УДК 514.75
ББК 22.151

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ПРИЗНАК ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОСТОЯННЫМ ГАУССОВЫМ КРУЧЕНИЕМ В E^4

Бодренко Ирина Ивановна

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры фундаментальной информатики и оптимального управления
Волгоградского государственного университета
bodrenko@mail.ru
Проспект Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В работе установлен характеристический признак 2-мерных поверхностей F^2 с постоянным гауссовым кручением $\varkappa \equiv \text{const} \neq 0$ в 4-мерном евклидовом пространстве E^4. Доказано, что поверхность $F^2 \subset E^4$ имеет постоянное гауссово кручение $\varkappa \equiv \text{const} \neq 0$ тогда и только тогда, когда тензор нормальной кривизны $R^{\perp} \neq 0$ параллелен в связности Ван дер Вардена — Бортолотти.

Ключевые слова: гауссово кручение, эллипс нормальной кривизны, тензор нормальной кривизны, нормальная связность, связность Ван дер Вардена — Бортолотти.

Введение

Известно, что всякое двумерное риманово многообразие M^2 со знакопостоянной гауссовой кривизной K имеет рекуррентный тензор кривизны Римана R. Имеет место равенство [2]: $\nabla R = \text{d} \ln |K| \otimes R$, где g — риманова метрика M^2, ∇ — риманова связность, согласованная с g. Основным инвариантом нормальной связности D двумерной поверхности F^2 в евклидовом пространстве E^4 является гауссово кручение $\varkappa$. В каждой точке $x \in F^2$ $|\varkappa| = 2ab$, где a, b — полуоси эллипса нормальной кривизны в x.

Обозначим через D и $R^{\perp}$ соответственно нормальную связность и тензор нормальной кривизны $F^2 \subset E^4$. Пусть $\overline{\nabla} = \nabla \oplus D$ — связность Ван дер Вардена — Бортолотти.

Определение 1. *Тензор нормальной кривизны $R^{\perp} \neq 0$ называется параллельным, если $\overline{\nabla} R^{\perp} \equiv 0$.*

Определение 2. *Тензор нормальной кривизны $R^{\perp} \neq 0$ называется рекуррентным (в связности $\overline{\nabla}$), если существует 1-форма ν на F^2 такая, что $\overline{\nabla} R^{\perp} = \nu \otimes R^{\perp}$* [3].

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Поверхность F^2 с ненулевым гауссовым кручением $\varkappa \neq 0$ в E^4 имеет рекуррентный тензор нормальной кривизны $R^{\perp}$:*

$$\overline{\nabla} R^{\perp} = d \ln |\varkappa| \otimes R^{\perp}. \tag{1}$$

Из теоремы 1 мы получаем следующий характеристический признак двумерных поверхностей с постоянным гауссовым кручением $\varkappa \equiv \text{const} \neq 0$ в E^4.

Теорема 2. *Поверхность $F^2 \subset E^4$ имеет постоянное гауссово кручение $\varkappa \equiv const \neq 0$ тогда и только тогда, когда тензор нормальной кривизны $R^{\perp} \neq 0$ параллелен.*

Замечание. Поверхности F^2 с постоянным гауссовым кручением $\varkappa \equiv \text{const} \neq 0$ в E^4 существуют [1].

1. Рекуррентность тензора нормальной кривизны двумерной поверхности в E^4

Пусть E^4 — 4-мерное евклидово пространство с декартовыми прямоугольными координатами (x^1, x^2, x^3, x^4), $<,>$ — скалярное произведение в E^4. Пусть F^2 — двумерная поверхность в E^4, заданная в окрестности каждой своей точки векторным уравнением

$$\vec{r}(u^1, u^2) = \{x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), x^3(u^1, u^2), x^4(u^1, u^2)\}, \quad (u^1, u^2) \in U,$$

где U — некоторая область параметрической плоскости (u^1, u^2), $\quad x^a(u^1, u^2) \in C^{\infty}(U)$, $a = 1, \ldots, 4$.

Рассмотрим на поверхности F^2 в окрестности каждой точки регулярное оснащение $\{\vec{n}_{\alpha|}\}_{\alpha=1}^2$, $\quad < \vec{n}_{\alpha|}, \vec{n}_{\beta|} >= \delta_{\alpha\beta}$, где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, $\alpha, \beta = 1, 2$. Пусть

$$\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}(u^1, u^2)}{\partial u^i}, \quad \vec{r}_{ij} = \frac{\partial^2 \vec{r}(u^1, u^2)}{\partial u^i \partial u^j}, \quad \vec{n}_{\alpha|i} = \frac{\partial \vec{n}_{\alpha|}(u^1, u^2)}{\partial u^i}, \quad i, j = 1, 2, \quad \alpha = 1, 2.$$

Векторы $\{\vec{r}_i(x)\}_{i=1}^2$ и $\{\vec{n}_{\alpha|}(x)\}_{\alpha=1}^2$ соответственно образуют базисы касательной плоскости $T_x F^2$ и нормальной плоскости $T_x^{\perp} F^2$ поверхности F^2 в точке x.

Метрическая форма поверхности F^2 имеет вид:

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j,$$

где $g_{ij} =< \vec{r}_i, \vec{r}_j >$, $\quad i, j = 1, 2$.
Обозначим через

$$II(\vec{n}_{\alpha|}) = b_{\alpha|ij} du^i du^j$$

вторую квадратичную форму поверхности F^2 относительно нормали $\vec{n}_{\alpha|}$, где коэффициенты $b_{\alpha|ij} = < \vec{n}_{\alpha|}, \vec{r}_{ij} >$, $\quad i, j = 1, 2, \quad \alpha = 1, 2$.

Гауссово кручение поверхности $F^2 \subset E^4$ вычисляется по формуле

$$\varkappa = \frac{g^{km}\left(b_{1|k1} b_{2|m2} - b_{1|k2} b_{2|m1}\right)}{\sqrt{g}}. \tag{2}$$

Линейные формы

$$\omega_{\alpha\beta} = \Gamma^{\perp}_{\alpha\beta|i} du^i, \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

называются линейными формами кручения поверхности $F^2 \subset E^4$, где коэффициенты $\Gamma^{\perp}_{\alpha\beta|i} =< \vec{n}_{\alpha|}, \vec{n}_{\beta|i} >$ называются компонентами нормальной связности D поверхности $F^2 \subset E^4$. Имеет место равенство $\Gamma^{\perp}_{\alpha\beta|i} + \Gamma^{\perp}_{\beta\alpha|i} = 0$.

Ковариантная производная вектора $\vec{n}_{\alpha|}$ в нормальной связности D вычисляется по формуле

$$D_i \vec{n}_{\alpha|} = \Gamma^{\perp\beta}_{\alpha|i} \vec{n}_{\beta|}, \quad \text{где} \quad \Gamma^{\perp\beta}_{\alpha|i} = \delta^{\beta\sigma} \Gamma^{\perp}_{\sigma\alpha|i}, \quad i = 1, 2, \quad \alpha, \beta, \sigma = 1, 2,$$

матрица $||\delta^{\alpha\beta}|| = ||\delta_{\alpha\beta}||^{-1}$.

Компоненты тензора нормальной кривизны $R^{\perp}$ вычисляются по формуле

$$R^{\perp\alpha}_{\beta|ij} = \frac{\partial \Gamma^{\perp\alpha}_{\beta|i}}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma^{\perp\alpha}_{\beta|j}}{\partial u^i} + \Gamma^{\perp\sigma}_{\beta|i}\Gamma^{\perp\alpha}_{\sigma|j} - \Gamma^{\perp\sigma}_{\beta|j}\Gamma^{\perp\alpha}_{\sigma|i}. \qquad (3)$$

Обозначим

$$R^{\perp}_{\beta|ij} = R^{\perp\alpha}_{\beta|ij}\vec{n}_{\alpha|}.$$

В окрестности точки $x \in F^2$ ковариантная производная тензора нормальной кривизны $R^{\perp}$ в связности Ван дер Вардена — Бортолотти $\overline{\nabla}$ вычисляется по формуле

$$\overline{\nabla}_k R^{\perp}_{\beta|ij} = D_k\left(R^{\perp}_{\beta|ij}\right) - \Gamma^m_{ki}R^{\perp}_{\beta|mj} - \Gamma^m_{kj}R^{\perp}_{\beta|im} - \Gamma^{\perp\alpha}_{\beta|k}R^{\perp}_{\alpha|ij}, \qquad (4)$$

где Γ^m_{ij} — символы Кристоффеля, вычисленные относительно метрического тензора g_{ij}.

Доказательство теоремы 1. В окрестности точки $x \in F^2$ в локальных координатах (u^1, u^2) из формулы (3) имеем:

$$R^{\perp}_{1|12} = \left(\frac{\partial \Gamma^{\perp 2}_{1|1}}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma^{\perp 2}_{1|2}}{\partial u^1}\right)\vec{n}_{2|}, \quad R^{\perp}_{2|12} = \left(\frac{\partial \Gamma^{\perp 1}_{2|1}}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma^{\perp 1}_{2|2}}{\partial u^1}\right)\vec{n}_{1|}.$$

Обратимся к уравнению Риччи:

$$R^{\perp\alpha}_{\beta|ij} = g^{km}\left(b_{\beta|ik}b^{\alpha}_{mj} - b_{\beta|jk}b^{\alpha}_{mi}\right), \quad i,j,k,m = 1,2, \quad \alpha,\beta = 1,2, \qquad (5)$$

где $b^{\alpha}_{ij} = \delta^{\alpha\beta}b_{\beta|ij}$. Из (5) находим

$$R^{\perp\alpha}_{1|12} = g^{km}\left(b_{1|1k}b^{\alpha}_{m2} - b_{1|2k}b^{\alpha}_{m1}\right), \quad R^{\perp\alpha}_{2|12} = g^{km}\left(b_{2|1k}b^{\alpha}_{m2} - b_{2|2k}b^{\alpha}_{m1}\right). \qquad (6)$$

Из (6) в силу (2) имеем:

$$R^{\perp}_{1|12} = R^{\perp\alpha}_{1|12}\vec{n}_{\alpha|} = R^{\perp 2}_{1|12}\vec{n}_{2|} = \varkappa\sqrt{g}\,\vec{n}_{2|}, \quad R^{\perp}_{2|12} = R^{\perp\alpha}_{2|12}\vec{n}_{\alpha|} = R^{\perp 1}_{2|12}\,\vec{n}_{1|} = -\varkappa\sqrt{g}\,\vec{n}_{1|}. \qquad (7)$$

По формуле (4) находим

$$\overline{\nabla}_k R^{\perp}_{\beta|12} = D_k\left(R^{\perp}_{\beta|12}\right) - \Gamma^m_{k1}R^{\perp}_{\beta|m2} - \Gamma^m_{k2}R^{\perp}_{\beta|1m} - \Gamma^{\perp\alpha}_{\beta|k}R^{\perp}_{\alpha|12}, \quad \alpha,\beta = 1,2. \qquad (8)$$

Мы имеем:

$$D_k(R^{\perp}_{1|12}) = D_k(\varkappa\sqrt{g}\,\vec{n}_{2|}) = \varkappa\sqrt{g}\,\Gamma^{\perp 1}_{2|\,k}\,\vec{n}_{1|} + \frac{\partial(\varkappa\sqrt{g})}{\partial u^k}\,\vec{n}_{2|}, \qquad (9)$$

$$D_k(R^{\perp}_{2|12}) = D_k(-\varkappa\sqrt{g}\,\vec{n}_{1|}) = -\varkappa\sqrt{g}\,\Gamma^{\perp 2}_{1|\,k}\,\vec{n}_{2|} - \frac{\partial(\varkappa\sqrt{g})}{\partial u^k}\,\vec{n}_{1|}. \qquad (10)$$

Учитывая (9), (10), из (8) соответственно получим

$$\overline{\nabla}_k R^{\perp}_{1|12} = \varkappa\sqrt{g}\,\Gamma^{\perp 1}_{2|\,k}\,\vec{n}_{1|} + \frac{\partial(\varkappa\sqrt{g})}{\partial u^k}\,\vec{n}_{2|} - \left(\Gamma^1_{k1} + \Gamma^2_{k2}\right)\,R^{\perp}_{1|12} - \Gamma^{\perp 2}_{1|\,k}\,R^{\perp}_{2|12},$$

$$\overline{\nabla}_k R^{\perp}_{2|12} = -\varkappa\sqrt{g}\,\Gamma^{\perp 2}_{1|\,k}\,\vec{n}_{2|} - \frac{\partial(\varkappa\sqrt{g})}{\partial u^k}\,\vec{n}_{1|} - \left(\Gamma^1_{k1} + \Gamma^2_{k2}\right)\,R^{\perp}_{2|12} - \Gamma^{\perp 1}_{2|\,k}\,R^{\perp}_{1|12}.$$

Отсюда, применяя соотношения (7), находим

$$\overline{\nabla}_k R^{\perp}_{1|12} = \varkappa\sqrt{g}\,\Gamma^{\perp 1}_{2|\,k}\,\vec{n}_{1|} + \frac{\partial(\varkappa\sqrt{g})}{\partial u^k}\,\vec{n}_{2|} - \frac{\partial(\ln\sqrt{g})}{\partial u^k}\,\varkappa\sqrt{g}\,\vec{n}_{2|} - \Gamma^{\perp 2}_{1|\,k}\,\left(-\varkappa\sqrt{g}\,\vec{n}_{1|}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial(\varkappa\sqrt{g})}{\partial u^k} - \frac{\partial\ln\sqrt{g}}{\partial u^k}\,\varkappa\sqrt{g}\right)\vec{n}_{2|} = \frac{\partial\varkappa}{\partial u^k}\sqrt{g}\,\vec{n}_{2|} = \frac{\partial\ln|\varkappa|}{\partial u^k}\,\varkappa\sqrt{g}\,\vec{n}_{2|} = \frac{\partial\ln|\varkappa|}{\partial u^k}\,R^{\perp}_{1|12},$$

$$\overline{\nabla}_k R^{\perp}_{2|12} = -\varkappa\sqrt{g}\,\Gamma^{\perp 2}_{1|\,k}\,\vec{n}_{2|} - \frac{\partial\varkappa\sqrt{g}}{\partial u^k}\,\vec{n}_{1|} - \frac{\partial\ln\sqrt{g}}{\partial u^k}\left(-\varkappa\sqrt{g}\,\vec{n}_{1|}\right) - \Gamma^{\perp 1}_{2|\,k}\,\varkappa\sqrt{g}\,\vec{n}_{2|} =$$

$$= \left(-\frac{\partial(\varkappa\sqrt{g})}{\partial u^k} + \frac{\partial(\ln\sqrt{g})}{\partial u^k}\varkappa\sqrt{g}\right)\vec{n}_{1|} = -\frac{\partial\varkappa}{\partial u^k}\sqrt{g}\,\vec{n}_{1|} = -\frac{\partial\ln|\varkappa|}{\partial u^k}\varkappa\sqrt{g}\,\vec{n}_{1|} = \frac{\partial\ln|\varkappa|}{\partial u^k}\,R^{\perp}_{2|12}.$$

Следовательно,

$$\overline{\nabla}_k R^{\perp}_{\beta|12} = \frac{\partial\ln|\varkappa|}{\partial u^k}\,R^{\perp}_{\beta|12}, \quad k = 1, 2, \quad \beta = 1, 2. \tag{11}$$

Так как $R^{\perp}_{\beta|11} = R^{\perp}_{\beta|22} \equiv 0$, $R^{\perp}_{\beta|12} = -R^{\perp}_{\beta|21}$, из (11) находим

$$\overline{\nabla}_k R^{\perp}_{\beta|ij} = \frac{\partial\ln|\varkappa|}{\partial u^k}\,R^{\perp}_{\beta|ij}, \quad i, j, k = 1, 2, \quad \beta = 1, 2. \tag{12}$$

Из (12) получаем, что на поверхности F^2 с ненулевым гауссовым кручением $\varkappa \neq 0$ в E^4 выполнено уравнение $\overline{\nabla} R^{\perp} = \nu \otimes R^{\perp}$, где 1-форма $\nu = \mathrm{d}\ln|\varkappa|$.

Теорема доказана.

Теорема 2 непосредственно следует из теоремы 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аминов, Ю. А. О поверхностях в E^4 со знакопостоянным гауссовым кручением / Ю. А. Аминов // Укр. геометр. сб. — 1988. — Т. 31. — С. 3–14.

2. Бодренко, И. И. О внутренней геометрии внешне рекуррентных подмногообразий в пространствах постоянной кривизны / И. И. Бодренко // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Мат. Физ. — 2003–2004. — Вып. 8. — С. 6–13.

3. Бодренко, И. И. Обобщенные поверхности Дарбу в пространствах постоянной кривизны / И. И. Бодренко. — Saarbrücken, Germany : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. — 200 с.

REFERENCES

1. Aminov Yu.A. O poverkhnostyakh v E^4 so znakopostoyannym gaussovym krucheniem [Surfaces in E^4 with a Gaussian torsion of constant sign]. *Ukr. geometr. sb.* [Ukranian Geometric Collection], 1988, vol. 31, pp. 3–14.

2. Bodrenko I.I. O vnutrenney geometrii vneshne rekurrentnykh podmnogoobraziy v prostranstvakh postoyannoy krivizny [On internal geometry of externally recurrent submanifolds in spaces of constant curvature]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Mat. Fiz.* [Journal of Volgograd State University, series 1, Mathematics. Physics], 2003–2004, issue 8, pp. 6–13.

3. Bodrenko I.I. *Obobschennye poverkhnosti Darbu v prostranstvakh postoyannoy krivizny* [Generalized Darboux surfaces in spaces of constant curvature]. Saarbrücken, Germany, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. 200 p.

A CHARACTERISTIC FEATURE OF THE SURFACES WITH CONSTANT GAUSSIAN TORSION IN E^4

Bodrenko Irina Ivanovna
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor, Department of Fundamental Informatics and Optimal Control
Volgograd State University
bodrenko@mail.ru
Prospect Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. It is known that every two-dimensional Riemannian manifold M^2 with Gaussian curvature K of constant signs has recurrent Riemannian — Chrictoffel curvature tensor R. The following equality holds: $\nabla R = \mathrm{d}\ln|K| \otimes \otimes R$, where g is Riemannian metric M^2, ∇ is Riemannian connection.

Let E^4 be 4-dimensional Euclidean space with Cartesian coordinates (x^1, x^2, x^3, x^4), F^2 is two-dimensional surface in E^4 given by vector equation

$$\vec{r}(u^1,u^2) = \{x^1(u^1,u^2), x^2(u^1,u^2), x^3(u^1,u^2), x^4(u^1,u^2)\}, \quad (u^1,u^2) \in U,$$

$x^a(u^1,u^2) \in C^\infty(U),\ a = 1,\dots,4.$

The properties of surfaces F^2 with nonzero Gaussian torsion $\varkappa \neq 0$ in Euclidean space E^4 are studied in this article.

Let $R^\perp$ be normal curvature tensor of $F^2 \subset E^4$, D is normal connection, $\overline{\nabla} = \nabla \oplus D$ is connection of van der Waerden — Bortolotti.

Normal curvature tensor $R^\perp \neq 0$ is called parallel if $\overline{\nabla}R^\perp \equiv 0$. Normal curvature tensor $R^\perp \neq 0$ is called recurrent (in connection $\overline{\nabla}$) if there exists 1-form ν on F^2 such that $\overline{\nabla}R^\perp = \nu \otimes R^\perp$.

The following statement is proved in this article. A surface F^2 with nonzero Gaussian torsion $\varkappa \neq 0$ in E^4 has recurrent normal curvature tensor $R^\perp$:

$$\overline{\nabla}R^\perp = \mathrm{d}\ln|\varkappa| \otimes R^\perp.$$

The characteristic feature of 2-dimensional surfaces F^2 with constant Gaussian torsion $\varkappa \equiv \mathrm{const} \neq 0$ in 4-dimensional Euclidean space E^4 was obtained in this article.

It was proved that surface $F^2 \subset E^4$ has constant Gaussian torsion $\varkappa \equiv \equiv \mathrm{const} \neq 0$ if and only if normal curvature tensor $R^\perp \neq 0$ is parallel in connection of van der Waerden — Bortolotti.

Key words: Gaussian torsion, ellipse of normal curvature, normal curvature tensor, normal connection, connection of van der Waerden — Bortolotti.