www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2024.3.1

УДК 517.95
ББК 22.161.6

Дата поступления статьи: 04.09.2024
Дата принятия статьи: 23.09.2024

# ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ НА НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

**Александр Георгиевич Лосев**

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры
математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
allosev59@gmail.com, alexander.losev@volsu.ru
https://orcid.org/0000-0002-1072-8375
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

**Аннотация.** Работа выполнена в рамках тематики, посвященной асимптотическому поведению решений дифференциальных уравнений в частных производных на некомпактных римановых многообразиях. Наиболее популярными разделами подобных исследований являются теоремы типа Лиувилля о тривиальности пространств решений эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях, а также вопросы разрешимости краевых задач. Считающаяся в настоящее время классической формулировка теоремы Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая функция в $R^n$ есть тождественная постоянная. В последнее время наметилась тенденция к более общему подходу к теоремам типа Лиувилля, а именно, оцениваются размерности различных пространств решений линейных уравнений эллиптического типа. В частности, в работе А.А. Григорьяна (1990) была доказана точная оценка размерностей пространств ограниченных гармонических функций на некомпактных римановых многообразиях в терминах массивных множеств. Вообще, исследования последних десятилетий показали крайне высокую эффективность применения емкостной техники в решении указанных задач. Данная работа посвящена развитию емкостной техники, связанной с понятием массивного множества, в исследовании асимптотического поведения гармонических функций на некомпактных римановых многообразиях.

**Ключевые слова:** гармонические функции, теоремы типа Лиувилля, некомпактные римановы многообразия, массивные множества, теория потенциала.

## Введение

В исследованиях последних десятилетий была отмечена глубокая связь между классическими проблемами теории функций, теорией решения эллиптических уравнений в частных производных второго порядка, а конкретно, уравнения Лапласа — Бельтрами и стационарного уравнения Шредингера, и геометрией римановых многообразий. Данная тематика нашла свое развитие в работах российских и зарубежных математиков: M. Anderson, А.А. Григорьяна, P. Li, А.Г. Лосева, В.М. Миклюкова, Н.С. Надирашвили, D. Sulivan, L.-F. Tam, S.-T. Yau и ряда других авторов.

Изучение эллиптических уравнений на римановых многообразиях является достаточно новым направлением в современной математике и лежит на стыке математического анализа, дифференциальных уравнений с частными производными, дифференциальной геометрии, теории случайных процессов. Истоки указанной проблематики восходят к классификационной теории двумерных некомпактных римановых многообразий и поверхностей. Отличительным свойством многообразий параболического типа является выполнение для них теоремы Лиувилля, утверждающей, что всякая положительная супергармоническая функция на данном многообразии является тождественной постоянной. Получению условий параболичности в терминах различных геометрических характеристик (площади сечения, объемов геодезических шаров, секционной кривизны, кривизны Риччи, емкости и т. д.) посвящено множество работ.

За последние десятилетия был найден ряд условий параболичности типа римановых многообразий в терминах роста объема, изменения кривизны, выполнения изопериметрических неравенств и т. д. К числу одних из первых эффектных геометрических результатов в определении типа риманова многообразия относится теорема S.Y. Cheng и S.T. Yau [9], утверждающая, что полное риманово многообразие является параболическим, если объем геодезического шара радиуса $R$ растет не быстрее чем $R^2$ при $R \to \infty$.

Позднее А.А. Григорьян доказал, что параболичность типа полного риманова многообразия эквивалентна тому, что вариационная емкость любого компакта равна нулю [4]. Вообще поиски признаков параболичности имеют большую историю. Общее представление о современных исследованиях в данном вопросе можно получить, например, из работы [10].

При этом исследования, посвященные классификационной теории римановых многообразий, не потеряли своей актуальности и в настоящее время. За последние годы получены обобщения параболичности типа как для различных эллиптических операторов, так и для других геометрических объектов (графы, фракталы и т. д.). Проблемы существования нетривиальных гармонических и субгармонических функций естественным образом приводят к теоремам типа Лиувилля, которые являются наиболее популярной частью рассматриваемой тематики.

В последние годы осуществляется следующий подход к теоремам типа Лиувилля. Пусть на римановом многообразии $M$ задан класс функций $A$ и эллиптический оператор $L$. Говорят, что на $M$ выполнено $(A, L)$-лиувиллево свойство, если любое решение (субрешение) уравнения $Lu = 0$, принадлежащее классу $A$, является тождественной постоянной. В случае когда $L$ — линейный оператор, имеет смысл ставить вопрос о размерности пространств решений рассматриваемого уравнения.

Отдельно рассматривается близкая задача об асимптотическом поведении решений эллиптических уравнений на «бесконечности». Данным вопросам посвящены сотни работ (см., например, [5; 6; 11]).

Чаще всего в качестве класса $A$ рассматриваются следующие множества функций: ограниченные, положительные, суммируемые, имеющие конечный интеграл энергии, с заданной скоростью роста и др. При этом в качестве $L$ в основном берутся линейные и квазилинейные эллиптические операторы.

Ряд работ был посвящен исследованию решений эллиптических уравнений на римановых многообразиях с конечным числом концов [7; 8; 12; 13; 16].

Пусть $M$ — полное некомпактное риманово многообразие. Будем говорить, что открытое множество $E \subset M$ является концом, если оно связано, не ограничено и его граница $\partial E$ — компакт. Будем говорить, что $M$ — многообразие с концами, если $M$ представимо в виде объединения компактного множества и конечного числа непересекающихся концов.

В подавляющем большинстве работ разделяют концы параболического и гиперболического типа. Заметим, что гиперболичность типа конца $E$ эквивалентна существованию нетривиальной гармонической функции $v$ на $E$ такой, что $0 \leq v < 1$ и $v|_{\partial E} = 0$. Такую функцию $v$ принято называть емкостным потенциалом $E$.

Большая часть исследований, проводившихся в данном направлении, посвящена получению оценок размерностей различных пространств решений эллиптических уравнений в терминах количества концов параболического и гиперболического типа или других емкостных характеристиках.

Однако ограничение на структуру многообразий с концами является достаточно жестким. Развивая емкостный подход, А.А. Григорьян в работах [2] и [1] ввел понятие массивного ($D$-массивного) множества. С помощью данного понятия была получена оценка размерности пространств ограниченных гармонических функций (с конечным интегралом энергии).

Позже с помощью понятия $q$ — массивных множеств в работах [3] и [14] была получена оценка размерности пространств ограниченных решений стационарного уравнения Шредингера

$$\Delta u - q(x)u = 0.$$

Применяемый подход позволил определить точные условия существования нетривиальных ограниченных решений полулинейного уравнения

$$\Delta u - g(x, u) = 0$$

на произвольных некомпактных римановых многообразиях [15].

## Гармонические потенциалы

Важную роль в дальнейших исследованиях будет иметь понятие *массивного* множества. Следуя [10], введем его следующим образом.

Пусть $\Omega \subset M$ — открытое множество. Будем говорить, что неотрицательная функция $v$ является допустимой субгармонической функцией для $\Omega$, если она является ограниченной субгармонической функцией на $M$ такой, что $v = 0$ на $M \setminus \Omega$ и $\sup_\Omega v > 0$.

Открытое множество $\Omega$ называется *массивным*, если существует как минимум одна допустимая субгармоническая функция для $\Omega$.

Субгармоническим потенциалом $b_\Omega$ открытого множества $\Omega$ будем называть супремум всех допустимых субгармонических функций $v$ для $\Omega$ таких, что $v \leq 1$.

Если не существует допустимых субгармонических функций для $\Omega$, то будем полагать $b_\Omega = 0$. Очевидно, что $\Omega$ является массивным тогда и только тогда, когда $b_\Omega \neq 0$. Функцию $b_\Omega$ также называют гармонической мерой множества $M \setminus \Omega$.

Для множества $\Omega$ с гладкой границей функцию $b_\Omega$ можно построить как предел последовательности решений соответствующих задач Дирихле. А именно, пусть $\{B_k\}$ — произвольное гладкое исчерпание $M$, то есть последовательность открытых предкомпактных подмножеств в $M$ с гладкими границами, что $\overline{B_k} \subset B_{k+1}$ и $\cup_k B_k = M$. Пусть также $\{B_k\}$ выбрана таким образом, что границы $\partial B_k$ и $\partial\Omega$ являются трансверсальными. Далее рассмотрим решения следующих задач Дирихле

$$\left\{\begin{array}{c} \Delta b_k = 0, x \in \Omega \cap B_k \\ b_k = 0, x \in \partial\Omega \cap B_K \\ b_k = 1, x \in \partial B_k \cap \Omega \end{array}\right. .$$

Несложно проверить справедливость следующего утверждения [10].

**Предложение.** *Предположим, что $\Omega$ имеет непустую гладкую границу. Положим*

$$b_\Omega = \lim_{k\to\infty} b_k$$

*в $\Omega$, и*

$$b_\Omega = 0$$

*в $M \setminus \Omega$. Тогда справедливы следующие утверждения.*
*1. Функция $b_\Omega$ является непрерывной и субгармонической в $M$ и гармонической в $\Omega$.*
*2. Для каждого собственного открытого множества $\Omega$ имеем*

$$b_\Omega = \sup_{\Omega'} b_{\Omega'},$$

*где супремум берется по всем областям $\Omega'$ с гладкими границами, чьи замыкания содержатся в $\Omega$.*
*3. Справедлива следующая дихотомия: либо $\Omega$ — немассивное множество и $b_\Omega \equiv 0$, либо $\Omega$ — массивное множество и $\sup b_\Omega = 1$.*

Всюду далее будем рассматривать множества $\Omega$ с достаточно гладкими границами.

Перейдем к исследованию связи структуры массивных множеств и поведения гармонических функций на произвольных некомпактных римановых многообразиях. Будем считать, что $M$ — полное некомпактное риманово многообразие с пустым краем. Обозначим через $HB(M)$ пространство ограниченных гармонических на $M$ функций.

В [2] доказано, что на многообразии $M$ существует нетривиальная гармоническая функция тогда и только тогда, когда на $M$ существует как минимум два непересекающихся массивных множества. Далее будем считать, что данное требование на $M$ выполнено. В противном случае задача становится тривиальной. Несложно доказать существование функции $v_\Omega$, что $v_\Omega = 0$ в $M \setminus \Omega$ и

$$\left\{\begin{array}{c} \Delta v_\Omega = 0, x \in \Omega \\ 0 \leq v_\Omega < 1 \\ \sup v_\Omega = 1 \end{array}\right. .$$

Далее такую функцию $v_\Omega$ будем называть емкостным потенциалом $\Omega$, или емкостным потенциалом, порожденным $\Omega$ .

Пусть $\Omega$ — некоторая область многообразия $M$, а $\{B_k\}$ — произвольное гладкое исчерпание $M$. Обозначим $SH(\Omega)$ — множество емкостных потенциалов, порожденных $\Omega$. Фиксируем некоторую функцию $f \in SH(\Omega)$.

Обозначим $v_k$ решение следующей краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta v_k(x) = 0, x \in B_k \\ v_k|_{\partial B_k} = f|_{\partial B_k} \end{cases},$$

и

$$v_\Omega = \lim_{k\to\infty} v_k.$$

Функцию $v_\Omega$ будем называть гармоническим потенциалом области $\Omega$. Отметим, что $v_\Omega$ является гармонической на $M$ функцией, такой, что $0 \le v_\Omega < 1$. Также заметим, что множество гармонических потенциалов области $\Omega$ может обладать достаточно большой мощностью. С другой стороны, мы можем каждому множеству $\Omega$ поставить в соответствие единственный гармонический потенциал следующим образом.

Обозначим $h_k$ решение следующей краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta v_k(x) = 0, x \in B_k \\ h_k|_{\partial B_k \bigcap \Omega} = 1 \\ h_k|_{\partial B_k \bigcap \{M\setminus\Omega\}} = 0 \end{cases},$$

и

$$h_\Omega = \lim_{k\to\infty} h_k.$$

Заметим, что если $\Omega = M$, то $h_M = 1$. Также заметим, что если $\Omega$ — немассивное множество, то $h_\Omega = 0$, а если $\Omega$ — массивное множество, то $h_\Omega \neq 0$.

Функцию $h_\Omega$ будем называть базовым гармоническим потенциалом, порожденным областью $\Omega$ (или просто гармоническим потенциалом, порожденным $\Omega$). Отметим, что $h_\Omega$ является гармонической на $M$ функцией, такой, что $0 \le h_\Omega < 1$. Очевидно, что базовый гармонический потенциал области $\Omega$ принадлежит множеству гармонических потенциалов $\Omega$.

Обозначим линейную оболочку множества гармонических потенциалов на $M$ как $HG(M)$.

Введем на $HG(M)$ стандартную норму пространства непрерывных функций. Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Подпространство $HG(M)$ является плотным в $HB(M)$.*

***Доказательство.*** Для доказательства утверждения необходимо проверить, что для любого $\epsilon > 0$ и любой функции $u \in HB(M)$ найдется такая линейная комбинация гармонических потенциалов, что

$$\sup_{x\in M} |u(x) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i(x)| < \epsilon.$$

Предположим противное, то есть что найдется такая $u \in HB(M)$ и положительная константа $\epsilon_0 > 0$, что для любой линейной комбинации $\sum \alpha_i v_i(x)$ выполнено

$$\sup_{x\in M} |u(x) - \sum \alpha_i v_i(x)| \ge \epsilon_0,$$

или, иначе

$$\inf_{\phi\in HG(M)}\sup_{x\in M}|u(x)-\phi(x))|=\epsilon_0>0.$$

Учитывая, что константа является гармоническим потенциалом (порожденным $M$), не умаляя общности, можем считать, что $u(x)$ — положительная гармоническая функция. Умножая на соответствующие константы, можем переформулировать предположение следующим образом.

Будем предполагать, что существует положительная функция $w\in HB(M)$ такая, что для любой $v\in HG(M)$ и, в частности, для любого гармонического потенциала, выполнено

$$\|w(x)-v(x)\|\geq 1.$$

Зафиксируем некоторое $\epsilon_1>0$. Обозначим

$$\Omega=\{x\in M: w(x)>1-\epsilon_1\}.$$

Заметим, что $\Omega$ — массивное множество. Пусть $v_1(x)$ — гармонический потенциал области $\Omega$.

Докажем далее, что

$$\|w-v_1\|<1,$$

что сразу приводит к доказательству нашего утверждения.

Напомним процедуру построения гармонического потенциала и доказательство его нетривиальности. Обозначим $f=(w-1+\epsilon_1)_+$ — положительную срезку функции $(w-1+\epsilon_1)$. Очевидно, что $f$ — субгармоническая на $M$ функция. Далее строится последовательность решений краевых задач

$$\left\{\begin{array}{c}\Delta v_k(x)=0, x\in B_k\\ v_k|_{\partial B_k}=f|_{\partial B_k}\end{array}\right..$$

Обозначим

$$v'=\lim_{n\to\infty}v_k.$$

Из принципа максимума для гармонических функций сразу следует, что $v'\geq f$. Далее производится нормировка

$$v_1=\frac{1}{\epsilon_1}v'.$$

Таким образом в $\Omega$ выполнено

$$v'\geq f=w-1+\epsilon_1.$$

Отсюда получаем

$$v_1\geq\frac{1}{\epsilon_1}w+1-\frac{1}{\epsilon_1}.$$

Тогда справедливо неравенство

$$1-v_1\leq\frac{1}{\epsilon_1}(1-w),$$

или

$$\frac{1-v_1}{1-w}\leq\frac{1}{\epsilon_1}.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\epsilon_1 - \epsilon_1 v_1 \leq 1 - w,$$

или

$$w - \epsilon_1 v_1 \leq 1 - \epsilon_1.$$

Несложно увидеть справедливость неравенств

$$w - v_1 \leq 1 - \epsilon_1 + (\epsilon_1 - 1)v_1 < 1 - \epsilon_1.$$

Отсюда сразу получаем, что на $\Omega$ выполнено

$$\|w - v_1\| < 1.$$

На $M \setminus \Omega$ справедливость данного неравенства сразу следует из свойств гармонического потенциала $v_1$ и неравенства $w \leq 1 - \epsilon_1$.

Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьян, А. А. О лиувиллевых теоремах для гармонических функций с конечным интегралом Дирихле / А. А. Григорьян // Мат. сб. — 1987. — Т. 132, № 4. — С. 496–516.

2. Григорьян, А. А. О размерности пространств гармонических функций / А. А. Григорьян // Мат. заметки. — 1990. — Т. 48, № 5. — С. 55–60.

3. Григорьян, А. А. О размерности пространств решений стационарного уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях / А. А. Григорьян, А. Г. Лосев // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2017. — Т. 20, № 3. — С. 34–42. — DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.3.3

4. Григорьян, А. А. О существовании положительных фундаментальных решений уравнения Лапласа на римановых многообразиях / А. А. Григорьян // Мат. сб. — 1985. — Т. 128, № 3. — С. 354–363.

5. Зубанкова, К. А. Об асимптотическом поведении решений стационарного уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях / К. А. Зубанкова, Е. А. Мазепа, Н. М. Полубоярова // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2023. — Т. 26, № 4. — С. 18–30. — DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.4.2

6. Кондрашов, А. Н. О единственности решений уравнения Бельтрами с заданной вещественной частью на границе / А. Н. Кондрашов // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2024. — Т. 27, № 1. — С. 5–16. — DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2024.1.1

7. Корольков, С. А. Решения эллиптических уравнений на римановых многообразиях с концами / С. А. Корольков, А. Г. Лосев // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2011. — № 1. — С. 23–40.

8. Лосев, А. Г. Ограниченные решения уравнения Шредингера на римановых произведениях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Алгебра и анализ. — 2001. — Т. 13, № 1. — С. 84–110.

9. Cheng, S. Y. Differential Equations on Riemannian Manifolds and Their Geometric Applications / S. Y. Cheng, S. T. Yau // Comm. Pure and Appl. Math. — 1975. — Vol. 28, № 3. — P. 333–354.

10. Grigor'yan, A. Analytic and Geometric Background of Recurrence and Non-Explosion of the Brownian Motion on Riemannian Manifolds / A. Grigor'yan // Bulletin of Amer. Math. Soc. — 1999. — № 36. — P. 135–249.

11. Grigor'yan, A. Asymptotic Behaviour of the Heat Semigroup on Certain Riemannian Manifolds / A. Grigor'yan, E. Papageorgiou, H.-W. Zhang // From Classical Analysis to Analysis on Fractals. A Tribute to Robert Strichartz. — 2023. — Vol. 1. — P. 165–179.

12. Korolkov, S. A. Generalized Harmonic Functions of Riemannian Manifolds with Ends / S. A. Korolkov, A. G. Losev // Mathematische Zeitschrift. — 2012. — Iss. 272. — № 1–2. — P. 459–472.

13. Li, P. Harmonic Functions and the Structure of Complete Manifolds / P. Li, L.-F. Tam // J. Diff. Geom. — 1992. — Vol. 35, № 2. — P. 359–383.

14. Losev, A. G. Dimensions of Solution Spaces of the Schrodinger Equation with Finite Dirichlet Integral on Non-compact Riemannian Manifolds / A. G. Losev, V. V. Filatov // Lobachevskii J. Math. — 2019. — Vol. 40. — P. 1363–1370.

15. Losev, A. G. On Capacitary Characteristics of Noncompact Riemannian Manifolds / A. G. Losev, V. V. Filatov // Russian Mathematics. — 2021. — Vol. 65, № 3. — P. 61–67.

16. Sung, C.-J. Spaces of Harmonic Functions / C.-J. Sung, L.-F. Tam, J. Wang // J. London Math. Soc. (2). — 2000. — № 3. — P. 789–806.

## *REFERENCES*

1. Grigoryan A.A. O liuvillevykh teoremakh dlya garmonicheskikh funktsiy s konechnym integralom Dirikhle [On Liouville Theorems for Harmonic Functions with Finite Dirichlet Integral]. *Mat. sb.*, 1987, vol. 132, no. 4, pp. 496-516.

2. Grigoryan A.A. O razmernosti prostranstv garmonicheskikh funktsiy [Dimension of Spaces of Harmonic Functions]. *Mat. zametki*, 1990, vol. 48, no. 5, pp. 55-60.

3. Grigoryan A.A., Losev A.G. O razmernosti prostranstv resheniy statsionarnogo uravneniya Shredingera na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On the Dimension of the Spaces of Solutions of the Stationary Schrodinger Equation on Non-Compact Riemannian Manifolds]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2017, vol. 20, no. 3, pp. 34-42. DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.3.3

4. Grigoryan A.A. O sushchestvovanii polozhitelnykh fundamentalnykh resheniy uravneniya Laplasa na rimanovykh mnogoobraziyakh [About Existing of Positive Fundomental Solutions of Laplass's Equation on Riemannian Manifolds]. *Mat. sb.*, 1985, vol. 128, no. 3, pp. 354-363.

5. Zubankova K.A., Mazepa E.A., Poluboyarova N.M. Ob asimptoticheskom povedenii resheniy statsionarnogo uravneniya Shredingera na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On the Asymptotic Behavior of Solutions of the Stationary Schrodinger Equation on Non-Compact Riemannian Manifolds]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2023, vol. 26, no. 4, pp. 18-30. DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.4.2

6. Kondrashov A.N. O edinstvennosti resheniy uravneniya Beltrami s zadannoy veshchestvennoy chastyu na granitse [On the Uniqueness of Solutions of the Beltrami Equation with a Given Real Part on the Boundary]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2024, vol. 27, no. 1, pp. 5-16. DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2024.1.1

7. Korolkov S.A., Losev A.G. Resheniya ellipticheskikh uravneniy na rimanovykh mnogoobraziyakh s kontsami [Solutions of Elliptic Equations on Riemannian Manifolds with Ends]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika*, 2011, no. 1, pp. 23-40.

8. Losev A.G., Mazepa E.A. Ogranichennye resheniya uravneniya Shredingera na rimanovykh proizvedeniyakh [Bounded Solutions of the Schrodinger Equation on Riemannian Products]. *Algebra i analiz*, 2001, vol. 13, no. 1, pp. 84-110.

9. Cheng S.Y., Yau S.T. Differential Equations on Riemannian Manifolds and Their Geometric Applications. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 1975, vol. 28, no. 3, pp. 333-354.

10. Grigor'yan A. Analytic and Geometric Background of Recurrence and Non-Explosion of the Brownian Motion on Riemannian Manifolds. *Bulletin of Amer. Math. Soc.*, 1999, no. 36, pp. 135-249.

11. Grigor'yan A., Papageorgiou E., Zhang H.-W. Asymptotic Behaviour of the Heat Semigroup on Certain Riemannian Manifolds. *From Classical Analysis to Analysis on Fractals. A Tribute to Robert Strichartz*, 2023, vol. 1, pp. 165-179.

12. Korolkov S.A., Losev A.G. Generalized Harmonic Functions of Riemannian Manifolds with Ends. *Mathematische Zeitschrift*, 2012, iss. 272, no. 1–2, pp. 459-472.

13. Li P., Tam L.-F. Harmonic Functions and the Structure of Complete Manifolds. *J. Diff. Geom.*, 1992, vol. 35, no. 2, pp. 359-383.

14. Losev A.G., Filatov V.V. Dimensions of Solution Spaces of the Schrodinger Equation with Finite Dirichlet Integral on Non-Compact Riemannian Manifolds. *Lobachevskii J. Math*, 2019, vol. 40, pp. 1363-1370.

15. Losev A.G., Filatov V.V. On Capacitary Characteristics of Noncompact Riemannian Manifolds. *Russian Mathematics*, 2021, vol. 65, no. 3, pp. 61-67.

16. Sung C.-J., Tam L.-F., Wang J. Spaces of Harmonic Functions. *J. London Math. Soc. (2)*, 2000, no. 3, pp. 789-806.

## HARMONIC POTENTIALS ON NON-COMPACT RIEMANNIAN MANIFOLDS

**Alexander G. Losev**

Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor,
Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
allosev59@gmail.com, alexander.losev@volsu.ru
https://orcid.org/0000-0002-1072-8375
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

**Abstract.** The work is carried out within the framework of the topic devoted to the asymptotic behavior of solutions of partial differential equations on non-compact Riemannian manifolds. The most popular sections of such studies are theorems of the Liouville type on the triviality of spaces of solutions of elliptic equations on non-compact Riemannian manifolds, as well as questions of solvability of boundary value problems. The currently considered classical formulation of the Liouville theorem states that any bounded harmonic function in $R^n$ is identically constant. Recently, a tendency has emerged towards a more general approach to theorems of the Liouville type, namely, the dimensions of various spaces of solutions of linear equations of elliptic type are estimated. In particular, in the work by A.A. Grigory'an (1990), an exact estimate of the dimensions of spaces of bounded harmonic functions on non-compact Riemannian manifolds in terms of massive sets was proved. In general, studies of the last decades have shown the extremely high efficiency of using capacitive techniques in solving the above problems. This work is devoted to the development of capacitive techniques related to the concepts of a massive set in the study of the asymptotic behavior of harmonic functions on non-compact Riemannian manifolds.

**Key words:** harmonic functions, Liouville type theorems, noncompact Riemannian manifolds, massive sets, potential theory.