УДК 517.954
ББК 22.161.6

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ [1]

Королькова Елена Сергеевна

Инженер
ООО «Газпром трансгаз Волгоград»
elena.korolkova.tiana@gmail.com
Ул. Рабоче-Крестьянская, 58, 400074 г. Волгоград, Российская Федерация

Корольков Сергей Алексеевич

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математического анализа и теории функций
Волгоградского государственного университета
sergei.a.korolkov@gmail.com
Проспект Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В работе изучаются гармонические функции в неограниченных областях римановых многообразий с некомпактным краем. Авторами применен подход к постановке краевых задач, основанный на введении понятия класса эквивалентных функций. В работе получены достаточные условия разрешимости рассматриваемых краевых задач на таких многообразиях. Также доказана разрешимость задачи Дирихле с непрерывными граничными данными на модельных римановых многообразиях с некомпактным краем.

Ключевые слова: краевые задачи, гармонические функции, римановы многообразия, задача Дирихле, модельные многообразия, многообразия с краем.

Введение

Изучение эллиптических уравнений на римановых многообразиях является достаточно актуальным направлением в современной математике и лежит на стыке дифференциальной геометрии, математического анализа, теории случайных процессов. Важный класс проблем данного направления относится к получению теорем типа Лиувилля, утверждающих тривиальность пространств ограниченных решений некоторых эллиптических уравнений на многообразии, в частности тривиальность различных классов гармонических функций. Достаточно подробно современное состояние исследований в данном вопросе изложено в [11].

С другой стороны, существует широкий класс некомпактных римановых многообразий, которые допускают существование нетривиальных ограниченных гармонических функций. Так, например, в [10] и [15] рассматриваются односвязные римановы многообразия с отрицательной секционной кривизной, отделенной от нуля и бесконечности. Строя геометрическую компактификацию многообразия M путем добавления сферы $S(\infty)$ на бесконечности, авторы работ доказывают разрешимость задачи Дирихле на $\overline{M} = M \cup S(\infty)$ о восстановлении гармонической функции по непрерывным граничным данным на $S(\infty)$.

Заметим, что задачу Дирихле можно поставить на любом некомпактном римановом многообразии, на котором существует естественная компактификация. В частности, это можно сделать на сферически-симметричных многообразиях или на более общих классах модельных и квазимодельных многообразий. Точные результаты, касающиеся теорем типа Лиувилля и разрешимости задачи Дирихле на модельных и квазимодельных многообразиях, были получены в работах [3; 4; 6; 8]. Опишем их подробнее.

Пусть $\hat{M}$ — связное некомпактное риманово многообразие без края, представимое в виде $\hat{M} = \hat{B} \cup \hat{D}$, где $\hat{B}$ — некоторый компакт, а $\hat{D}$ изометрично прямому произведению $(r_0, +\infty) \times S$ с метрикой $ds^2 = dr^2 + g^2(r)d\theta^2$. Здесь S — сфера, $d\theta^2$ — метрика на S.

Обозначим

$$J = \int\limits_{r_0}^{\infty} g^{1-n}(t) \left(\int\limits_{r_0}^{t} g^{n-3}(\xi) d\xi \right) dt,$$

где $n = \dim \hat{M}$.

В работах [7; 14] были получены следующие результаты.

1. Если $J = \infty$, то всякая ограниченная гармоническая на $\hat{M}$ функция является тождественной константой.

2. Если $J < \infty$, то для любой непрерывной на S функции $\psi(\theta)$ найдется такая ограниченная гармоническая функция $u(x)$, что

$$\lim_{r \to \infty} u(r, \theta) = \psi(\theta) \text{ для всех } \theta \in S.$$

В цитируемых работах существенным являлось то, что S — компакт с пустым краем.

С другой стороны, на произвольном некомпактном римановом многообразии постановка задачи Дирихле вызывает затруднения. Однако в [9] был предложен новый подход к постановке краевых задач на некомпактных римановых многообразиях, основанный на введении понятия класса эквивалентных функций и позволивший осуществлять постановку краевых задач на многообразиях, на которых отсутствует естественная геометрическая компактификация (см. также: [4; 5; 12; 13]).

Отметим, что все приведенные выше результаты относятся к случаю, когда гармонические функции рассматриваются на некомпактных римановых многообразиях *без края* (или когда край компактен). Естественным образом возникает вопрос о том, что же будет в случае, когда многообразие имеет некомпактный край, как в этом случае ставить краевые задачи, какие условия являются необходимыми и достаточными для разрешимости таких задач.

В данной работе изучаются гармонические функции в неограниченных областях римановых многообразий с некомпактным краем. Целью работы является получение условий разрешимости краевых задач для гармонических функций в указанных областях.

Перейдем к точным формулировкам. Пусть M — связное некомпактное гладкое риманово многообразие без края и Ω — односвязная неограниченная область в M с C^1-гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — гладкое исчерпание M, то есть такая последовательность предкомпактных открытых подмножеств многообразия M с C^1-гладкими краями ∂B_k, что $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, $\overline{B}_k \subset B_{k+1}$ для всех k. Всюду далее будем считать, что исчерпание выбрано таким образом, что $B_k \cap \Omega \neq \emptyset$, $(M \setminus B_k) \cap \Omega \neq \emptyset$, множества $B_k \cap \Omega$ односвязны, ∂B_k и $\partial\Omega$ трансверсальны для всех k.

В работе рассматриваются гармонические (на M, на Ω) функции $u(x)$, то есть решения уравнения Лапласа — Бельтрами

$$\Delta u = \mathrm{div} \nabla u = 0.$$

Необходимые в данной работе свойства гармонических функций на римановых многообразиях приведены в Приложении.

Пусть f_1 и f_2 — непрерывные на M (на Ω, на $\partial\Omega$, соотв.) функции. Будем говорить, что функции f_1 и f_2 *эквивалентны на M (на Ω, на $\partial\Omega$, соотв.)* и использовать обозначение $f_1 \overset{M}{\sim} f_2$ ($f_1 \overset{\Omega}{\sim} f_2$, $f_1 \overset{\partial\Omega}{\sim} f_2$, соотв.), если для некоторого гладкого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M выполнено равенство $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{M\setminus B_k} |f_1 - f_2| = 0$ ($\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{\Omega\setminus B_k} |f_1 - f_2| = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{\partial\Omega\setminus B_k} |f_1 - f_2| = 0$, соотв.). Отношение «$\sim$» является отношением эквивалентности и не зависит от выбора исчерпания M (см.: [9; 13]).

Будем говорить, что непрерывная на M функция f принадлежит *классу допустимых на Ω (на M, соотв.) функций* и обозначать $f \in K(\Omega)$ ($f \in K(M)$, соотв.), если на Ω (на M, соотв.) найдется такая гармоническая функция u, что $u \sim f$ (см. также: [4; 5; 12]).

Введем понятие емкостного потенциала некоторого компакта $B \subset M$ (с C^1-границей ∂B) относительно многообразия M. Не ограничивая общности, будем считать, что $B \subset B_k$ для всех k. Пусть $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность решений следующих задач Дирихле в $B_k \setminus B$

$$\begin{cases} \Delta v_k = 0 & \text{на} \quad B_k \setminus B, \\ v_k = 1, & \text{на} \quad \partial B, \\ v_k = 0 & \text{на} \quad \partial B_k. \end{cases}$$

Последовательность функций $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ в силу принципа максимума монотонно возрастает и сходится к предельной функции $v_M(x) = \lim\limits_{k\to\infty} v_k(x)$, которая является гармонической на $M \setminus B$ и $0 \le v_M(x) \le 1$ на $M \setminus B$. Функция $v_M(x)$ называется *емкостным потенциалом компакта B относительно многообразия M* (см., напр., [11]).

Отметим, что либо $v_M \equiv 1$ и в этом случае говорят, что M имеет параболический тип, либо $\inf\limits_{M\setminus B} v = 0$ и в этом случае говорят, что M имеет гиперболический тип (см., напр., [11]).

Следуя [9], многообразие M будем называть Δ-строгим, если емкостный потенциал некоторого компакта $B \subset M$ эквивалентен нулю. Отметим, что свойство Δ-строгости многообразия (как и параболичность типа) не зависит от выбора компакта B.

Пусть f — непрерывная на Ω функция, φ — непрерывная на $\partial\Omega$ функция. Будем говорить, что на Ω однозначно разрешима краевая задача с граничными данными (f, φ), если на Ω существует единственное решение следующей задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{на } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi, \\ u \overset{\Omega}{\sim} f. \end{cases} \tag{1}$$

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть M — Δ-строгое риманово многообразие, $\Omega \subset M$ — односвязная неограниченная область в M с C^1-гладкой границей $\partial\Omega$, $f \in K(\Omega)$ и φ — непрерывная на $\partial\Omega$ функция такая, что $\varphi \overset{\partial\Omega}{\sim} f$. Тогда на Ω однозначно разрешима краевая задача (1) с граничными данными (f, φ).*

Замечание. В случае, когда $B \subset M$ — компакт с C^1-гладкой границей и M — Δ-строгое многообразие, в [13] была доказана разрешимость следующей задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ на } M \setminus B, \\ u|_{\partial B} = \varphi, \\ u \overset{M}{\sim} f \end{cases}$$

для любой непрерывной на ∂B функции φ и любой непрерывной функции $f \in K(M)$.

Далее пусть $M^* \subset \hat{M}$ — связное некомпактное риманово многообразие с некомпактным краем ∂M^*, представимое в виде $M^* = B \cup D$, где $B \subset \hat{B}$ — некоторый компакт, а $D \subset \hat{D}$ изометрично прямому произведению $(r_0, +\infty) \times G$ с метрикой $ds^2 = dr^2 + g^2(r)d\theta^2$. Здесь G — односвязная область на сфере S ($\partial G \neq \varnothing$) с C^1-гладкой границей ∂G, $d\theta^2$ — метрика на S.

Будем говорить, что на M^* однозначно разрешима задача Дирихле с непрерывными граничными данными, если для любой непрерывной на $\overline{G}$ функции $f(\theta)$ и любой непрерывной на ∂M^* функции $\varphi(y)$ такой, что $\lim\limits_{r\to\infty} \sup\limits_{\partial G} |\varphi(r,\theta) - f(\theta)| = 0$, существует единственное решение задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } M^*, \\ u(y) = \varphi(y) \text{ для всех } y \in \partial M^*, \\ \lim\limits_{r\to\infty} \sup\limits_{G} |u(r,\theta) - f(\theta)| = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Обозначим

$$I = \int\limits_{r_0}^{\infty} g^{1-n}(t)dt.$$

Будем говорить, что на M^* однозначно разрешима краевая задача (3) с непрерывными граничными данными, если для любой константы c и любой непрерывной на ∂M^* функции $\varphi(y)$ такой, что $\lim\limits_{r\to\infty} \sup\limits_{\partial G} |\varphi(r,\theta) - c| = 0$, существует единственное решение задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } M^*, \\ u(y) = \varphi(y) \text{ для всех } y \in \partial M^*, \\ \lim\limits_{r\to\infty} \sup\limits_{G} |u(r,\theta) - c| = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. *(1) Если $J < \infty$, то на M^* однозначно разрешима задача Дирихле с непрерывными граничными данными.*
(2) Если $I < \infty$, то на M^* однозначно разрешима краевая задача (3) с непрерывными граничными данными.

1. Доказательство теоремы 1

Разобьем доказательство теоремы 1 на два этапа. На первом этапе докажем справедливость теоремы 1 в случае, когда функции $f \equiv 0$, $\varphi \overset{\partial\Omega}{\sim} 0$ — непрерывная ограниченная на $\partial\Omega$ функция. На втором этапе докажем теорему 1 для произвольных непрерывных функций f и φ.

I этап.

Построим непрерывное продолжение функции φ с $\partial\Omega$ на все многообразие M так, что продолжение $\hat{f} \overset{M}{\sim} f$.

Как и ранее считаем, что $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — гладкое исчерпание M, то есть такая последовательность предкомпактных открытых подмножеств многообразия M с C^1-гладкими краями ∂B_k, что $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, $\overline{B}_k \subset B_{k+1}$ для всех k. При этом исчерпание выбираем таким образом, что $B_k \cap \Omega \neq \emptyset$, $(M \setminus B_k) \cap \Omega \neq \emptyset$, $B_k \cap \Omega$ односвязны, ∂B_k и $\partial\Omega$ трансверсальны для всех k.

Вначале непрерывно продолжим функцию $\varphi(x)$ с $\partial\Omega \cap \overline{B}_1$ на $\overline{B_1}$.

Пусть $x \in \overline{B}_1$, а $y^1 \in \partial\Omega \cap \overline{B}_1$ и $y^2 \in \partial\Omega \cap \overline{B}_1$ — такие точки, что

$$\varphi(y^1) = \min_{\partial\Omega \cap \overline{B}_1} \varphi(y), \quad \varphi(y^2) = \max_{\partial\Omega \cap \overline{B}_1} \varphi(y).$$

Положим

$$f^1(x) = \frac{\varphi(y^2) - \varphi(y^1)}{dist(x, y^1) + dist(x, y^2)} dist(x, y^1) + \varphi(y^1),$$

где $dist(\cdot, \cdot)$ — функция расстояния, порожденная римановой метрикой на M. Отметим, что в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ на $\partial\Omega$ и в силу C^1-гладкости $\partial\Omega$ функция $f^1(x)$ непрерывна на $\overline{B}_1$.

Заметим также, что

$$\min_{\partial\Omega \cap \overline{B}_1} \varphi(y) \leq f^1(x) \leq \max_{\partial\Omega \cap \overline{B}_1} \varphi(y) \text{ для всех } x \in \overline{B}_1.$$

Так как исчерпание выбрано таким образом, что $B_1 \cap \Omega$ — односвязная область и $(M \setminus B_1) \cap \Omega \neq \emptyset$, то край $\partial\Omega$ разбивает B_1 на две компоненты связности. Пусть A_1 — некоторое открытое подмножество множества $B_1 \cap \Omega$ такое, что $dist(A_1, \partial\Omega) = d > 0$; A_2 — некоторое открытое подмножество множества $B_1 \cap (M \setminus \Omega)$ такое, что $dist(A_2, \partial\Omega) = d > 0$. Выбирая d достаточно малым, считаем, что A_1 и A_2 односвязны.

Определим функцию $f^{11}(x)$ на $\overline{\Omega \cap (B_1 \setminus A_1)}$ следующим образом. Пусть $x \in \overline{\Omega \cap (B_1 \setminus A_1)}$. Пусть $z^1 \in \partial\Omega \cap \overline{B}_1$, $z^2 \in \partial A_1 \setminus \partial B_1$ — такие точки, что $dist(x, z^1) = dist(x, \partial\Omega \cap \overline{B}_1)$, $dist(x, z^2) = dist(x, \partial A_1 \setminus \partial B_1)$. Положим

$$f^{11}(x) = \frac{f^1(z^2) - \varphi(z^1)}{dist(x, z^2) + dist(x, z^1)} dist(x, z^1) + \varphi(z^1).$$

Тогда функция $f^{11}(x)$ непрерывна на $\overline{\Omega \cap (B_1 \setminus A_1)}$ в силу непрерывности на $\overline{A}_1$ функции $f^1(x)$ и в силу непрерывности на $\partial\Omega$ функции $\varphi(x)$. Кроме этого, заметим, что

$$f^{11}(x) \equiv \varphi(x), \text{ для всех } x \in \partial\Omega \cap \overline{B}_1,$$

$$f^{11}(x) \equiv f^1(x), \text{ для всех } x \in \partial A_1 \setminus \partial B_1,$$

и

$$\min_{\partial\Omega \cap \overline{B}_1} \varphi(y) \leq f^{11}(x) \leq \max_{\partial\Omega \cap \overline{B}_1} \varphi(y) \text{ для всех } x \in \overline{\Omega \cap (B_1 \setminus A_1)}.$$

Аналогично определим непрерывную функцию $f^{12}(x)$ на $\overline{(M \setminus \Omega) \cap (B_1 \setminus A_2)}$ таким образом, что

$$f^{12}(x) \equiv \varphi(x), \text{ для всех } x \in \partial\Omega \cap \overline{B}_1,$$

$$f^{12}(x) \equiv f^1(x), \text{ для всех } x \in \partial A_2 \setminus \partial B_1$$

и

$$\min_{\partial\Omega \cap \overline{B}_1} \varphi(y) \leq f^{12}(x) \leq \max_{\partial\Omega \cap \overline{B}_1} \varphi(y) \text{ для всех } x \in \overline{(M \setminus \Omega) \cap (B_1 \setminus A_2)}.$$

Тогда функция

$$f_1(x) = \left\{ \begin{array}{c} f^1(x), x \in \overline{A_1 \cup A_2}, \\ f^{11}(x), x \in \overline{\Omega \cap (B_1 \setminus A_1)}, \\ f^{12}(x), x \in \overline{(M \setminus \Omega) \cap (B_1 \setminus A_2)} \end{array} \right.$$

непрерывна на $\overline{B}_1$, $f_1(x) \equiv \varphi(x)$ на $\partial\Omega \cap \overline{B}_1$ и $\min\limits_{\partial\Omega \cap \overline{B}_1} \varphi(y) \leq f_1(x) \leq \max\limits_{\partial\Omega \cap \overline{B}_1} \varphi(y)$ для всех $x \in \overline{B}_1$.

Таким образом мы получили непрерывное продолжение $f_1(x)$ функции $\varphi(x)$ с $\partial\Omega \cap$ $\cap \overline{B}_1$ на $\overline{B_1}$.

Положим теперь

$$\tilde{f}_2(x) = \left\{ \begin{array}{c} \varphi(x), x \in \partial\Omega \cap \overline{(B_2 \setminus B_1)}, \\ f_1(x), x \in \partial B_1 \setminus \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Действуя как и выше, определим сначала на $\overline{B_2 \setminus B_1}$ непрерывную функцию $f^2(x)$ такую, что

$$\min_{y \in \partial\Omega \cap \overline{B_2 \setminus B_1}} \varphi(y) \leq f^2(x) \leq \max_{y \in \partial\Omega \cap \overline{B_2 \setminus B_1}} \varphi(y) \text{ для всех } x \in \overline{B_2 \setminus B_1}.$$

Затем, как и выше, определим на $\overline{B_2 \setminus B_1}$ непрерывную функцию $f_2(x)$ такую, что $f_2(x) = f_1(x)$ для $x \in \partial B_1$, $f_2(x) \equiv \varphi(x)$ на $\partial\Omega \cap \overline{(B_2 \setminus B_1)}$ и

$$\min_{y \in (\partial\Omega \cup \partial B_1) \cap \overline{B_2 \setminus B_1}} \tilde{f}_2(y) \leq f_2(x) \leq \max_{y \in (\partial\Omega \cup \partial B_1) \cap \overline{B_2 \setminus B_1}} \tilde{f}_2(y) \text{ для всех } x \in \overline{B_2 \setminus B_1},$$

$$\min_{y \in \partial\Omega \cap \overline{B_2 \setminus B_1}} \varphi(y) \leq f_2(z) \leq \max_{y \in \partial\Omega \cap \overline{B_2 \setminus B_1}} \varphi(y) \text{ для всех } z \in \partial B_2.$$

Из последнего заключаем, что

$$\min_{y \in \partial\Omega \cap \overline{B_2}} \varphi(y) \leq f_2(x) \leq \max_{y \in \partial\Omega \cap \overline{B_2}} \varphi(y) \text{ для всех } x \in \overline{B_2 \setminus B_1}.$$

Действуя аналогично, получим последовательность непрерывных функций $\{f_k(x)\}_{k=2}^{\infty}$, определенных в $\overline{B_k \setminus B_{k-1}}$, таких, что

$$f_k(x) \equiv f_{k-1}(x) \text{ на } \partial B_{k-1}, k \geq 2,$$

$$f_k(x) \equiv \varphi(x) \text{ на } \partial\Omega \cap \overline{(B_k \setminus B_{k-1})}$$

и

$$\min_{\partial\Omega \cap (B_k \setminus B_{k-2})} \varphi(y) \leq f_k(x) \leq \max_{\partial\Omega \cap (B_k \setminus B_{k-2})} \varphi(y) \text{ для всех } x \in \overline{B_k \setminus B_{k-1}}, k > 2. \tag{4}$$

Положим

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f_k(x), x \in B_k \setminus \overline{B}_{k-1}, k \geq 2, \\ f_1(x), x \in \overline{B}_1, k = 1. \end{cases}$$

Тогда $\hat{f}(x) \equiv \varphi(x)$ на $\partial\Omega$ и

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{M \setminus B_k} |\hat{f}(x)| \leq \lim_{k\to\infty} \sup_{\partial\Omega \setminus B_k} |\varphi(x)| = 0$$

в силу (4) и того, что $\varphi \overset{\partial\Omega}{\sim} 0$. Таким образом мы непрерывно продолжили функцию $\varphi(x)$ с $\partial\Omega$ на все M так, что продолжение $\hat{f}(x)$ эквивалентно нулю на M.

Продолжим доказательство теоремы. Пусть $B'_k = B_k \setminus \Omega$, $\Omega_k = B_k \cap \Omega$.

Из Δ-строгости многообразия M следует (см.: [9; 13]), что на $M \setminus B'_k$ существует функция w_k такая, что

$$\begin{cases} \Delta w_k = 0 \text{ в } M \setminus B'_k, \\ w_k = \hat{f} \text{ на } \partial B'_k, \\ w_k \overset{M\setminus B'_k}{\sim} \hat{f} \overset{M\setminus B'_k}{\sim} 0. \end{cases} \tag{5}$$

В силу принципа максимума для функции w_k в $M \setminus B'_k$ имеем

$$|w_k| \leq \max\{\sup_{\partial B'_k} |\hat{f}|, \lim_{n\to\infty} \sup_{M\setminus B'_n} |\hat{f}|\} = const \leq \sup_M |\hat{f}|,$$

следовательно последовательность $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограничена в Ω.

Из равномерной ограниченности $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ в Ω следует, что существует подпоследовательность $\{w_{l_k}\}_{k=1}^{\infty}$, которую всюду далее будем также обозначать $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$, сходящая равномерно на Ω к некоторой предельной гармонической функции w. Отсюда замечаем, что

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\Omega} |w_k - w| = 0 \tag{6}$$

и, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\Omega\setminus B_k} |w| \leq \lim_{k\to\infty} \sup_{\Omega\setminus B_k} |w - w_k| + \lim_{k\to\infty} \sup_{\Omega\setminus B_k} |w_k - w_n| + \lim_{k\to\infty} \sup_{\Omega\setminus B_k} |w_n|$$

для всех n. Из последнего, учитывая условие (6), включение $M \setminus B'_k \supset \Omega \setminus B_k$ и то, что $w_n \overset{M\setminus B'_k}{\sim} 0$ для всех n, получаем

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\Omega\setminus B_k} |w| \leq \lim_{k\to\infty} \sup_{\Omega\setminus B_k} |w_k - w_n|$$

для всех n. Переходя к пределу при $n \to \infty$ и учитывая равномерную сходимость последовательности $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ на Ω, заключаем, что

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\Omega\setminus B_k} |w| = 0,$$

то есть $w \overset{\Omega}{\sim} 0$.

Покажем, что $w(y) = \varphi(y)$ для всех $y \in \partial\Omega$.

Пусть $y \in \partial\Omega$. Тогда найдется такое N, что $y \in \overline{B'_k}$ для всех $k > N$ (так как $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание M и $B'_k = B_k \setminus \Omega$). Тогда $w_k(y) = \hat{f}(y)$ для всех $k > N$ в силу (5). Из того, что $\hat{f}|_{\partial\Omega} = \varphi$ и $y \in \partial\Omega$ получаем, что $w_k(y) = \varphi(y)$ для всех $k > N$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем $w(y) = \varphi(y)$.

Единственность построенной функции w следует из принципа максимума.

II этап.

Пусть теперь f и φ — произвольные непрерывные на M и $\partial\Omega$ соответственно функции.

Так как $f \in K(\Omega)$, то существует функция v такая, что

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \quad \text{в } M, \\ v \overset{M}{\sim} f. \end{cases}$$

Тогда функция $(\varphi - v)$ ограничена на $\partial\Omega$, так как $v \overset{\partial\Omega}{\sim} f \overset{\partial\Omega}{\sim} \varphi$. Как было показано на I этапе доказательства, существует единственная функция w, являющаяся решением задачи

$$\begin{cases} \Delta w = 0 \text{ в } \Omega, \\ w|_{\partial\Omega} = \varphi - v|_{\partial\Omega}, \\ w \overset{\Omega}{\sim} 0. \end{cases}$$

Положим $u = w+v$. Тогда $\Delta u = 0$, $u \overset{\Omega}{\sim} v \overset{\Omega}{\sim} f$ и $u|_{\partial\Omega} = w|_{\partial\Omega}+v|_{\partial\Omega} = \varphi-v|_{\partial\Omega}+v|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Теорема 1 доказана.

2. Доказательство следствия 1

Напомним, что рассматривается связное некомпактное риманово многообразие $M^* \subset \hat{M}$ с некомпактным краем ∂M^*, представимое в виде $M^* = B \cup D$, где $B \subset \hat{B}$ — некоторый компакт, а $D \subset \hat{D}$ изометрично прямому произведению $(r_0, +\infty) \times G$ с метрикой $ds^2 = dr^2 + g^2(r)d\theta^2$. Здесь G — односвязная область на сфере S ($\partial G \neq \varnothing$), $d\theta^2$ — метрика на S.

Заметим, что из условия $J < \infty$ следует

$$I = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} < \infty.$$

Из последнего заключаем, что в условиях следствия 1 многообразие $\hat{M}$ имеет гиперболический тип (см., например, [6]). Как и в [7; 8], несложно показать, что на $\hat{D}$ существует такая функция $\hat{v}$, что

$$\begin{cases} \Delta\hat{v} = 0 \text{ на } \hat{D}, \\ \hat{v} = 1 \text{ на } \partial\hat{D}, \\ \lim\limits_{r\to\infty} \sup\limits_{S} |\hat{v}(r,\theta)| = 0. \end{cases}$$

В силу принципа максимума $\hat{v}$ является емкостным потенциалом компакта $\hat{B}$ относительно многообразия $\hat{M}$. Заметим, что $\hat{v} \overset{\hat{M}}{\sim} 0$, откуда многообразие $\hat{M}$ является Δ-строгим.

Докажем первое утверждение следствия 1.

Пусть $f(\theta)$ — непрерывная на $\overline{G}$ функция и $\varphi(y)$ — непрерывная на ∂M^* функция такая, что

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{\partial G} |\varphi(r,\theta) - f(\theta)| = 0. \tag{7}$$

Продолжим функцию f с $\overline{G}$ на многообразие $\hat{M}$ непрерывным образом.

Из [7; 8] и того, что $J < \infty$, следует:

$$f \in K(\hat{M}). \tag{8}$$

Учитывая условие (7), получаем, что

$$\varphi \overset{\partial M^*}{\sim} f. \tag{9}$$

Из Δ-строгости многообразия $\hat{M}$, (8) и (9), в силу теоремы 1 заключаем, что на M^* существует единственная гармоническая функция u такая, что $u|_{\partial M^*} = \varphi$ и

$$u \overset{M^*}{\sim} f.$$

Из последнего заключаем, что

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{G} |u(r,\theta) - f(\theta)| = 0.$$

Первая часть следствия 1 доказана.

Докажем вторую часть следствия 1.

Пусть c — произвольная константа и $\varphi(y)$ — непрерывная на ∂M^* функция такая, что

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{\partial G} |\varphi(r,\theta) - c| = 0. \tag{10}$$

Из последнего сразу же получаем, что

$$\varphi \overset{\partial M^*}{\sim} c. \tag{11}$$

Отметим, что константа c является допустимой на $\hat{M}$ функцией (в силу того, что любая константа является гармонической функцией). Тогда из Δ-строгости многообразия $\hat{M}$ и (11), в силу теоремы 1 заключаем, что на M^* существует единственная гармоническая функция u такая, что $u|_{\partial M^*} = \varphi$ и

$$u \overset{M^*}{\sim} c.$$

Из последнего заключаем, что

$$\lim_{r\to\infty}\sup_G |u(r,\theta)-c| = 0.$$

Следствие 1 доказано.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Пример 1. Рассмотрим гармонические функции в верхнем полупространстве $\mathbb{R}^3_+$.

Пусть (r,θ_1,θ_2) — сферические координаты в $\mathbb{R}^3$ ($r\geq 0$, $-\pi/2\leq\theta_1\leq\pi/2$, $0\leq$ $\leq\theta_2\leq 2\pi$).

Положим, в обозначениях Следствия 1, $M^*=\mathbb{R}^3_+=\mathbb{R}^3\cap\{0\leq\theta_1\leq\pi/2\}$, $\hat{M}=\mathbb{R}^3$, $n=\dim\hat{M}=3$.

Пусть B^1 — единичный шар с центром в начале координат, $\hat{D}=\mathbb{R}^3\backslash B_1$. Представим $M^*=\mathbb{R}^3_+$ в виде

$$M^*=B^1_+\cup D,$$

где $B^1_+=B^1\cap\mathbb{R}^3_+$, $D=\hat{D}\cap\mathbb{R}^3_+$. Таким образом, D изометрично прямому произведению $(1,+\infty)\times\partial B^1_+$ с метрикой $ds^2=dr^2+r^2d\theta^2$, где $d\theta^2$ — метрика на ∂B^1.

Тогда интегралы J и I примут вид

$$J=\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\left(\int_1^t d\xi\right)dt,\quad I=\int_1^\infty\frac{dt}{t^2}.$$

Очевидно, $J=\infty$ и $I<\infty$.

Из Следствия 1 следует, что для любой константы c и любой непрерывной на $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}^3\cap\{\theta_1=0\}$ функции $\varphi(r,\theta_2)$ такой, что $\lim\limits_{r\to\infty}\sup\limits_{0\leq\theta_2\leq 2\pi}|\varphi(r,\theta_2)-c|=0$ найдется единственное решение следующей задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \mathbb{R}^3_+,\\ u(r,0,\theta_2)=\varphi(r,\theta_2) \text{ для всех } r\geq 0, 0\leq\theta_2\leq 2\pi,\\ \lim\limits_{r\to\infty}\sup\limits_{0\leq\theta_1\leq\pi/2, 0\leq\theta_2\leq 2\pi}|u(r,\theta_1,\theta_2)-c|=0.\end{cases}$$

3. Приложение

Приведем необходимые определения и утверждения из теории гармонических функций на римановых многообразиях.

Пусть M — n-мерное связное некомпактное риманово многообразие без края и g_{ij} — риманов метрический тензор на многообразии M. Пусть Δ — оператор Лапласа — Бельтрами на M, то есть отображение, которое сопоставляет каждой дифференцируемой функции f функцию $\Delta f=\mathrm{div}\nabla f$. Отметим (см., например, [2, с. 357]), что в любой локальной системе координат $(x^1,\ldots,x^n)$ справедливо

$$\Delta=\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\right),$$

где g^{ij} — элементы обратной матрицы $(g_{ij})^{-1}$, $g=\det(g_{ij})$.

Пусть Ω — открытое подмножество M с C^1-гладкой границей. Гармонической в Ω (в M, соотв.) называют функцию $u(x)$, непрерывную в Ω (в M, соотв.) вместе с частными производными до второго порядка включительно, удовлетворяющую в Ω (в M, соотв.) уравнению Лапласа — Бельтрами $\Delta u = 0$ (см., например, [11]).

Отметим (см., например, [11] и др.), что для гармонических функций на римановых многообразиях, также как и для гармонических функций в областях $\mathbb{R}^n$, справедливы такие свойства, как принцип максимума, принцип сравнения, гармоничность равномерного предела гармонических функций и др. При этом доказательства этих свойств для гармонических функций в областях римановых многообразий в точности повторяют доказательства аналогичных свойств для гармонических функций в областях $\mathbb{R}^n$. Приведем наиболее важные из этих свойств, используемые нами в данной работе (доказательства можно найти, например, в [1]).

Предложение 1 (принцип максимума и минимума). *Пусть $\Delta u = 0$ в Ω. Предположим, что существует такая точка $y \in \Omega$, что $u(y) = \sup\limits_{\Omega} u$ ($u(y) = \inf\limits_{\Omega} u$). Тогда функция u является постоянной в Ω.*

Предложение 2. *Предел равномерно сходящейся последовательности гармонических функций является гармонической функцией.*

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 13-01-97038-р_поволжье_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, М. Трудингер. — М. : Наука, 1989. — 464 с.

2. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. — М. : Наука, 1981. — Т. 2. — 416 с.

3. Корольков, С. А. О множестве положительных решений уравнения Лапласа — Бельтрами на модельных многообразиях / С. А. Корольков, А. Г. Лосев // Вестник ВолГУ. Сер. 1, Математика. Физика. — 2003–2004. — № 8. — С. 48–61.

4. Корольков, С. А. Гармонические функции на римановых многообразиях с концами / С. А. Корольков // Сиб. мат. журн. — 2008. — Т. 49, № 6. — С. 1319–1332.

5. Корольков, С. А. Решения эллиптических уравнений на римановых многообразиях с концами / С. А. Корольков, А. Г. Лосев // Вестник ВолГУ. Сер. 1, Математика. Физика. — 2011. — № 1 (14). — С. 23–40.

6. Лосев, А. Г. Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида / А. Г. Лосев // Изв. вузов. Математика. — 1991. — № 12. — С. 15–24.

7. Лосев, А. Г. Об одном критерии гиперболичности некомпактных римановых многообразий специального вида / А. Г. Лосев // Мат. заметки. — 1996. — Т. 59, № 4. — С. 558–564.

8. Лосев, А. Г. Ограниченные решения уравнения Шредингера на римановых произведениях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Алгебра и анализ. — 2001. — Т. 13, № 1. — С. 84–110.

9. Мазепа, Е. А. Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера на римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Сиб. мат. журн. — 2002. — Т. 43, № 3. — С. 591–599.

10. Anderson, M. T. The Dirichlet problem at infinity for manifolds with negative curvature / M. T. Anderson // J. Diff. Geom. — 1983. — V. 18, № 4. — P. 701–721.

11. Grigor'yan, A. Analitic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds / A. Grigor'yan // Bull. Amer. Math. Soc. — 1999. — V. 36, № 2. — P. 135–249.

12. Korolkov, S. A. Generalized harmonic functions of Riemannian manifolds with ends / S. A. Korolkov, A. G. Losev // Mathematische zeitschrift. — 2012. — V. 272, № 1–2. — P. 459–472.

13. Losev, A. G. Unbounded solutions of the Stationary Shrödinger equation on Riemannian manifolds / A. G. Losev, E. A. Mazepa, V. Y. Chebanenko // Computational Methods and Function Theory. — 2003. — V. 3, № 2. — P. 443–451.

14. Murata, M. Positive harmonic functions on rotationary symmetric Riemannian manifolds / M. Murata // Potential Theory. — 1992. — P. 251–259.

15. Sullivan, D. The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifolds / D. Sullivan // J. Diff. Geom. — 1983. — V. 18, № 4. — P. 723–732.

REFERENCES

1. Gilbarg D., Trudinger M. *Ellipticheskie differentsial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka* [Elliptic partial differential equations of second order]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 464 p.

2. Kobayashi Sh., Nomizu K. *Osnovy differentsial'noy geometrii* [Foundations of Differential Geometry], vol. 2. Moscow, Nauka Publ., 1981. 416 p.

3. Korol'kov S.A., Losev A.G. O mnozhestve polozhitel'nykh resheniy uravneniya Laplasa — Bel'trami na model'nykh mnogoobraziyakh [On positive solutions set for the Laplace — Beltrami equation on model manifolds]. *Vestnik VolGU. Ser. 1, Matematika. Fizika* [Journal of Volgograd State University, series 1, Mathematics. Physics], 2003–2004, no. 8, pp. 48–61.

4. Korol'kov S.A. Garmonicheskie funktsii na rimanovykh mnogoobraziyakh s kontsami [Harmonic functions on Riemannian manifolds with ends]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal], 2008, vol. 49, no. 6, pp. 1319–1332.

5. Korol'kov S.A., Losev A.G. Resheniya ellipticheskikh uravneniy na rimanovykh mnogoobraziyakh s kontsami [Solutions for elliptic equations on Riemannian manifolds with ends]. *Vestnik VolGU. Ser. 1, Matematika. Fizika* [Journal of Volgograd State University, series 1, Mathematics. Physics], 2011, no. 1 (14), pp. 23–40.

6. Losev A.G. Nekotorye liuvillevy teoremy na rimanovykh mnogoobraziyakh spetsial'nogo vida [Some Liouville theorems on Riemannian manifolds of special type]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 1991, no. 12, pp. 15–24.

7. Losev A.G. Ob odnom kriterii giperbolichnosti nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziy spetsial'nogo vida [On the hyperbolicity criterion for noncompact Riemannian manifolds of special type]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes], 1996, vol. 59, no. 4, pp. 558–564.

8. Losev A.G., Mazepa E.A. Ogranichennye resheniya uravneniya Shredingera na rimanovykh proizvedeniyakh [Bounded solutions for Schrödinder equation on Riemannian products]. *Algebra i analiz* [St. Petersburg Mathematical Journal], 2001, vol. 13, no. 1, pp. 84–110.

9. Mazepa E.A. Kraevye zadachi dlya statsionarnogo uravneniya Shredingera na rimanovykh mnogoobraziyakh [Boundary value problems for the stationary Schrödinger equation on Riemannian manifolds]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal], 2002, vol. 43, no. 3, pp. 591–599.

10. Anderson M.T. The Dirichlet problem at infinity for manifolds with negative curvature. *J. Diff. Geom.*, 1983, vol. 18, no. 4, pp. 701–721.

11. Grigor'yan A. Analitic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1999, vol. 36, no. 2, pp. 135–249.

12. Korolkov S.A., Losev A.G. Generalized harmonic functions of Riemannian manifolds with ends. *Mathematische zeitschrift*, 2012, vol. 272, no. 1–2, pp. 459–472.

13. Losev A.G., Mazepa E.A., Chebanenko V.Y. Unbounded solutions of the Stationary Shrödinger equation on Riemannian manifolds. *Computational Methods and Function Theory*, 2003, vol. 3, no. 2, pp. 443–451.

14. Murata M. Positive harmonic functions on rotationary symmetric Riemannian manifolds. *Potential Theory*, 1992, pp. 251–259.

15. Sullivan D. The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifolds. *J. Diff. Geom.*, 1983, vol. 18, no. 4, pp. 723–732.

BOUNDARY PROBLEMS FOR HARMONIC FUNCTIONS ON UNBOUNDED OPEN SETS OF RIEMANNIAN MANIFOLDS

Korol'kova Elena Sergeevna

Engineer
OOO "Gazprom transgaz Volgograd"
elena.korolkova.tiana@gmail.com
Ul. Raboche-Krest'yanskaya, 58, 400074 Volgograd, Russian Federation

Korol'kov Sergey Alekseevich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor, Department of Mathematical Analysis and Function Theory
Volgograd State University
sergei.a.korolkov@gmail.com
Prospekt Universitetskij, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. We study harmonic functions on unbounded open set of Riemannian manifold and establish some existence and uniqueness results.

Let M be a smooth connected noncompact Riemannian manifold without boundary and Ω be a simply connected unbounded open set of M with C^1-smooth boundary $\partial\Omega$. Let $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ be a smooth exhaustion of M i.e. sequence of precompact open subsets of M with C^1-smooth boundaries ∂B_k such that $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, $\overline{B}_k \subset B_{k+1}$ for all k. In what follows we assume $B_k \cap \Omega \neq \emptyset$, $(M \setminus B_k) \cap \Omega \neq \emptyset$, sets $B_k \cap \Omega$ are simply connected, ∂B_k and $\partial\Omega$ are transversal for all k.

Two continuous in M (in Ω, in $\partial\Omega$, resp.) functions f_1 and f_2 are called *equivalent* in M (in Ω, in $\partial\Omega$, resp.) ($f_1 \overset{M}{\sim} f_2$, $f_1 \overset{\Omega}{\sim} f_2$, $f_1 \overset{\partial\Omega}{\sim} f_2$, resp.) if for some smooth exhaustion $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ of M the following relation holds: $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{M\setminus B_k} |f_1 - f_2| = 0$ ($\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{\Omega\setminus B_k} |f_1 - f_2| = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{\partial\Omega\setminus B_k} |f_1 - f_2| = 0$, resp.). It isn't hard to prove that '$\sim$' is actually an equivalence relation and does not depend on the choice of a smooth exhaustion of M.

A continuous function f in Ω (in M, resp.) is called admissible in Ω (on M, resp.) if there is an harmonic function u in Ω (in M, resp.) such that $u \overset{\Omega}{\sim} f$ ($u \overset{M}{\sim} f$, resp.).

Let B be an compact (with C^1-smooth boundary) in M and $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ be the solutions of the following Dirichlet problems:

$$\begin{cases} Lv_k = 0 & \text{in} \quad B_k \setminus B, \\ v_k = 1, & \text{in} \quad \partial B, \\ v_k = 0, & \text{in} \quad \partial B_k. \end{cases}$$

By the maximum principle, the sequence $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ is point-wise increasing and converges to an harmonic in $M \setminus B$ function $v_M = \lim\limits_{k\to\infty} v_k$. It is easy to see that $0 \le v_D \le 1$. The function v_M is called the capacity potential of the compact B relatively to M.

We say that M is strong if $v_D \overset{M}{\sim} 0$. It's easy to verify that notion of strong manifold does not depend on choose the compact B.

We have the following result.

Theorem. Let M be a strong manifold, $\Omega \subset M$ be an unbounded open set with C^1-smooth boundary $\partial\Omega$, f be an admissible continuous in Ω function and φ — continuous in $\partial\Omega$ function such that $\varphi \overset{\partial\Omega}{\sim} f$. Then there exists unique function u in Ω such that

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{на } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi, \\ u \overset{\Omega}{\sim} f. \end{cases}$$

Also we establish some existence and uniqueness results and prove solvability of the Dirichlet problem with continuous boundary data on a spherically symmetric manifolds with noncompact boundary.

Key words: boundary problems, harmonic functions, Riemannian manifolds, Dirichlet problem, model manifolds, manifolds with end.