УДК 517.95
ББК 22.161.6

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НА МОДЕЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ [1]

Лосев Александр Георгиевич

Доктор физико-математических наук,
директор института математики и информационных технологий
Волгоградского государственного университета
allosev59@gmail.com
Проспект Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Сазонов Алексей Павлович

Ассистент кафедры математического анализа и теории функций
Волгоградского государственного университета
sazonoff2007@gmail.com
Проспект Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В данной работе исследуется асимптотическое поведение положительных решений полулинейного эллиптического уравнения $\Delta u + p(r)u^\gamma = 0$ на модельных римановых многообразиях. В частности, найдены условия существования и несуществования положительных решений изучаемого уравнения на рассматриваемых римановых многообразиях. Данные результаты обобщают аналогичные утверждения, полученные ранее в работе T. Kusano и M. Naito для евклидового пространства R^n.

Ключевые слова: полулинейные эллиптические уравнения, теоремы типа Лиувилля, модельные римановы многообразия, радиально-симметричные решения, задача Коши.

Введение

Данная работа посвящена вопросам существования положительных решений уравнения

$$\Delta u + p(r)u^\gamma = 0 \tag{1}$$

на модельных римановых многообразиях.

Традиционно одним из истоков указанной проблематики называют классификационную теорию римановых поверхностей и многообразий. Отличительным свойством многообразий параболического типа является выполнение для них теоремы Лиувилля, утверждающей, что всякая положительная супергармоническая функция на таком многообразии является тождественной постоянной. Получению различных условий параболичности в терминах таких характеристик, как емкость, рост объема геодезического шара и т. д. посвящено множество работ. Общее представление о современных исследованиях в данном вопросе можно получить, например, из [11].

За последние годы опубликован ряд работ, посвященных изучению асимптотического поведения решений и субрешений линейных уравнений на некомпактных римановых многообразиях. В частности, найдены точные условия выполнения теорем типа Лиувилля и разрешимости различных краевых задач на модельных римановых многообразиях (см., например, [1–4; 7; 8]).

В последнее время большой интерес вызывает изучение нелинейных эллиптических уравнений. Так, в R^n достаточно подробно были исследованы решения уравнения

$$\Delta u + u^q = 0. \tag{2}$$

B. Gidas, J. Spruck [10] доказали, что если $n \geq 3$ и $1 < q < (n+2)/(n-2)$, то всякое неотрицательное решение уравнения (2) является тождественным нулем. В работе J. Serrin, H. Zou [13] было доказано, что если $q \geq (n+2)/(n-2)$, то уравнение (2) имеет нетривиальные положительные решения.

Отдельным классом стоят вопросы о существовании и асимптотическом поведении радиально-симметричных решений различных уравнений и неравенств, рассматриваемых как в евклидовом пространстве, так и на модельных многообразиях (см., например, [5; 6; 9; 10; 12; 13]).

Так, T. Kusano, M. Naito [12] изучались положительные решения уравнения (1), где r — евклидова длина в R^n, $\gamma > 1$, а функция $p(t)$ дифференцируема на $(0; +\infty)$ и $p(t) > 0$ при $t > 0$. Были получены следующие условия существования положительных радиально-симметричных решений данного уравнения.

Теорема A. *Предположим, что*

$$\frac{d}{dt}\left(t^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}} p(t)\right) \leq 0, \quad \text{при} \quad t > 0.$$

Тогда для любого $\alpha > 0$ уравнение (1) имеет положительное радиально-симметричное решение в R^n, такое что $u(0) = \alpha$.

Теорема B. *Предположим, что*

$$\frac{d}{dt}\left(t^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}} p(t)\right) \geq 0, \quad \text{при} \quad t > 0$$

и

$$t^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}} p(t) \to \infty, \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Тогда уравнение (1) не имеет положительных радиально-симметричных решений в R^n.

Целью данной работы является исследование положительных решений полулинейного эллиптического уравнения (1) на некомпактных модельных римановых многообразиях. Опишем их подробнее.

Фиксируем начало координат $0 \in R^n$ и некоторую гладкую функцию q на интервале $[0; \infty)$ такую, что $q(0) = 0$ и $q'(0) = 1$. Определим модельное риманово многообразие M_q следующим образом:

1. Множеством точек M_q является R^n.

2. В полярных координатах $(r; \theta)$ (где $r \in (0; \infty)$ и $\theta \in S^{n-1}$) риманова метрика на $\{M_q \backslash 0\}$ определяется как

$$ds^2 = dr^2 + q^2(r) d\theta^2, \tag{3}$$

где $d\theta$ — стандартная риманова метрика на сфере S^{n-1}.

3. Риманова метрика в 0 является гладким продолжением (3).

1. Теоремы существования

Вначале докажем достаточно очевидное утверждение относительно решений рассматриваемого уравнения, основанное на свойствах многообразий параболического типа.

Теорема 1. *Пусть многообразие M_q таково, что*

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{q^{n-1}(t)} = \infty.$$

Тогда любое неотрицательное решение уравнения (1) есть тождественный нуль.

Доказательство. Так как $p(r) > 0$ и $u(r) \geq 0$, то из (1) следует, что u — супергармоническая функция. Из расходимости интеграла в условии теоремы следует (см. [2]), что M_q — многообразие параболического типа, то есть всякая положительная супергармоническая функция на нем равна константе. Из вида уравнения (1) ясно, что такая константа есть нуль, то есть $u(r) \equiv 0$. Теорема доказана.

Замечание 1. Далее в работе будем рассматривать многообразия гиперболического типа, то есть будем считать, что

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)} < \infty.$$

Обозначим:

$$\Phi(r) = \frac{2}{\gamma+1} q^{\frac{n-2+\gamma(n-2)}{2}}(r) \frac{d}{dr}\left(q^{\frac{3n-2-\gamma(n-2)}{2}}(r) p(r) \int_r^{\infty} \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)}\right) -$$

$$- q^{n-1}(r)p(r) + (n-2) q^{2n-3}(r) q'(r) p(r) \int_r^{\infty} \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)}$$

и

$$V(r) = q^{n-1}(r) u'(r) u(r) + q^{2(n-1)}(r) u'^2(r) \int_r^{\infty} \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)} +$$

$$+ \frac{2}{\gamma+1} q^{2(n-1)}(r) p(r) u^{\gamma+1}(r) \int_r^{\infty} \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)}.$$

Лемма 1. *Справедливо следующее равенство:*

$$V'(r) = \Phi(r) u^{\gamma+1}(r).$$

Доказательство. Из вида оператора Лапласа — Бельтрами на M_q (см., например, [2]) следует, что уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+(n-1)\frac{q'(r)}{q(r)}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{q^2(r)}\Delta_\theta u+p(r)u^\gamma=0. \tag{4}$$

Так как в данной работе изучаются радиально-симметричные решения $u=u(r)$, то изучение решений уравнения (4) приводит к исследованию обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\left(q^{n-1}(r)u'(r)\right)'+q^{n-1}(r)p(r)u^\gamma(r)=0. \tag{5}$$

Несложно проверить, что функция $\Phi(r)$ имеет вид:

$$\Phi(r)=-\frac{\gamma+3}{\gamma+1}q^{n-1}(r)p(r)+\frac{4(n-1)}{\gamma+1}q^{2n-3}(r)q'(r)p(r)\int_r^\infty\frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)}+$$
$$+\frac{2}{\gamma+1}q^{2(n-1)}(r)p'(r)\int_r^\infty\frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)}. \tag{6}$$

Вычисляя производную функции $V(r)$, учитывая равенство (5), получаем:

$$V'(r)=\Bigg(-\frac{\gamma+3}{\gamma+1}q^{n-1}(r)p(r)+\frac{4(n-1)}{\gamma+1}q^{2n-3}(r)q'(r)p(r)\int_r^\infty\frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)}+$$
$$+\frac{2}{\gamma+1}q^{2(n-1)}(r)p'(r)\int_r^\infty\frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)}\Bigg)u^{\gamma+1}(r)=\Phi(r)u^{\gamma+1}(r).$$

Лемма доказана.

Далее докажем утверждение о существовании положительных радиально-симметричных решений уравнения (1) на модельных многообразиях.

Теорема 2. *Предположим, что*

$$\Phi(r)\le 0.$$

Тогда для любого $\alpha>0$ уравнение (1) имеет на M_q положительное радиально-симметричное решение такое, что $u(0)=\alpha$.

Доказательство. Как было показано выше, решение задачи о существовании радиально-симметричного решения полулинейного эллиптического уравнения (1) на модельном многообразии эквивалентно разрешимости задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (5) с начальными условиями

$$u(0)=\alpha,\qquad u'(0)=0. \tag{7}$$

Здесь $\alpha=\mathrm{const}>0$ следует из условий теоремы, а $u'(0)=0$ следует из радиальности рассматриваемых решений. Обозначим $u_\alpha(r)$ решение уравнения (5) с начальными условиями (7). В силу теоремы Пеано такое решение существует на некотором интервале $[0;\delta)$. Обозначим $[0;r_\alpha)$ максимальный интервал, на котором $u_\alpha(r)$ положительно.

Интегрируя равенство (5) по отрезку $[0;r_\alpha]$, получаем:

$$u'(r_\alpha)=-\frac{1}{q^{n-1}(r_\alpha)}\int_0^{r_\alpha}q^{n-1}(\xi)p(\xi)u^\gamma(\xi)d\xi.$$

Отсюда следует, что $u_\alpha(r)$ — монотонно убывающая функция.

Предположим, что существует $\alpha > 0$ такое, что $r_\alpha < \infty$. Так как $u_\alpha(r)$ — монотонно убывающая функция, то $u_\alpha(r_\alpha) = 0$ и $u_\alpha(r) > 0$ на $[0; r_\alpha)$.

Рассмотрим функцию $V(r)$ на $[0; r_\alpha]$. Ее производная, в силу утверждения леммы 1, имеет вид:

$$V'(r) = \Phi(r) u_\alpha^{\gamma+1}(r).$$

Отсюда следует, что $V'(r) \leq 0$ для $r \in (0; r_\alpha)$. Таким образом, функция $V(r)$ — монотонно убывающая на $(0; r_\alpha)$, откуда $V(r_\alpha) \leq V(0)$.

По предположению, $u_\alpha(r_\alpha) = 0$. Тогда, подставляя данное равенство в функцию $V(r)$, получаем:

$$V(r_\alpha) = q^{2(n-1)}(r_\alpha) {u'_\alpha}^2(r_\alpha) \int_{r_\alpha}^{\infty} \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)}.$$

Рассмотрим функцию:

$$\varphi(r) = q^{n-1}(r) \int_r^{\tau} \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)}.$$

По определению метрики модельного многообразия, в окрестности нуля $q^{n-1}(r) \sim \sim r^{n-1}$. Отсюда несложно проверить, что

$$\lim_{r \to 0} \varphi(r) = 0.$$

Тогда получаем, что $V(0) = 0$. Отсюда следует, что $u'_\alpha(r_\alpha) = 0$.

В результате получили, что $u_\alpha(r_\alpha) = u'_\alpha(r_\alpha) = 0$. Тогда, по теореме единственности задачи Коши, получаем, что $u_\alpha \equiv 0$ для $r \in [0; r_\alpha]$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть в R^n выполнено условие*

$$\frac{d}{dt}\left(t^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}} p(t)\right) \leq 0.$$

Тогда для любого $\alpha > 0$ уравнение (1) имеет положительное радиально-симметричное решение, такое что $u(0) = \alpha$ (то есть справедливо утверждение теоремы A).

Доказательство. Так как в R^n функция $q(r) = t$, то

$$\Phi(t) = \frac{2}{(\gamma+1)(n-2)} t^{\frac{(n-2)(\gamma+1)}{2}} \frac{d}{dt}\left(t^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}} p(t)\right).$$

Отсюда легко следует утверждение следствия.

Теорема 3. *Если уравнение (1) имеет положительное радиально-симметричное решение, то справедлива следующая оценка:*

$$u(r) \leq \left(\frac{1}{\alpha^{1-\gamma} + (\gamma-1)\int_0^r \frac{1}{q^{n-1}(t)} \int_0^t q^{n-1}(\xi) p(\xi) d\xi dt}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Доказательство. Перепишем уравнение (5) в следующем виде:

$$(q^{n-1}(r)u'(r))' = -q^{n-1}(r)p(r)u^{\gamma}(r).$$

Интегрируя последнее соотношение по отрезку $[0;r]$, получаем:

$$q^{n-1}(r)u'(r) = -\int_0^r q^{n-1}(\xi)p(\xi)u^{\gamma}(\xi)d\xi$$

или

$$u'(r) = -\frac{1}{q^{n-1}(r)}\int_0^r q^{n-1}(\xi)p(\xi)u^{\gamma}(\xi)d\xi. \qquad (8)$$

Из (8) следует, что функция $u(r)$ — монотонно убывающая, откуда

$$-\frac{1}{q^{n-1}(r)}\int_0^r q^{n-1}(\xi)p(\xi)u^{\gamma}(\xi)d\xi \leq -\frac{u^{\gamma}(r)}{q^{n-1}(r)}\int_0^r q^{n-1}(\xi)p(\xi)d\xi.$$

Применяя равенство (8) к последнему неравенству, получаем:

$$u'(r) \leq -\frac{u^{\gamma}(r)}{q^{n-1}(r)}\int_0^r q^{n-1}(\xi)p(\xi)d\xi.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{u'(r)}{u^{\gamma}(r)} \leq -\frac{1}{q^{n-1}(r)}\int_0^r q^{n-1}(\xi)p(\xi)d\xi.$$

Интегрируя последнее неравенство по отрезку $[0;r]$, учитывая, что $u(0)=\alpha$, получаем:

$$\int_0^r \frac{u'(t)}{u^{\gamma}(t)}dt \leq -\int_0^r \frac{1}{q^{n-1}(t)}\int_0^t q^{n-1}(\xi)p(\xi)d\xi dt,$$

или

$$\frac{u^{1-\gamma}(r)}{1-\gamma} \leq \frac{\alpha^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \int_0^r \frac{1}{q^{n-1}(t)}\int_0^t q^{n-1}(\xi)p(\xi)d\xi dt.$$

Отсюда

$$u^{1-\gamma}(r) \geq \alpha^{1-\gamma} + |1-\gamma|\int_0^r \frac{1}{q^{n-1}(t)}\int_0^t q^{n-1}(\xi)p(\xi)d\xi dt,$$

или

$$u(r) \leq \left(\frac{1}{\alpha^{1-\gamma} + (\gamma-1)\int_0^r \frac{1}{q^{n-1}(r)}\int_0^t q^{n-1}(\xi)p(\xi)d\xi dt}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Теорема доказана.

Следствие 2. *Если*

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^r \frac{1}{q^{n-1}(t)}\int_0^t q^{n-1}(\xi)p(\xi)d\xi dt = \infty,$$

то решение $u(r)\to 0$ *при* $r\to\infty$.

2. Свойства решений уравнения

Замечание 2. Всюду далее будем считать, что функция $q(r)$ определяет метрику модельного многообразия M_q, то есть в начале координат выполнено $q(0) = 0$ и $q'(0) = 1$.

Лемма 2. *Пусть гладкая положительная функция* $q(r)$, *определенная на* $[0; \infty)$, *выпукла вверх. Тогда существует* $\lim_{r\to\infty} q'(r) = a$, *где* $a = const$, *такая, что* $0 \leq a \leq 1$.

Доказательство леммы очевидно и следует из теоремы о существовании предела монотонной убывающей ограниченной снизу функции и замечания 2.

Лемма 3. *Пусть функция* $q(r)$ *выпукла вверх и уравнение* (1) *имеет положительное радиально-симметричное решение* $u = u(r)$. *Тогда функция* $q^{n-2}(r)u(r)$ *не убывает на интервале* $(0; \infty)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $q^{n-2}(r)u(r)$. Ее первая производная имеет вид

$$(q^{n-2}(r)u(r))' = (n-2)q^{n-3}(r)q'(r)u(r) + q^{n-2}(r)u'(r) =$$

$$= q^{n-3}(r)((n-2)q'(r)u(r) + q(r)u'(r)) = q^{n-3}(r)v(r),$$

где

$$v(r) = (n-2)q'(r)u(r) + q(r)u'(r).$$

Определим знак функции $v(r)$. Для этого вычислим ее производную:

$$\frac{d}{dr}(v(r)) = \frac{d}{dr}\left((n-2)q'(r)u(r) + q(r)u'(r)\right) =$$

$$= (n-2)q''(r)u(r) + (n-2)q'(r)u'(r) + q'(r)u'(r) + q(r)u''(r) =$$

$$= (n-2)q''(r)u(r) + (n-1)q'(r)u'(r) + q(r)u''(r).$$

Из равенства (5) следует

$$q^{n-2}(r)((n-1)q'(r)u'(r) + q(r)u''(r)) = -q^{n-1}(r)p(r)u^{\gamma}(r),$$

откуда

$$(n-1)q'(r)u'(r) + q(r)u''(r) = -q(r)p(r)u^{\gamma}(r).$$

Таким образом получаем:

$$\frac{dv(r)}{dr} = \frac{d}{dr}\left((n-2)q'(r)u(r) + q(r)u'(r)\right) =$$

$$= -q(r)p(r)u^{\gamma}(r) + (n-2)q''(r)u(r) \leq 0,$$

то есть функция $v(r)$ убывает. Тогда, либо существует константа $c > 0$, для которой

$$(n-2)q'(r)u(r) + q(r)u'(r) \leq -c$$

для достаточно больших r, либо

$$(n-2)q'(r)u(r) + q(r)u'(r) \geq 0 \tag{9}$$

для $r \in (0; \infty)$.

Рассмотрим первый случай. Из положительности первого слагаемого получаем

$$q(r)u'(r) \leq -c,$$

откуда

$$u'(r) \leq -\frac{c}{q(r)}.$$

Интегрируя последнее неравенство от $[r_0; r]$, получаем

$$u(r) \leq u(r_0) - c\int_{r_0}^{r} \frac{dt}{q(t)}.$$

Из выпуклости вверх функции $q(r)$ получаем, что существует константа $C > 0$ такая, что $q(r) \leq Cr$. Тогда

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{q(t)} \geq C\int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{t} = \infty.$$

Учитывая это, получаем, что $u(r) \to -\infty$ при достаточно больших r, что противоречит условию леммы.

Поэтому справедливо неравенство (9), то есть функция $v(r) \geq 0$. Следовательно,

$$(q^{n-2}(r)u(r))' \geq 0,$$

а это означает, что функция $q^{n-2}(r)u(r)$ не убывает. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть функция $q(r)$ выпукла вверх. Тогда, если*

$$\frac{d}{dr}\left(q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)\right) \geq 0,$$

то

$$\Phi(r) \geq 0.$$

Доказательство. Перепишем условие леммы

$$\frac{d}{dr}\left(q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)\right) \geq 0$$

в следующем виде:

$$\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}q^{\frac{n-\gamma(n-2)}{2}}(r)q'(r)p(r) + q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)p'(r) \geq 0.$$

Откуда

$$p'(r) \geq -\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}q^{-1}(r)q'(r)p(r).$$

Применяя последнее неравенство к равенству (6), получаем:

$$\Phi(r) \geq -\frac{\gamma+3}{\gamma+1}q^{n-1}(r)p(r) + \frac{4n-4}{\gamma+1}q^{2n-3}(r)q'(r)p(r)\int_r^{\infty} \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)} -$$

$$-\frac{2}{\gamma+1}\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}q^{2n-3}(r)q'(r)p(r)\int_r^\infty \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)} =$$

$$= -\frac{\gamma+3}{\gamma+1}q^{n-1}(r)p(r) + \frac{(n-2)(\gamma+3)}{\gamma+1}q^{2n-3}(r)q'(r)p(r)\int_r^\infty \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)} \geq$$

$$\geq -\frac{\gamma+3}{\gamma+1}q^{n-1}(r)p(r) + \frac{(n-2)(\gamma+3)}{\gamma+1}q^{2n-3}(r)p(r)\int_r^\infty \frac{dq(\xi)}{q^{n-1}(\xi)} =$$

$$= -\frac{\gamma+3}{\gamma+1}q^{n-1}(r)p(r) + \frac{\gamma+3}{\gamma+1}q^{n-1}(r)p(r) = 0.$$

В результате получили, что

$$\Phi(r) \geq 0.$$

Лемма доказана.

3. Лиувиллево свойство

В данном разделе найдем условия, при которых уравнение (1) не имеет положительных радиально-симметричных решений.

Замечание 3. В дальнейших рассуждениях нам понадобится следующее, достаточно очевидное, свойство

$$\int_r^\infty q^{-\frac{n+\gamma(n-2)}{2}}(\xi)d\xi \leq \int_r^\infty \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)} < \infty.$$

Теперь сформулируем основные теоремы о несуществовании положительных радиально-симметричных решений уравнения (1).

Теорема 4. *Пусть функция $q(r)$ выпукла вверх. Предположим, что выполнены следующие условия*

$$\frac{d}{dr}\left(q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)\right) \geq 0 \tag{10}$$

и

$$\int_r^\infty q^{n-1-\gamma(n-2)}(\xi)p(\xi)d\xi = \infty. \tag{11}$$

Тогда уравнение (1) не имеет на M_q положительных радиально-симметричных решений.

Замечание 4. Из выпуклости вверх функции $q(r)$ следует, что при $n = 2$ многообразие M_q имеет параболический тип, то есть любое неотрицательное решение уравнения (1) есть тождественный нуль. Поэтому все дальнейшие рассуждения будут проводиться для $n > 2$.

Доказательство. Уравнение (1), с учетом того, что мы рассматриваем радиально-симметричные решения, эквивалентно дифференциальному уравнению (5).

Предположим, что найдется $\alpha > 0$, для которого существует положительное решение уравнения (1) $u_\alpha(r)$ на интервале $[0;\infty)$.

Заметим, что $u_\alpha(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(q^{3-n}(r)\left(q^{n-2}(r)u_\alpha(r)\right)'\right)' = (n-2)q''(r)u_\alpha(r) - q(r)p(r)u_\alpha^\gamma(r).$$

Интегрируя последнее равенство по отрезку $[r;\tau]$, получаем:

$$\int_r^\tau \left(q^{3-n}(\xi)\left(q^{n-2}(\xi)u_\alpha(\xi)\right)'\right)' d\xi =$$

$$= \int_r^\tau (n-2)q''(\xi)u_\alpha(\xi)d\xi - \int_r^\tau q(\xi)p(\xi)u_\alpha^\gamma(\xi)d\xi$$

или

$$q^{3-n}(\tau)\left(q^{n-2}(\tau)u_\alpha(\tau)\right)' - q^{3-n}(r)\left(q^{n-2}(r)u_\alpha(r)\right)' =$$

$$= (n-2)\int_r^\tau q''(\xi)u_\alpha(\xi)d\xi - \int_r^\tau q(\xi)p(\xi)u_\alpha^\gamma(\xi)d\xi. \qquad (12)$$

Из леммы 3 следует, что $\left(q^{n-2}(\tau)u_\alpha(\tau)\right)' \geq 0$. Поэтому, из равенства (12) получаем:

$$-q^{3-n}(r)\left(q^{n-2}(r)u_\alpha(r)\right)' \leq (n-2)\int_r^\tau q''(\xi)u_\alpha(\xi)d\xi - \int_r^\tau q(\xi)p(\xi)u_\alpha^\gamma(\xi)d\xi$$

или

$$\left(q^{n-2}(r)u_\alpha(r)\right)' \geq$$

$$\geq q^{n-3}(r)\left(\int_r^\tau q(\xi)p(\xi)u_\alpha^\gamma(\xi)d\xi - (n-2)\int_r^\tau q''(\xi)u_\alpha(\xi)d\xi\right).$$

Переходя здесь к пределу при $\tau \to \infty$, получаем

$$\left(q^{n-2}(r)u_\alpha(r)\right)' \geq$$

$$\geq q^{n-3}(r)\left(\int_r^\infty q(\xi)p(\xi)u_\alpha^\gamma(\xi)d\xi - (n-2)\int_r^\infty q''(\xi)u_\alpha(\xi)d\xi\right).$$

Так как функция $q(r)$ выпукла вверх, то $q''(r) \leq 0$. Тогда

$$\left(q^{n-2}(r)u_\alpha(r)\right)' \geq q^{n-3}(r)\int_r^\infty q(\xi)p(\xi)u_\alpha^\gamma(\xi)d\xi$$

или

$$\left(q^{n-2}(r)u_\alpha(r)\right)' \geq q^{n-3}(r)\times$$

$$\times \int_r^\infty q^{1-\gamma(n-2)-\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(\xi)\cdot q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(\xi)\cdot p(\xi)\cdot\left(q^{n-2}(\xi)u_\alpha(\xi)\right)^\gamma d\xi. \qquad (13)$$

Из условия теоремы уравнения (10) следует, что функция $q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)$ не убывает и достигает минимума в нижнем пределе интегрирования. Тогда из неравенства (13) следует, что

$$\left(q^{n-2}(r)u_\alpha(r)\right)' \geq q^{n-3}(r)q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)\times$$

$$\times \int_r^\infty q^{1-\gamma(n-2)-\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(\xi)\cdot\left(q^{n-2}(\xi)u_\alpha(\xi)\right)^\gamma d\xi =$$

$$= q^{\frac{3n-4-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)\int_r^\infty q^{1-\gamma(n-2)-\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(\xi)\cdot\left(q^{n-2}(\xi)u_\alpha(\xi)\right)^\gamma d\xi. \qquad (14)$$

Кроме того, из леммы 3 следует, что функция $q^{n-2}(r)u_\alpha(r)$ не убывает и также достигает минимума в нижнем пределе интегрирования, поэтому из неравенства (14) получаем

$$\left(q^{n-2}(r)u_\alpha(r)\right)' \geq$$
$$\geq q^{\frac{3n-4-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)(q^{n-2}(r)u_\alpha(r))^\gamma \int_r^\infty q^{-\frac{n+\gamma(n-2)}{2}}(\xi)d\xi.$$

В результате получаем:

$$\frac{(q^{n-2}(r)u_\alpha(r))'}{(q^{n-2}(r)u_\alpha(r))^\gamma} \geq q^{\frac{3n-4-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)\int_r^\infty q^{-\frac{n+\gamma(n-2)}{2}}(\xi)d\xi.$$

Так как функция $q(r)$ выпукла вверх, то согласно лемме 2 функция $q'(r)$ убывает, и $q'(r) \leq 1$, поэтому

$$q^{\frac{3n-4-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)\int_r^\infty q^{-\frac{n+\gamma(n-2)}{2}}(\xi)d\xi \geq q^{\frac{3n-4-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)\int_r^\infty q^{-\frac{n+\gamma(n-2)}{2}}(\xi)q'(\xi)d\xi =$$
$$= \frac{2}{(n-2)(\gamma+1)}q^{n-1-\gamma(n-2)}(r)p(r),$$

то есть

$$\frac{(q^{n-2}(r)u_\alpha(r))'}{(q^{n-2}(r)u_\alpha(r))^\gamma} \geq \frac{2}{(n-2)(\gamma+1)}q^{n-1-\gamma(n-2)}(r)p(r). \qquad (15)$$

Проинтегрируем данное неравенство по отрезку $[r;\tau]$:

$$\int_r^\tau \frac{(q^{n-2}(\xi)u_\alpha(\xi))'d\xi}{(q^{n-2}(\xi)u_\alpha(\xi))^\gamma} \geq \frac{2}{(n-2)(\gamma+1)}\int_r^\tau q^{n-1-\gamma(n-2)}(\xi)p(\xi)d\xi,$$

откуда

$$\frac{(q^{n-2}(\tau)u_\alpha(\tau))^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{(q^{n-2}(r)u_\alpha(r))^{1-\gamma}}{1-\gamma} \geq$$
$$\geq \frac{2}{(n-2)(\gamma+1)}\int_r^\tau q^{n-1-\gamma(n-2)}(\xi)p(\xi)d\xi.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{(q^{n-2}(r)u_\alpha(r))^{1-\gamma}}{\gamma-1} \geq \frac{2}{(n-2)(\gamma+1)}\int_r^\tau q^{n-1-\gamma(n-2)}(\xi)p(\xi)d\xi.$$

Таким образом,

$$(q^{n-2}(r)u_\alpha(r))^{1-\gamma} \geq \frac{2(\gamma-1)}{(n-2)(\gamma+1)}\int_r^\tau q^{n-1-\gamma(n-2)}(\xi)p(\xi)d\xi$$

или

$$q^{n-2}(r)u_\alpha(r) \leq \left(\frac{2(\gamma-1)}{(n-2)(\gamma+1)}\int_r^\tau q^{n-1-\gamma(n-2)}(\xi)p(\xi)d\xi\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Переходя здесь к пределу при $\tau \longrightarrow \infty$, учитывая условие (11), получаем, что $u_\alpha(r) = 0$. Данное противоречие и доказывает теорему.

Теорема 5. *Пусть функция $q(r)$ выпукла вверх. Предположим, что выполнены следующие условия*

$$\frac{d}{dr}\left(q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)\right) \geq 0, \tag{16}$$

$$\int_r^{\infty} q^{n-1-\gamma(n-2)}(\xi)p(\xi)d\xi < \infty$$

и

$$\lim_{r\to\infty} q^{n-\gamma(n-2)}(r)p(r) = \infty. \tag{17}$$

Тогда уравнение (1) не имеет на M_q положительных радиально-симметричных решений.

Доказательство. Предположим, что найдется $\alpha > 0$, для которого решение $u_\alpha(r)$ уравнения (1) существует и положительно на интервале $[0;\infty)$.

Далее, повторяя доказательство теоремы 4, приходим к следующему неравенству

$$q^{n-2}(r)u_\alpha(r) \leq \left(\frac{2(\gamma-1)}{(n-2)(\gamma+1)}\int_r^{\infty} q^{n-1-\gamma(n-2)}(\xi)p(\xi)d\xi\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} =$$

$$= \left(\frac{2(\gamma-1)}{(n-2)(\gamma+1)}\int_r^{\infty} q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(\xi)p(\xi)q^{\frac{n-4-\gamma(n-2)}{2}}(\xi)d\xi\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}.$$

В силу (16) функция $q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)$ не убывает и достигает минимума в нижнем пределе интегрирования. Тогда получаем, что

$$q^{n-2}(r)u_\alpha(r) \leq$$

$$\leq \left(\frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)(n-2)}q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)\int_r^{\infty} q^{\frac{n-4-\gamma(n-2)}{2}}(\xi)d\xi\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Так как функция $q(r)$ выпукла вверх, имеем:

$$q^{n-2}(r)u_\alpha(r) \leq$$

$$\leq \left(\frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)(n-2)}q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)\int_r^{\infty} q^{\frac{n-4-\gamma(n-2)}{2}}(\xi)d\xi\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)(n-2)}q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)\int_r^{\infty} q^{\frac{n-4-\gamma(n-2)}{2}}(\xi)q'(\xi)d\xi\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} =$$

$$= \left(\frac{4}{(\gamma+1)(n-2)^2}q^{n-\gamma(n-2)}(r)p(r)\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Переходя здесь к пределу при $r \to \infty$, учитывая условие (17), получаем, что функция $q^{n-2}(r)u_\alpha(r) \leq 0$, что противоречит положительности решения. Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть функция $q(r)$ выпукла вверх. Предположим, что выполнены следующие условия*

$$\lim_{r\to\infty} q'(r) = a,$$

где $0 < a \leq 1$,

$$\frac{d}{dr}\left(q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)\right) \geq 0,$$

$$\int_r^\infty q^{n-1-\gamma(n-2)}(\xi)p(\xi)d\xi < \infty$$

и

$$\lim_{r\to\infty} q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r) = \infty. \tag{18}$$

Тогда уравнение (1) не имеет на M_q положительных радиально-симметричных решений.

Доказательство. Предположим, что найдется $\alpha > 0$, для которого решение $u_\alpha(r)$ уравнения (1) существует и положительно на интервале $[0;\infty)$.

Далее, повторяя рассуждения доказательства теоремы 5, приходим к следующему неравенству

$$q^{n-2}(r)u_\alpha(r) \leq \left(\frac{4}{(\gamma+1)(n-2)^2}q^{n-\gamma(n-2)}(r)p(r)\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}.$$

С другой стороны,

$$\left(\frac{4}{(\gamma+1)(n-2)^2}q^{n-\gamma(n-2)}(r)p(r)\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} =$$

$$= \left(\frac{4}{(\gamma+1)(n-2)^2}q^{n-\gamma(n-2)}(r)q^{\frac{n-2-\gamma(n-2)}{2}}(r)q^{-\frac{n-2-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} =$$

$$= q^{\frac{n-2}{2}}(r)\left(\frac{4}{(\gamma+1)(n-2)^2}q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Отсюда получаем

$$q^{\frac{n-2}{2}}(r)u_\alpha(r) \leq \left(\frac{4}{(\gamma+1)(n-2)^2}q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Переходя здесь к пределу при $r \to \infty$, учитывая условие теоремы (18), получаем

$$\lim_{r\to\infty} q^{\frac{n-2}{2}}(r)u_\alpha(r) = 0. \tag{19}$$

Перепишем неравенство (15) в следующем виде:

$$\left(q^{n-2}(r)u_\alpha(r)\right)' \geq \frac{2}{(n-2)(\gamma+1)}q^{n-1}(r)p(r)u_\alpha^\gamma(r). \tag{20}$$

Рассмотрим функцию $V(r)$:

$$V(r) = q^{n-1}(r)u'(r)u(r) + q^{2(n-1)}(r)(u'(r))^2\int_r^\infty \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)} +$$

$$+\frac{2}{\gamma+1}q^{2(n-1)}(r)p(r)u^{\gamma+1}(r)\int_r^\infty \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)} =$$

$$= q^{n-1}(r)u'_\alpha(r)u_\alpha(r) + q^{2(n-1)}(r)(u'_\alpha(r))^2\int_r^\infty \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)} +$$

$$+\left(\frac{2}{(\gamma+1)(n-2)}q^{n-1}(r)p(r)u^\gamma_\alpha(r)\right)\times$$

$$\times\left((n-2)q^{n-1}(r)u_\alpha(r)\int_r^\infty \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)}\right).$$

Учитывая неравенство (20), получим:

$$V(r) \le q^{n-1}(r)u'_\alpha(r)u_\alpha(r) + q^{2(n-1)}(r)(u'_\alpha(r))^2\int_r^\infty \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)} +$$

$$+(n-2)q^{n-1}(r)u_\alpha(r)(q^{n-2}(r)u_\alpha(r))'\int_r^\infty \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)}. \tag{21}$$

Согласно лемме 1

$$V'(r) = \Phi(r)u^{\gamma+1}_\alpha(r).$$

Отсюда получаем, что функция $V(r)$ не убывает.

Фиксируем $R \ge 1$, такое что $V(r) \ge V(R) > V(0) = 0$ для всех $r \ge R$. Тогда из неравенства (21) получаем:

$$V(R) \le q^{n-1}(r)u'_\alpha(r)u_\alpha(r) + q^{2(n-1)}(r)(u'_\alpha(r))^2\int_r^\infty \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)} +$$

$$+(n-2)q^{n-1}(r)u_\alpha(r)(q^{n-2}(r)u_\alpha(r))'\int_r^\infty \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)}.$$

Заметим, что последнее неравенство эквивалентно следующему:

$$V(R) \le \left(q^{3-n}(r)(q^{n-2}(r)u_\alpha(r))'\right)^2\frac{q^{2n-4}(r)}{q'(r)}\int_r^\infty \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)} +$$

$$+q^{n-1}(r)u'_\alpha(r)u_\alpha(r) - (n-2)q^{2n-3}(r)u_\alpha(r)u'_\alpha(r)\int_r^\infty \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)}$$

или

$$\left(q^{3-n}(r)(q^{n-2}(r)u_\alpha(r))'\right)^2\frac{q^{2n-4}(r)}{q'(r)}\int_r^\infty \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)} \ge V(R) -$$

$$-q^{n-1}(r)u'_\alpha(r)u_\alpha(r) + (n-2)q^{2n-3}(r)u_\alpha(r)u'_\alpha(r)\int_r^\infty \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)}.$$

Отсюда получаем:

$$\left(q^{3-n}(r)(q^{n-2}(r)u_\alpha(r))'\right)^2 \frac{q^{2n-4}(r)}{q'(r)} \int_r^\infty \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)} \geq V(R) +$$

$$+ (n-2)q^{2n-3}(r)u_\alpha(r)u'_\alpha(r) \int_r^\infty \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)}. \tag{22}$$

Рассмотрим выражение

$$(n-2)q^{2n-3}(r)u_\alpha(r)u'_\alpha(r) \int_r^\infty \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)}. \tag{23}$$

Согласно лемме 3,

$$(n-2)q'(r)u_\alpha(r) + q(r)u'_\alpha(r) \geq 0$$

или

$$u'_\alpha(r) \geq -\frac{(n-2)q'(r)u_\alpha(r)}{q(r)}.$$

Тогда из (23) получаем:

$$(n-2)q^{2n-3}(r)u_\alpha(r)u'_\alpha(r) \int_r^\infty \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)} \geq$$

$$\geq -(n-2)^2 q^{2n-4}(r)q'(r)u_\alpha^2(r) \int_r^\infty \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)}. \tag{24}$$

Из (19) следует, что

$$q^{\frac{n-2}{2}}(r)u_\alpha(r) \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

Обозначим

$$\lambda(r) = q^{\frac{n-2}{2}}(r)u_\alpha(r)$$

или

$$u_\alpha^2(r) = \frac{\lambda^2(r)}{q^{n-2}(r)}.$$

Тогда, применяя последнее равенство к (24), получаем:

$$\psi(r) = -(n-2)^2 q^{2n-4}(r)q'(r)u_\alpha^2(r) \int_r^\infty \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)} =$$

$$= -(n-2)^2 q'(r)q^{n-2}(r)\lambda^2(r) \int_r^\infty \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)}.$$

Покажем, что функция $\psi(r) \to 0$ при $r \to \infty$. Заметим, что

$$\lim_{r\to\infty} q^{n-2}(r) \int_r^\infty \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)} = \frac{1}{(n-2)a},$$

где $a = \text{const} \neq 0$. Тогда, учитывая, что $\lambda^2(r) \to 0$, получим, что функция $\psi(r) \to 0$ при $r \to \infty$.

Таким образом, из неравенства (22) получаем, что при некотором $r > r_1$

$$\left(q^{3-n}(r)(q^{n-2}(r)u_\alpha(r))'\right)^2 \frac{q^{2n-4}(r)}{q'(r)} \int_r^\infty \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)} \geq \frac{V(R)}{2}$$

или

$$\left(q^{3-n}(r)(q^{n-2}(r)u_\alpha(r))'\right)^2 \geq \frac{V(R)}{2} \frac{q'(r)}{q^{2n-4}(r)\int_r^\infty \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)}}. \tag{25}$$

Покажем, что

$$\frac{q'(r)}{\int_r^\infty \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)}} \geq Cq^{n-2}(r), \tag{26}$$

где $C = \mathrm{const} = (n-2)a^2$. Действительно, вычисляя предел по правилу Лопиталя

$$\lim_{r\to\infty} \frac{q^{2-n}(r)q'(r)}{\int_r^\infty q^{1-n}(\xi)d\xi} = \lim_{r\to\infty} \frac{-(n-2)q^{1-n}(r)(q'(r))^2 + q^{2-n}(r)q''(r)}{-q^{1-n}(r)} =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \left((n-2)(q'(r))^2 - q(r)q''(r)\right) \geq \lim_{r\to\infty}(n-2)(q'(r))^2 = (n-2)a^2,$$

где $a = \mathrm{const} \neq 0$, получаем оценку (26).

Тогда, применяя (26) к неравенству (25), получаем:

$$\left(q^{3-n}(r)(q^{n-2}(r)u_\alpha(r))'\right)^2 \geq \frac{V(R)}{2} \frac{q'(r)}{q^{2n-4}(r)\int_r^\infty \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)}} \geq$$

$$\geq \frac{V(R)}{2} \frac{Cq^{n-2}(r)}{q^{2n-4}(r)} = \frac{V(R)}{2} \frac{C}{q^{n-2}(r)},$$

или

$$(q^{n-2}(r)u_\alpha(r))' \geq q^{n-3}(r)\sqrt{\frac{V(R)C}{2}} q^{-\frac{n-2}{2}}(r) = \sqrt{\frac{V(R)C}{2}} q^{\frac{n-4}{2}}(r).$$

Интегрируя данное неравенство по отрезку $[R;r]$, получаем:

$$q^{n-2}(r)u_\alpha(r) \geq q^{n-2}(R)u_\alpha(R) + \sqrt{\frac{V(R)C}{2}} \int_R^r q^{\frac{n-4}{2}}(t)dt \geq \sqrt{\frac{V(R)C}{2}} \int_R^r q^{\frac{n-2}{2}}(t)q^{-1}(t)dt.$$

Данное неравенство эквивалентно следующему

$$q^{n-2}(r)u_\alpha(r) \geq \sqrt{\frac{V(R)C}{2}} \int_R^r q^{\frac{n-2}{2}}(t)q^{-1}(t)dt.$$

Тогда, учитывая, что функция $q^{\frac{n-2}{2}}(t)$ возрастает и достигает максимум в верхнем пределе интегрирования, имеем:

$$q^{n-2}(r)u_\alpha(r) \geq \sqrt{\frac{V(R)C}{2}} q^{\frac{n-2}{2}}(r) \int_R^r \frac{dt}{q(t)}$$

или

$$q^{\frac{n-2}{2}}(r)u_\alpha(r) \geq \sqrt{\frac{V(R)C}{2}} \int_R^r \frac{dt}{q(t)}.$$

Отсюда, так как функция $q(r)$ выпукла вверх и, учитывая условие, что $0 < q'(r) \leq \leq 1$, получаем:

$$q^{\frac{n-2}{2}}(r)u_\alpha(r) \geq \sqrt{\frac{V(R)C}{2}} \int_R^r \frac{dt}{q(t)} \geq \sqrt{\frac{V(R)C}{2}} q'(r) \int_R^r \frac{dt}{q(t)} \geq$$

$$\geq \sqrt{\frac{V(R)C}{2}} \int_R^r \frac{q'(t)dt}{q(t)} = \sqrt{\frac{V(R)C}{2}} \int_R^r \frac{dq(t)}{q(t)} =$$

$$= \sqrt{\frac{V(R)C}{2}} \ln \frac{q(r)}{q(R)}.$$

Или, учитывая, что $C = \text{const} = (n-2)a^2$, из последнего неравенства окончательно получаем:

$$q^{\frac{n-2}{2}}(r)u_\alpha(r) \geq a\sqrt{\frac{V(R)}{2(n-2)}} \ln \frac{q(r)}{q(R)}.$$

Переходя здесь к пределу при $r \to \infty$, получаем, что

$$\lim_{r\to\infty} q^{\frac{n-2}{2}}(r)u_\alpha(r) = \infty.$$

В результате получаем противоречие с равенством (19), согласно которому данный предел равен нулю. Теорема доказана.

Следствие 3. *Пусть в R^n выполнены условия*

$$\frac{d}{dt}\left(t^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}} p(t)\right) \geq 0$$

и

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}} p(t) = \infty.$$

Тогда для любого $\alpha > 0$ уравнение (1) не имеет положительных радиально-симметричных решений (то есть справедливо утверждение теоремы B).

Доказательство. Так как в R^n функция $q(r) = t$, то

$$\Phi(t) = \frac{2}{(\gamma+1)(n-2)} t^{\frac{(n-2)(\gamma+1)}{2}} \frac{d}{dt} \left(t^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}} p(t) \right).$$

Заметим, что в R^n $q'(t) = 1$.

Отсюда легко получаем нужное. Следствие доказано.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 13-01-97038-р_поволжье_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курмакаев, Р. Ф. Асимптотические свойства неограниченных решений эллиптических уравнений на модельных римановых многообразиях / Р. Ф. Курмакаев, А. Г. Лосев // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Мат. Физ. — 2012. — № 2 (17). — С. 30–40.

2. Лосев, А. Г. Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида / А. Г. Лосев // Изв. вузов. Математика. — 1991. — № 12. — С. 15–24.

3. Лосев, А. Г. О поведении ограниченных решений уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Мат. Физ. — 1998. — Вып. 3. — С. 32–43.

4. Лосев, А. Г. О поведении ограниченных решений уравнения $\Delta u - c(x)u = 0$ на римановом многообразии специального вида / А. Г. Лосев // Мат. заметки. — 1999. — Т. 65, № 2. — С. 215–221.

5. Лосев, А. Г. О положительных решениях квазилинейных эллиптических неравенств на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, Ю. С. Федоренко // Мат. заметки. — 2007. — Т. 81, № 6. — С. 867–878.

6. Лосев, А. Г. Об асимптотическом поведении положительных решений некоторых квазилинейных неравенств на модельных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Уфим. мат. журн. — 2013. — Т. 5, № 1. — С. 83–89.

7. Лосев, А. Г. Об асимптотическом поведении решений некоторых уравнений эллиптического типа на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Изв. вузов. Математика. — 1999. — Т. 445, № 6. — С. 41–49.

8. Лосев, А. Г. Об одном критерии гиперболичности некомпактных римановых многообразий специального вида / А. Г. Лосев // Мат. заметки. — 1996. — Т. 59, № 4. — С. 558–564.

9. Лосев, А. Г. Положительные решения квазилинейных неравенств на модельных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Мат. Физ. — 2013. — № 1 (18). — С. 59–69.

10. Gidas, B. Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations / B. Gidas, J. Spruck // Comm Pure Appl. Math. — 1981. — V. 34:4. — P. 525–598.

11. Grigor'yan, A. Analitic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds / A. Grigor'yan // Bull. Amer. Math. Soc. — 1999. — V. 36, № 2. — P. 135–249.

12. Kusano, T. Positive entire solutions of superlinear elliptic equations / T. Kusano, M. Naito // Hirosima math. J. — 1986. — V. 16. — P. 361–366.

13. Serrin, J. Cauchy–Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities / J. Serrin, H. Zou // Acta. Math. — 2002. — V. 189:1. — P. 79–142.

REFERENCES

1. Kurmakaev R.F., Losev A.G. Asimptoticheskie svoystva neogranichennykh resheniy ellipticheskikh uravneniy na model'nykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On the asymptotic behaviour unbounded solutions of the elliptic equation on the model Riemannian manifolds]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Mat. Fiz.* [Journal of Volgograd State University, series 1, Mathematics. Physics], 2012, no. 2 (17), pp. 30–40.

2. Losev A.G. Nekotorye liuvillevy teoremy na rimanovykh mnogoobraziyakh spetsial'nogo vida [Some Liouville theorems on Riemannian manifolds of special type]. *Izv. vuzov. Matematika* [Soviet Mathematics], 1991, no. 12, pp. 15–24.

3. Losev A.G., Mazepa E.A. O povedenii ogranichennykh resheniy uravneniya Shredingera na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On the behavior of bounded solutions for Schrödinger equation on non-compact Riemannian manifold]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Mat. Fiz.* [Journal of Volgograd State University, series 1, Mathematics. Physics], 1998, issue 3, pp. 32–43.

4. Losev A.G. O povedenii ogranichennykh resheniy uravneniya $\Delta u - c(x)u = 0$ na rimanovom mnogoobrazii spetsial'nogo vida [On the behavior of bounded solutions for equation $\Delta u - c(x)u = 0$ on Riemannian manifolds of special type]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes], 1999, vol. 65, no. 2, pp. 215–221.

5. Losev A.G., Fedorenko Yu.S. O polozhitel'nykh resheniyakh kvazilineynykh ellipticheskikh neravenstv na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On positive solutions for quasilinear elliptic inequalities on noncompact Riemannian manifolds]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes], 2007, vol. 81, no. 6, pp. 867–878.

6. Losev A.G., Mazepa E.A. Ob asimptoticheskom povedenii polozhitel'nykh resheniy nekotorykh kvazilineynykh neravenstv na model'nykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On asymptotic behavior of positive solutions for some quasilinear inequalities on noncompact Riemannian manifolds]. *Ufim. mat. zhurn.* [Ufa Mathematical Journal], 2013, vol. 5, no. 1, pp. 83–89.

7. Losev A.G., Mazepa E.A. Ob asimptoticheskom povedenii resheniy nekotorykh uravneniy ellipticheskogo tipa na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On asymptotic behavior of solutions for some elliptic equations on noncompact Riemannian manifolds]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 1999, vol. 445, no. 6, pp. 41–49.

8. Losev A.G. Ob odnom kriterii giperbolichnosti nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziy spetsial'nogo vida [On the hyperbolicity criterion for noncompact Riemannian manifolds of special type]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes], 1996, vol. 59, no. 4, pp. 558–564.

9. Losev A.G., Mazepa E.A. Polozhitel'nye resheniya kvazilineynykh neravenstv na model'nykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On asymptotical behavior of the positive solutions some quasilinear inequalities on model Riemannian manifolds]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Mat. Fiz.* [Journal of Volgograd State University, series 1, Mathematics. Physics], 2013, no. 1 (18), pp. 59–69.

10. Gidas B., Spruck J. Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations. *Comm Pure Appl. Math.*, 1981, vol. 34:4, pp. 525–598.

11. Grigor'yan A. Analitic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1999, vol. 36, no. 2, pp. 135–249.

12. Kusano T., Naito M. Positive entire solutions of superlinear elliptic equations. *Hirosima math. J.*, 1986, vol. 16, pp. 361–366.

13. Serrin J., Zou H. Cauchy–Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities. *Acta. Math.*, 2002, vol. 189:1, pp. 79–142.

ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOME SEMILINEAR EQUATIONS' SOLUTIONS ON THE MODEL RIEMANNIAN MANIFOLDS

Losev Alexander Georgievich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Director, Institute of Mathematics and IT
Volgograd State University
allosev59@gmail.com
Prospect Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Sazonov Aleksey Pavlovich

Assistent Teacher, Department of Mathematical Analysis and Function Theory
Volgograd State University
sazonoff2007@gmail.com
Prospect Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. T. Kusano, M. Naito [12] studied the positive solutions of the equation (1) in R^n and received some conditions for the existence of positive radially symmetric solutions of the equation, which are cited in the paper (Theorem A and Theorem B). The aim of this work is to study the positive solutions of a semilinear elliptic equation (1) on model Riemannian manifolds.

The first result obtained in the study of solutions of (1) is fairly obvious and is based on the properties of manifolds of the parabolic type.

Theorem. *Let the manifold M_q is such that*

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{q^{n-1}(t)} = \infty.$$

Then any non-negative solution of the equation (1) is identically zero.

Next, we consider the manifold of the hyperbolic type, i. e. we assume that

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{q^{n-1}(t)} < \infty.$$

We denote

$$\Phi(r) = \frac{2}{\gamma+1} q^{\frac{n-2+\gamma(n-2)}{2}}(r) \frac{d}{dr}\left(q^{\frac{3n-2-\gamma(n-2)}{2}}(r) p(r) \int_r^{\infty} \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)}\right) -$$

$$- q^{n-1}(r)p(r) + (n-2)q^{2n-3}(r)q'(r)p(r) \int_r^{\infty} \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)}.$$

One of the main results is the statement that generalizes the Theorem of T. Kusano, M. Naito [12] (Theorem A in the paper).

Theorem. *Assume that*

$$\Phi(r) \leq 0.$$

Then, for any $\alpha > 0$, the equation (1) has positive radially symmetric solution on M_q, such that $u(0) = \alpha$.

The assertion of Theorem A can be derived as the corollary of this theorem.

In addition, in this paper we find an upper bound for the solutions of the equation (1).

Theorem. *If the equation (1) has a positive radially symmetric solution, then the following estimate is valid:*

$$u(r) \leq \left(\frac{1}{\alpha^{1-\gamma} + (\gamma - 1) \int_0^r \frac{1}{q^{n-1}(t)} \int_0^t q^{n-1}(\xi) p(\xi) d\xi dt} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Now we note a condition of positivity of the $\Phi(r)$.

Lemma. *Let the function $q(r)$ is convex. If*

$$\frac{d}{dr}\left(q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)\right) \geq 0,$$

then

$$\Phi(r) \geq 0.$$

Also in the paper we obtained the conditions under which the equation (1) has no positive radially symmetric solutions.

Theorem. *Let the function $q(r)$ is convex. Assume that*

$$\frac{d}{dr}\left(q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)\right) \geq 0,$$

and

$$\int_r^{\infty} q^{n-1-\gamma(n-2)}(\xi)p(\xi)d\xi = \infty.$$

Then the equation (1) has no positive radially symmetric solution on M_q .

Theorem. *Let the function $q(r)$ is convex. Assume that*

$$\frac{d}{dr}\left(q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)\right) \geq 0,$$

$$\int_r^{\infty} q^{n-1-\gamma(n-2)}(\xi)p(\xi)d\xi < \infty$$

and

$$\lim_{r\to\infty} q^{n-\gamma(n-2)}(r)p(r) = \infty.$$

Then the equation (1) has no positive radially symmetric solutions on M_q.

Theorem. *Let the function $q(r)$ is convex. Assume that*

$$\lim_{r\to\infty} q'(r) = a,$$

where $0 < a \leq 1$,

$$\frac{d}{dr}\left(q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)\right) \geq 0,$$

$$\int_r^{\infty} q^{n-1-\gamma(n-2)}(\xi)p(\xi)d\xi < \infty$$

and

$$\lim_{r\to\infty} q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r) = \infty.$$

Then the equation (1) has no positive radially symmetric solutions on M_q.

The assertion of Theorem B can be derived as the corollary of these theorems.

Key words: semilinear elliptic equations, theorems of Liouville, model Riemannian manifolds, radially symmetric solutions, problem of Cauchy.