alpha}_m} + r\gamma \frac{1}{1 - Lu}\right). \tag{22}$$

Подставив найденные значения C_1 и C_2 в формулу (18), будем иметь решение нашей задачи для комплексов $\dot{T}(x)$ и $\dot{U}(x)$.

Можно убедиться, что в частном случае, когда $\gamma = 0$, построенное нами решение для комплексов переходит в решение, полученное авторами в статьях [2; 3] для математической модели с $\delta = 0$ и $\gamma = 0$.

Прежде чем продолжить вычисления, обратим внимание на то обстоятельство, которое будет нами учтено в следующем пункте. Как известно [8], для критерия Лыкова Lu мы можем иметь или $Lu > 1$ (песок, цеолит), или $Lu < 1$ (дерево, глина). Как видно из (22), в обоих случаях коэффициент β будет принимать положительные значения.

5. Переход от комплексов к оригиналам

Рассмотрим сначала поле влагосодержания. Согласно (18), (19) и (21)

$$\dot{U}(x) = C_2 \cdot \exp(\mu_2 x) = \frac{k \cdot \Delta \dot{T}_\text{В}}{(\beta + \beta_m) + i\beta_m} \cdot \exp[-\beta_m(1 + i)x].$$

Приведем это выражение к показательному виду, после чего, обратившись к правилу образования комплексов, получим оригинал $U(x, \tau)$. Результат будет таким:

$$U(x, \tau) - U_0 = \Delta U_\text{П} \times \exp(-\beta_m x) \times \sin[\omega(\tau - \Delta\tau) + \psi_\text{В} - \beta_m x]. \tag{23}$$

В этой формуле обозначено

$$\Delta U_\text{П} = \frac{k \cdot \Delta T_\text{В}}{\sqrt{(\beta + \beta_m)^2 + \beta_m^2}}, \Delta\tau = \frac{1}{\omega} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\beta_m}{\beta + \beta_m}\right). \tag{24}$$

Здесь при выводе формулы для $\Delta\tau$ мы приняли в расчет, что ввиду положительности β и β_m комплексное число, стоящее в знаменателе формулы (21) для C_2, находится в первом квадранте.

Согласно (23) при каждом x величина U совершает гармонические колебания, амплитуда и начальная фаза которых могут быть найдены по приведенным формулам. При этом величина ΔU_{Π} является амплитудой колебаний влагосодержания на поверхности $x = 0$, а величина $\Delta\tau$ есть время запаздывания этих колебаний относительно колебаний температуры воздуха.

Функции вида (23) называют *бегущими затухающими гармоническими волнами*. Согласно терминологии, принятой в теории волн, величина β_m есть *коэффициент затухания* волны влагосодержания, а обратная величина $\Delta m = 1/\beta_m$ — ее *глубина проникновения*. Другими характеристиками волны являются ее *фазовая скорость* $V_m = \omega/\beta_m$ и *длина волны* $\Lambda_m = 2\pi/\beta_m$. В общем случае в формулах для фазовой скорости и длины волны вместо коэффициента затухания β_m должен стоять *коэффициент фазы* β'_m, который является коэффициентом при координате x под знаком синуса, но в нашем случае эти два коэффициента совпадают.

Поскольку коэффициент β_m является функцией частоты ω, то фазовая скорость и длина волны также оказываются зависящими от частоты, то есть распространение волн влагосодержания сопровождается *дисперсией*.

Обратимся теперь к полю температуры. Согласно (18) и (21)

$$\dot{T}(x) = C_2 T_3 \cdot \exp(\mu_1 x) + C_2 T_2 \cdot \exp(\mu_2 x).$$

Осуществляя здесь переход к оригиналам и учитывая, что оригинал для второго слагаемого с точностью до множителя T_2 совпадает с полем $U(x,\tau) - U_0$, которое мы уже нашли, получим такой результат:

$$\begin{aligned} T(x,\tau) - T_0 = T_3 \times \Delta U_{\Pi} \times \exp(-\beta_w x) \times \sin[\omega(\tau - \Delta\tau) + \psi_{\text{В}} - \beta_w x] + \\ + T_2 \times \Delta U_{\Pi} \times \exp(-\beta_m x) \times \sin[\omega(\tau - \Delta\tau) + \psi_{\text{В}} - \beta_m x]. \end{aligned} \qquad (25)$$

Здесь мы имеем наложение двух бегущих затухающих гармонических волн. Например, первую волну можно характеризовать коэффициентом затухания β_w, глубиной проникновения $\Delta_w = 1/\beta_w$, фазовой скоростью $V_w = \omega/\beta_w$ и длиной волны $\Lambda_w = 2\pi/\beta_w$. Эти две волны имеют одну и ту же частоту, но разные коэффициенты затухания и фазовые скорости, поэтому результат их наложения уже не будет волной того типа, к которому они принадлежат каждая по отдельности, хотя, как и в случае с полем влагосодержания, при каждом x температурное поле будет изменяться во времени по гармоническому закону.

Мы можем переписать результат (5), применив формулу для суммы двух синусоид, имеющих одинаковую частоту, но разные амплитуды и начальные фазы. Чтобы сделать это, введем следующие обозначения:

$$A_1(x) = T_3 \times \Delta U_{\Pi} \times \exp(-\beta_w x), \qquad \varphi_1(x) = -\beta_w x;$$

$$A_2(x) = T_2 \times \Delta U_{\Pi} \times \exp(-\beta_m x), \qquad \varphi_2(x) = -\beta_m x.$$

Тогда формула (5) может быть переписана так:

$$T(x,\tau) - T_0 = A(x) \times \sin[\omega(\tau - \Delta\tau) + \psi_{\text{В}} + \varphi(x)];$$

$$A(x) = \sqrt{A_1^2 + 2A_1 A_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + A_2^2};$$

$$\sin\varphi(x) = (A_1 \cdot \sin\varphi_1 + A_2 \cdot \sin\varphi_2)/A; \quad \cos\varphi(x) = (A_1 \cdot \cos\varphi_1 + A_2 \cdot \cos\varphi_2)/A.$$

Здесь величины A_1, A_2, φ_1, φ_2 являются функциями координаты x и вычисляются по приведенным выше формулам.

Как из последних формул, так и непосредственно из формул (5), получим, что амплитуда колебаний температуры на поверхности $x = 0$ составит

$$\Delta T_\Pi = \Delta U_\Pi (T_3 + T_2), \tag{26}$$

причем эти колебания температуры на поверхности будут происходить *синфазно* с колебаниями влагосодержания.

Явление дисперсии тепловых волн в полупространстве при условии, что материал не содержит влаги, исследовано А.В. Лыковым методом преобразования Лапласа в работе [7, с. 306–308]. Согласно полученным там результатам, фазовая скорость волны оказывается пропорциональной корню квадратному из произведения коэффициента диффузии тепла a_w на частоту. Можно убедиться, что в нашем случае, когда наличие влаги при расчете было учтено, это утверждение остается в силе по отношению к первому слагаемому в формуле (5). Но в нашей формуле есть еще и второе слагаемое, которое индуцируется присутствием в материале влаги, а этот эффект в теории А.В. Лыкова не учитывается.

6. Значения параметров для численного примера

Проведем анализ полученных формул при конкретных значениях входящих в них переменных. В качестве материала полупространства возьмем глину, ее характеристики имеют следующие значения [8]:

$$\lambda = 0,93 \text{ Вт/(м °C)};\ c = 1,9 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг °C)};\ \rho = 1,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3;\ \gamma = 0,1;$$

$$a_m = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2\text{/с};\ a_w = 0,32 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2\text{/с};\ Lu = 0,081.$$

При расчете коэффициентов тепло- и массообмена будем опираться на основополагающее исследование в этой области [10], а также на работу одного из авторов [1], где на основе известных общих расчетных алгоритмов получены для введенных в уравнения коэффициентов α_m и α_w приближенные формулы. Имея в виду эти работы, в качестве характерных значений коэффициентов тепло- и массообмена примем

$$\alpha_m = 5 \cdot 10^{-3} \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}; \qquad \alpha_w = 5 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{°C)}.$$

В качестве температуры T_0, вблизи которой происходят колебания температуры воздуха, возьмем $T_0 = 20\,°\text{C}$. Тогда для коэффициентов $\tilde{\alpha}_m$ и $\tilde{\alpha}_w$ получим такие значения:

$$\tilde{\alpha}_m = 7,13 \cdot 10^{-6} \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{°C)}; \qquad \tilde{\alpha}_w = 19,5 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{°C)}.$$

Используя эти данные, для коэффициентов k, T_2, T_3 и β будем иметь:

$$k = 0,1828\,1/(\text{м} \cdot \text{°C});\ T_2 = -10,5\,°\text{C};\ T_3 = 439,8\,°\text{C};\ \beta = 78,48\,1/\text{м}.$$

Оставшиеся коэффициенты в полученных формулах зависят от круговой частоты колебаний $\omega = 2\pi/T$. Выбрав в качестве периода колебаний T один год, произведем их расчет. Результат получится таким:

$$\omega = 1,99 \cdot 10^{-7}\,\text{с}^{-1};\ \beta_m = 1,96\,\text{м}^{-1};\ \Delta_m = 0,511\,\text{м}; \Lambda_m = 3,21\,\text{м};\ V_m = 1,017 \cdot 10^{-7} \text{ м/с};$$

$$\beta_w = 0,558\,\text{м}^{-1};\ \Delta_w = 1,79\,\text{м};\ \Lambda_w = 11,3\,\text{м};\ V_w = 3,56 \cdot 10^{-7}\,\text{м/с};\ \Delta\tau = 1,42\,\text{сут}.$$

Наконец, приняв для амплитуды колебаний температуры воздуха $\Delta T_\text{В} = 5\,°\text{C}$, для амплитуд колебаний влагосодержания и температуры на поверхности $x = 0$ получим $\Delta U_\Pi = 0,0114$, $\Delta T_\Pi = 4,88\,°\text{C}$.

Опираясь на эти данные, проведем обсуждение полученных результатов.

7. Обсуждение результатов

Итак, мы рассматриваем однородное полупространство в ситуации, когда его граница обдувается воздушным потоком, причем водяной пар по обе стороны от пограничного слоя является насыщенным, а температура воздуха изменяется по гармоническому закону (5), где

$$T_0 = 20\,^\circ\text{C},\ \ \Delta T_\text{В} = 5\,^\circ\text{C},\ \ \omega = 2\pi/T,\ \ T = 1\ \text{год}.$$

Материалом полупространства является влажная глина. Как мы выяснили, в установившемся режиме поля температуры и влагосодержания при любом фиксированном x будут также гармоническими. Рассмотрим эти поля.

Поле влагосодержания определяется формулой (23), и оно имеет вид затухающей гармонической волны. Согласно этой формуле, характеристиками поля являются подсчитанные выше амплитуда колебаний на поверхности $\Delta U_\Pi = 0,0114$, глубина проникновения $\Delta_m = 0,511$ м, длина волны $\Lambda_m = 3,21$ м, а также время запаздывания колебаний на данной глубине x относительно колебаний температуры воздуха

$$\Delta\tau_U(x) = \Delta\tau + \beta_m x/\omega.$$

Здесь первое слагаемое имеет смысл времени запаздывания колебаний влагосодержания на поверхности $x = 0$ относительно колебаний температуры воздуха, а второе слагаемое — это время запаздывания колебаний при данном x относительно колебаний при $x = 0$. С ростом глубины второе слагаемое быстро становится много больше первого. Например, уже на глубине $x = 1$ м мы будем иметь $\beta_m x/\omega = 3,80$ мес, в то время как $\Delta\tau = 1,42$ сут.

Если взять $U_0 = 0,2$ (характерное значение для глины средней влажности), то амплитуда колебаний ΔU_Π будет составлять примерно 5,7 % от этого значения.

Обратимся теперь к полю температуры (5). При каждом x это поле является гармоническим, то есть оно изменяется во времени по синусоидальному закону с частотой ω, но, как уже говорилось, хотя оно и получается наложением двух затухающих гармонических волн, его уже нельзя считать волной такого же типа и характеризовать, как поле влагосодержания, глубиной проникновения и длиной волны. Тем не менее, как видно из проведенных расчетов, вторая температурная волна в формуле (5), волна, индуцированная полем влагосодержания, характеризуется меньшей глубиной проникновения и существенно меньшей амплитудой, поскольку

$$\Delta_m/\Delta_w = 0,285; \qquad T_2/T_3 = -0,0239.$$

Следовательно, в приближенных расчетах этой второй волной можно пренебречь. Если такое пренебрежение сделать, поле температуры можно будет проанализировать таким же образом, как это мы сделали для поля влагосодержания. Тогда для амплитуды колебаний на поверхности, глубины проникновения и длины волны будем иметь подсчитанные выше значения $\Delta T_\Pi = 4,88\,^\circ$C, $\Delta_w = 1,79$ м, $\Lambda_w = 11,3$ м, а время запаздывания колебаний на данной глубине x относительно колебаний температуры воздуха будет определяться формулой

$$\Delta\tau_T(x) = \Delta\tau + \beta_w x/\omega.$$

Как и в случае с полем влагосодержания, второе слагаемое в этой формуле с ростом глубины быстро становится много больше первого. Например, на глубине $x = 4$ м мы будем иметь $\beta_w x/\omega = 4,30$ мес, в то время как $\Delta\tau = 1,42$ сут.

Отметим, что амплитуда колебаний температуры на поверхности мало отличается от амплитуды колебаний температуры воздуха.

Если в полученной формуле для поля температуры рассматривать только первое слагаемое, то есть небольшую добавку за счет присутствия влаги не учитывать, как это было сделано выше, то соответствующие этому слагаемому глубина проникновения и зависимость времени запаздывания от глубины будут находиться в хорошем согласии с данными наблюдений над полем температуры на метеорологических станциях [5; 13].

Полученные нами законы установившихся колебаний температуры и влагосодержания в полупространстве с обдуваемой воздухом границей, при условии, что температура воздуха изменяется во времени по гармоническому закону, можно рассматривать как обобщение известных в литературе *законов Фурье* [13], практическая применимость которых затруднена тем, что при их выводе, во-первых, не производился учет содержащейся в материале влаги, и, во-вторых, в качестве граничных условий для поля температуры принималось имеющее ограниченное применение в теории тепломассопереноса условие Дирихле (заданной считалась температура поверхности материала). В настоящей статье предпринята попытка эти недостатки теории Фурье исправить.

Заключение

Сформирована система уравнений, краевых и начальных условий, моделирующих процессы распространения тепла и влаги в однородном, содержащем влагу полупространстве, граница которого обдувается воздухом с изменяющейся по гармоническому закону температурой. Использованы уравнения теории тепломассопереноса А.В. Лыкова, в которых опущены слагаемые, ответственные за явление термодиффузии. Показано, что в установившемся режиме поле влагосодержания будет иметь вид бегущей затухающей гармонической волны, у которой коэффициент затухания и фазовая скорость зависят не только от характеристик материала, но и от частоты колебаний (имеет место дисперсия). Установившееся поле температуры получается наложением двух волн такого же типа, но результат наложения к данному типу волн уже не относится, поскольку эти две волны хотя и имеют одинаковую частоту, но у них разные коэффициенты затухания и фазовые скорости. Исследованы зависимости глубины проникновения затухающих гармонических волн и времени запаздывания колебаний на данной глубине относительно колебаний температуры воздуха от всех определяющих процесс величин. Результаты расчетов при конкретных значениях переменных хорошо соотносятся с известными из литературы результатами наблюдений на метеорологических станциях. Развитая в статье теория может считаться обобщением теории Фурье для температурных колебаний в полупространстве при отсутствии влаги и при граничных условиях теплообмена первого рода. Результаты работы могут быть использованы в геокриологии для моделирования сезонных изменений теплофизического состояния мерзлых пород и грунтов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьев, А. М. О краевых условиях массообмена в виде законов Ньютона и Дальтона / А. М. Афанасьев, Б. Н. Сипливый // Инженерно-физический журнал. — 2007. — № 1 (80). — С. 27–34.

2. Афанасьев, А. М. Обобщение задачи Фурье о температурных волнах в полупространстве / А. М. Афанасьев, Ю. С. Бахрачева // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. — 2021. — № 2 (24). —

С. 13–21. — DOI: 10.18469/1810-3189.2021.24.2.13-21

3. Афанасьев, А. М. Решение задач геокриологии на основе формул для затухающих гармонических волн тепломассопереноса в однородном полупространстве / А. М. Афанасьев, Ю. С. Бахрачева // Инженерно-физический журнал. — 2023. — № 2 (96). — С. 392–400.

4. Зоммерфельд, А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики / А. Зоммерфельд. — М. : Изд-во иностр. лит., 1950. — 457 с.

5. Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. — М. : Наука, 1964. — 488 с.

6. Кудрявцев, В. А. Мерзлотоведение (краткий курс) / В. А. Кудрявцев. — М. : Изд-во МГУ, 1981. — 240 с.

7. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. — М. : Высш. шк., 1967. — 600 с.

8. Лыков, А. В. Теория сушки / А. В. Лыков. — М.; Л. : Энергия, 1968. — 471 с.

9. Морс, Ф. М. Методы теоретической физики. Т. 2 / Ф. М. Морс, Г. Фешбах. — М. : Изд-во иностр. лит., 1960. — 886 с.

10. Нестеренко, А. В. Основы термодинамических расчетов вентиляции и кондиционирования воздуха / А. В. Нестеренко. — М. : Высш. шк., 1971. — 460 с.

11. Рудобашта, С. П. Тепломассоперенос при сушке в осциллирующем электромагнитном поле / С. П. Рудобашта, Э. М. Карташов, Н. А. Зуев // Теоретические основы химической технологии. — 2011. — № 6 (45). — С. 641–647.

12. Стрэттон, Дж. А. Теория электромагнетизма / Дж. А. Стрэттон. — М.; Л. : ОГИЗ-Гостехиздат, 1948. — 539 с.

13. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1966. — 724 с.

14. Тихонов, А. Н. Дифференциальные уравнения / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. — М. : Наука, 1985. — 231 с.

15. Франк, Ф. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Ч. 2 / Ф. Франк, Р. Мизес. — Л.; М. : ОНТИ, Гл. ред. общетехн. лит., 1937. — 998 с.

16. Эккерт, Э. Р. Теория тепло- и массообмена / Э. Р. Эккерт, Р. М. Дрейк. — М.; Л. : Госэнергоиздат, 1961. — 680 с.

REFERENCES

1. Afanasyev A.M., Siplivyy B.N. O kraevykh usloviyakh massoobmena v vide zakonov Nyutona i Daltona [On the Boundary Conditions of Mass Transfer in the Form of Newton's and Dalton's Laws]. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 2007, no. 1 (80), pp. 27-34.

2. Afanasyev A.M., Bakhracheva Yu.S. Obobshchenie zadachi Furye o temperaturnykh volnakh v poluprostranstve [Generalization of the Fourier Problem of Temperature Waves in a Half-Space]. *Fizika volnovykh protsessov i radiotekhnicheskie sistemy*, 2021, no. 2 (24), pp. 13-21. DOI: 10.18469/1810-3189.2021.24.2.13-21

3. Afanasyev A.M., Bakhracheva Yu.S. Reshenie zadach geokriologii na osnove formul dlya zatukhayushchikh garmonicheskikh voln teplomassoperenosa v odnorodnom poluprostranstve [Solving Problems of Geocryology Based on Formulas for Damped Harmonic Waves of Heat and Mass Transfer in a Homogeneous Half-Space]. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 2023, no. 2 (96), pp. 392-400.

4. Sommerfeld A. *Differentsialnye uravneniya v chastnykh proizvodnykh fiziki* [Partial Differential Equations of Physics]. Moscow, Izd-vo inostr. lit., 1950. 457 p.

5. Karslow G., Jaeger D. *Teploprovodnost tverdykh tel* [Thermal Conductivity of Solids]. Moscow, Nauka Publ., 1964. 488 p.

6. Kudryavtsev V.A. *Merzlotovedenie (kratkiy kurs)* [Permafrost Science (Short Course)]. Moscow, Izd-vo MGU, 1981. 240 p.

7. Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of Thermal Conductivity]. Moscow, Vyssh. shk. Publ., 1967. 600 p.

8. Lykov A.V. *Teoriya sushki* [Theory of Drying]. Moscow; Leningrad, Energiya Publ., 1968. 471 p.
9. Mors F.M., Feshbakh G. *Metody teoreticheskoy fiziki. T. 2* [Methods of Theoretical Physics. Vol. 2]. Moscow, Izd-vo inostr. lit., 1960. 886 p.
10. Nesterenko A.V. *Osnovy termodinamicheskikh raschetov ventilyatsii i konditsionirovaniya vozdukha* [Fundamentals of Thermodynamic Calculations of Ventilation and Air Conditioning]. Moscow, Vyssh. shk. Publ., 1971. 460 p.
11. Rudobashta S.P., Kartashov E.M., Zuev N.A. Teplomassoperenos pri sushke v ostsilliruyushchem elektromagnitnom pole [Heat and Mass Transfer During Drying in an Oscillating Electromagnetic Field]. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii*, 2011, no. 6 (45), pp. 641-647.
12. Stratton J.A. *Teoriya elektromagnetizma* [Theory of Electromagnetism]. Moscow; Leningrad, OGIZ-Gostekhizdat Publ., 1948. 539 p.
13. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 724 p.
14. Tikhonov A.N., Vasilyeva A.B., Sveshnikov A.G. *Differentsialnye uravneniya* [Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 231 p.
15. Frank F., Mises R. *Differentsialnye i integralnye uravneniya matematicheskoy fiziki. Ch. 2* [Differential and Integral Equations of Mathematical Physics. Part 2]. Leningrad; Moscow, ONTI, Gl. red. obshchetekhn. lit., 1937. 998 p.
16. Eckert E.R., Drake R.M. *Teoriya teplo- i massoobmena* [Theory of Heat and Mass Transfer]. Moscow; Leningrad, Gosenergoizdat, 1961. 680 p.

THE PROBLEM OF HEAT AND MASS TRANSFER OF A HALF-SPACE WITH AN AIR FLOW WITH PERIODIC CHANGES IN AIR TEMPERATURE

Anatoly M. Afanasyev

Doctor of Sciences (Engineering), Professor, Department of Information Security,
Volgograd State University
a.m.afanasiev@yandex.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Yulia S. Bakhracheva

Candidate of Sciences (Engineering), Associate Professor,
Department of Information Security,
Volgograd State University
bakhracheva@yandex.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. A system of differential equations, boundary and initial conditions for calculating temperature and moisture content fields in a homogeneous half-space, the boundary of which is blown by an air flow, is formulated. The heat exchange of the boundary with the air medium occurs according to the Newtonian law, and mass transfer — according to the Dalton evaporation law. In the initial state, the air and the material have the same temperature, and water vapor, both near the surface of the material and outside the boundary layer, is in a saturation state, so there is no exchange of heat and moisture between the air and the material. At some point, the air temperature begins to produce small harmonic fluctuations near its initial value. For a mathematical model of heat and mass transfer, in which the movement of moisture to the surface is considered to be caused only by a drop in moisture content, i.e. the phenomenon of thermal diffusion is neglected, an asymptotic time view of the temperature and moisture content fields is obtained. The moisture content field has the form of a damped harmonic wave, and the temperature field is represented by the superposition of two waves of the same type, which have the same frequency, but different attenuation coefficients and phase velocities. The calculation of the basic wave parameters for a material with clay characteristics is carried out, and the results obtained are compared with experimental data. The constructed solution is a generalization of the Fourier formulas known in the literature, which are valid only in a situation when the material does not contain moisture, and according to the harmonic law, not the air temperature changes, but the surface temperature. The results obtained in the article will be used in geocryology as a theoretical tool in the study of seasonal fluctuations in the thermal and physical state of the soil, which is an important task in planning economic activities in the field of the distribution of frozen rocks.

Key words: heat and mass transfer, Lykov equations, a problem for a half-space, harmonic regime, damped waves, penetration depth, delay time, geocryology.