www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2024.4.1

УДК 517.5+517.114
ББК 22.15+22.16

Дата поступления статьи: 01.10.2024
Дата принятия статьи: 06.11.2024

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЛОКАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ КАЧЕСТВА ЭЛЕМЕНТОВ ТЕТРАЭДРАЛЬНОЙ СЕТКИ КАК РЕШЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Александр Юрьевич Игумнов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики
и технологии программирования,
Волжский политехнический институт (филиал)
Волгоградского государственного технического университета
IAJu1965@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-2120-768X
ул. Энгельса, 42а, 404121 г. Волжский, Российская Федерация

Аннотация. Семейством точек называется нумерованный набор вершин элементов сетки в пространстве $\mathbb{R}^n$. Таковым набором может быть набор вершин симплекса сетки, набор вершин пары смежных симплексов сетки и др. Посредством введенной в ранних работах метрики в пространстве таких семейств задача вычисления качества элемента сетки (например, мера отличия симплекса от вырожденного) может быть сведена к задаче вычисления расстояния между некоторым семейством и некоторым множеством семейств. Предлагается унифицированная схема вычисления такого расстояния, которую можно рассматривать как обобщение схемы исследования на экстремум гладкой функции.

Ключевые слова: невырожденность треугольника, экстремум функции в пространстве семейств точек, семейства предполагаемого экстремума, бескоординатная схема исследования на экстремум, сохранение свойств сетки при отображениях.

Введение

Типовой задачей компьютерного моделирования является получение расчетной сетки из некоторой исходной посредством некоторого отображения или генерирующего алгоритма. При этом возникает необходимость обеспечить выполнение определенных условий касательно элементов сетки или сетки в целом. Например, для триангуляционной сетки такими условиями могут быть невырожденность треугольников сетки, отсутствие захлеста сетки и др. Исследованию условий наличия (или сохранения при отображениях определенного класса) подобных свойств посвящено большое количество работ. Классическим результатом является теорема Альфорса о сохранении ориентации треугольника при квазиконформном отображении [1]. Из относительно недавних работ можно указать [2–6]. Из работ в смежных областях укажем [7–10].

Упомянутые условия наличия определенных свойств выражаются в виде неких числовых характеристик сетки (локальных или глобальных), называемых обобщенно качеством сетки. Например, отличие треугольника от вырожденного может характеризоваться оценкой его наименьшего угла, сходство треугольника с равносторонним может быть выражено посредством изопериметрического неравенства.

В работе [11] была предложена конструкция, посредством которой элементу (или некоторой совокупности элементов) сетки ставится в соответствие элемент X некоторого метрического пространства, и задача вычисления числовой характеристики качества сетки (точнее, локальных характеристик элементов сетки) сводится к вычислению величины $\operatorname{dist}(X, \mathcal{Y})$ — расстояния в этом метрическом пространстве между полученным элементом X и некоторым множеством $\mathcal{Y}$ в этом пространстве.

В работе [12] был показан пример применения этой конструкции для получения числовой характеристики отличия тетраэдра от вырожденного. В работе [13] приведено частичное решение задачи вычисления числовой характеристики отношения смежности двух треугольников. В этих работах решение задачи было основано на некоей эмпирической классификации элементов множества $\mathcal{Y}$ и сводилось к рассмотрению значительного количества теорем, во многих случаях с громоздким доказательством.

В данной работе предлагается рассматривать задачу вычисления $\operatorname{dist}(X, \mathcal{Y})$ как задачу исследования на экстремум функции $\operatorname{dist}(X, Y)$, где $Y \in \mathcal{Y}$, и решения ее по классической схеме: выявление точек (элементов множества $\mathcal{Y}$) предполагаемого экстремума и т.д. Такой подход позволяет стандартизировать выкладки и сократить их объем, а также значительно сократить эмпирическую составляющую исследования.

1. Предварительные сведения

Следуя [11] приведем необходимые сведения. Отображение $F : \{1, 2, \ldots, r\} \to \mathbb{R}^n$ будем называть r-точечным семейством в $\mathbb{R}^n$. Табличное задание отображения будем представлять следующим образом:

$$F = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & & r \\ F(1) & F(2) & \cdots & F(r) \end{Bmatrix} .$$

Значения отображения F будем называть точками семейства, а также вершинами семейства. Отрезки $F(i)F(j)$ будем называть отрезками семейства F. Элементами семейства будем называть как его вершины, так и отрезки.

Если $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — некоторое отображение, то определим стандартным образом композицию $f\circ F=\left\{\begin{smallmatrix}1 & 2 & & r\\ f(F(1)) & f(F(2)) & \cdots & f(F(r))\end{smallmatrix}\right\}$. Пусть $\sigma:\{1,2,\ldots,r\}\to\{1,2,\ldots,r\}$ — некоторая перестановка. Отображение $F\circ\sigma=\left\{\begin{smallmatrix}1 & 2 & & r\\ F(\sigma(1)) & F(\sigma(2)) & \cdots & F(\sigma(r))\end{smallmatrix}\right\}$ будем называть перенумерацией семейства F. Для r-точечных семейств F, G определим числовой набор

$$\mathcal{A}(F,G)=\left\{\frac{|G(i)G(j)|}{|F(i)F(j)|},\ 1\le i<j\le r:\ |G(i)G(j)|+|F(i)F(j)|\ne 0\right\}\ ,$$

где $|\ldots|$ — евклидова длина, полагая $\frac{a}{0}=+\infty$ при $a\ne 0$, и определим величину

$$\rho(F,G)=\log\frac{\max\mathcal{A}(F,G)}{\min\mathcal{A}(F,G)}\ , \tag{1}$$

полагая основанием логарифма некоторое число, большее 1, $\log+\infty=+\infty$.

Величина (1) инвариантна относительно ортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условиям: $\rho(F,G)=\rho(G,F)$, $\rho(F,H)\le\rho(F,G)+\rho(G,H)$, $\rho(O'\circ F,O''\circ G)=\rho(F,G)$, где O', O'' — ортогональные преобразования пространства $\mathbb{R}^n$. Посредством величины (1) можно определить метрику в пространстве классов ортогонально эквивалентных r-точечных семейств: для классов $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ полагаем $\mathcal{R}(\mathcal{F},\mathcal{G})=\rho(F,G)$, где F, G — представители классов $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ соответственно. Для упрощения терминологии величину $\mathcal{R}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ будем называть расстоянием между семействами F, G.

Имеем: $\rho(F,G)=0$ тогда и только тогда, когда F и G ортогонально эквивалентны; если для некоторых i, j $|F(i)F(j)|=0$, $|F(i)F(j)|\ne 0$, то $\rho(F,G)=\infty$; для F и $F\circ\sigma$, вообще говоря, $\rho(F,F\circ\sigma)\ne 0$.

Если X — некоторое семейство, $\mathcal{Y}$ — некоторое множество семейств (инвариантное относительно ортогональных преобразований), то определим расстояние между X и $\mathcal{Y}$ (с учетом указанной нестрогости в терминологии) стандартным образом:

$$\operatorname{dist}(X,\mathcal{Y})=\inf_{Y\in\mathcal{Y}}\rho(X,Y)\ . \tag{2}$$

Величиной (2) можно характеризовать, например отличие элемента триангуляционной сетки от вырожденного.

Приведем пример задачи, сводящейся к вычислению величины (2). Пусть T — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Требуется дать числовую характеристику степени его отличия от вырожденного тетраэдра. Требуемая величина может быть вычислена следующим образом. Тетраэдр T определяет $(n+1)!$ семейств точек, являющихся перенумерациями друг друга: $X_1,\ldots,X_{(n+1)!}$. Обозначим $\mathcal{Y}$ множество $(n+1)$-точечных семейств, все точки которых расположены в некоторой гиперплоскости. В качестве меры отличия тетраэдра T от вырожденного естественно положить $\min\limits_{\sigma}\operatorname{dist}(X\circ\sigma,\mathcal{Y})$. Элементарными выкладками показывается, что поскольку множество $\mathcal{Y}$ инвариантно относительно перенумераций (то есть если $Y\in\mathcal{Y}$, то $Y\circ\sigma\in\mathcal{Y}$ для всякой перестановки σ), то задача сводится к вычислению величины $\operatorname{dist}(X,\mathcal{Y})$, где X — какая-то фиксированная нумерация вершин тетраэдра T. Согласно определению величины dist задачу можно решать как экстремальную, аналогично исследованию на экстремум функции числовых переменных. То есть исключить из рассмотрения семейства $Y\in\mathcal{Y}$, заведомо не являющиеся ближайшими к семейству X (оставшиеся семейства являются аналогом точек предполагаемого экстремума). Эти семейства будем выявлять следующим образом — если при смещении какой-либо вершины семейства Y получившееся семейство оказывается ближе к X, чем прежде, то такое семейство Y исключается из дальнейшего рассмотрения.

2. Раскраска отрезков семейств множества $\mathcal{Y}$ и позиции вершин

Приведем необходимые построения. Величину $\rho(F,G)$ будем наглядно представлять в виде отрезка

$$I = [\min \mathcal{A}(F,G), \max \mathcal{A}(F,G)] \ ,$$

отложенного на логарифмической шкале. Его евклидова длина равна значению $\rho(F,G)$ и будет нулевой тогда и только тогда, когда в наборе $\mathcal{A}(F,G)$ все элементы равны, то есть F и G ортогонально эквивалентны. Семейства множества $Y \in \mathcal{Y}$, имеющие совпадающие вершины, сразу исключим из рассмотрения.

При заданном F определим раскраску отрезков $G(i)G(j)$ семейства G следующим образом:

- если $\dfrac{|G(i)G(j)|}{|F(i)F(j)|} = \min \mathcal{A}(F,G)$, то будем изображать отрезок $G(i)G(j)$ окрашенным в синий цвет и называть синим;
- если $\dfrac{|G(i)G(j)|}{|F(i)F(j)|} = \max \mathcal{A}(F,G)$, то будем изображать отрезок $G(i)G(j)$ окрашенным в красный цвет и называть красным;
- в остальных случаях будем изображать отрезок $G(i)G(j)$ черным цветом и называть неокрашенным.

Отметим, что, применив подходящее ортогональное преобразование, любое заранее выбранное отношение $\dfrac{|G(i)G(j)|}{|F(i)F(j)|}$ можно полагать равным заранее выбранному положительному числу (при таком преобразовании отрезок I сдвигается по логарифмической шкале, сохраняя свою длину). Исследуемое семейство будем изображать в виде раскрашенного графа на плоскости (или на прямой). Степенью вершины будем называть количество цветных (то есть не черных) отрезков, инцидентных этой вершине. Величины $\dfrac{|G(i)G(j)|}{|F(i)F(j)|}$ на логарифмической шкале будем изображать точками соответствующего цвета (кроме черных точек). На случай одноцветной печати введем кодировку цвета отрезков их толщиной и кодировку цвета точек их формой следующим образом:

изображение синей точки на шкале — ;

изображение красной точки на шкале — ;

изображение синего отрезка — ;

изображение красного отрезка — .

Помимо сказанного вершины семейства будем изображать бесцветными точками — ○ .
Отсутствие на рисунках нумерации вершин означает, что соответствующие выкладки верны для любой нумерации.

Пусть X — фиксированное семейство, $\mathcal{Y}$ — некоторое множество семейств. Определим класс семейств $\Xi_p^q(X)$ как состоящий из таких семейств Y, для которых набор

$\mathcal{A}(X, Y)$ содержит ровно p минимальных элементов и ровно q максимальных. Числа p и q будем называть кратностями соответственно левого и правого концов отрезка I. Таким образом, семейство X задает разбиение множества $\mathcal{Y}$ на классы $\Xi_p^q(X)$. Кратность концов отрезка I будем показывать вертикальным рядом соответствующего количества точек соответствующего цвета (см. пример на рис. 1).

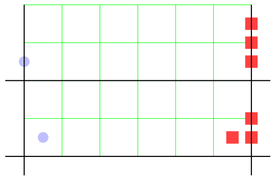

Рис. 1. Изображения отрезков I и $\tilde{I}$

Если $\tilde{Y}$ — некоторая модификация семейства Y, то обозначим

$$\tilde{I} = [\min \mathcal{A}(X, \tilde{Y}), \max \mathcal{A}(X, \tilde{Y})] \ .$$

Замена семейства Y на $\tilde{Y}$ может привести к следующим изменениям отрезка I:

- евклидова длина отрезка сохраняется/изменяется;
- кратность концов отрезка сохраняется/изменяется.

Для сравнения расстояний $\rho(X, Y)$ и $\rho(X, \tilde{Y})$ соответствующие отрезки будем изображать на сдвоенной логарифмической шкале, подписывая верхнюю как Y, нижнюю — как $\tilde{Y}$ (см. пример на рис. 1).

Смещением точки $Y(j)$ будем называть замену этой точки в составе семейства Y на некоторую другую точку A под тем же номером. Семейство

$$\widetilde{Y} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & & j & & r \\ Y(1) & Y(2) & \cdots & A & \cdots & Y(r) \end{matrix} \right\}$$

будем называть результатом смещения семейства Y. Величину смещения точки $Y(j)$ будем характеризовать величиной $|Y(j)A|$. Далее всякие упоминаемые смещения полагаем сколь угодно малыми, в частности, величина $|Y(j)A|$ полагается настолько малой, что неокрашенные отрезки семейства остаются неокрашенными.

Смещение точки $Y(j)$ будем называть допустимым, если $\widetilde{Y} \in \mathcal{Y}$. Смещение будем называть результативным, если для всякого красного отрезка $Y(i)Y(j)$ выполнено $|Y(i)A| < |Y(i)Y(j)|$ (то есть отрезок укорачивается); для всякого синего отрезка $Y(i)Y(j)$ выполнено $|Y(i)A| > |Y(i)Y(j)|$ (то есть отрезок удлиняется).

Определение 1. *Пусть $Y(j)$ — вершина степени $s \geq 1$ семейства $Y \in \mathcal{Y}$. Будем говорить, что точка $Y(j)$ находится в положительной позиции (позиция точки $Y(j)$ положительна, точка $Y(j)$ имеет положительную позицию), если для нее существует сколь угодно малое допустимое и результативное смещение. В противном случае будем говорить, что позиция точки $Y(j)$ отрицательна. Про вершину нулевой степени будем говорить, что ее позиция нейтральна.*

Следующее очевидно: если позиция некоторой точки семейства отрицательна, то при увеличении ее степени (при дополнительной раскраске инцидентных ей отрезков) позиция этой точки останется отрицательной. Также очевидно, что в результате смещения количество окрашенных отрезков семейства не может увеличиться.

3. Основной результат

Значимость введенного понятия позиции вершины определяется следующей теоремой и следствием из нее.

Теорема 1. *Пусть в семействе $Y \in \mathcal{Y}$ имеется вершина с положительной позицией. Тогда выполнено хотя бы одно из двух условий:*

1) сколь угодно ρ-близко к Y существует семейство $Y' \in \mathcal{Y}$ такое, что $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$;

2) в $\mathcal{Y}$ найдется семейство Y', не имеющее вершин с положительной позицией, такое, что $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$.

Доказательство. Если $Y \in \Xi_1^1(X)$, то в результате допустимого и результативного смещения вершины с положительной позицией длина отрезка $[\min \mathcal{A}(X, Y), \max \mathcal{A}(X, Y)]$ на логарифмической шкале уменьшится. То есть для результата смещения — семейства Y' — будет выполнено условие 1) заключения теоремы.

Пусть $Y \in \Xi_p^q(X)$, где $p + q > 2$. Если в результате допустимого и результативного смещения вершины с положительной позицией длина отрезка $[\min \mathcal{A}(X, Y), \max \mathcal{A}(X, Y)]$ на логарифмической шкале уменьшится, то для результата смещения — семейства Y' — будет выполнено условие 1) заключения теоремы.

Если в результате допустимого и результативного смещения вершины с положительной позицией длина отрезка $[\min \mathcal{A}(X, Y), \max \mathcal{A}(X, Y)]$ на логарифмической шкале остается прежней, то для результата смещения — семейства Y' — имеем:

$$\rho(X, Y') = \rho(X, Y), \; Y' \in \Xi_{p'}^{q'}(X), \text{ где } p' + q' < p + q \; .$$

Если при этом семейство Y' не имеет вершин с положительной позицией, то имеем выполнение условия 2) заключения теоремы.

Если получившееся семейство Y' имеет вершину с положительной позицией, то, переобозначив Y' на Y, p' на p, q' на q и итерируя выкладки данного доказательства, на очередной итерации получаем требуемое.

Теорема доказана.

Обозначим $\mathcal{Y}^-$ — множество семейств $Y \in \mathcal{Y}$, у которых нет вершин с положительной позицией. Из теоремы выводим очевидное

Следствие 1. *Экстремум функции $\rho : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ достигается на множестве $\mathcal{Y}^-$:*

$$\mathrm{dist}(X, \mathcal{Y}) = \mathrm{dist}(X, \mathcal{Y}^-) \; .$$

По аналогии с исследованием на экстремум гладкой функции будем называть семейства множества $\mathcal{Y}^-$ семействами возможного экстремума.

4. Построение семейств множества $\mathcal{Y}^-$

Построение семейств $Y \in \mathcal{Y}^-$ производится в следующем порядке.

1) Составляется список позиций точек семейства всевозможных степеней и всевозможных вариантов раскраски инцидентных точке отрезков. Список представляет собой описание (в малоразмерных случаях — графическое) взаимных расположений отрезков согласно некоторой классификации с указанием позиции точки

(определяется так же, как позиция вершины семейства). Например, у вершины второй степени инцидентные ей отрезки имеют красный цвет, расположены на одной прямой по разные стороны от инцидентной им точки.

2) По списку позиций точек составляется цветовая схема семейства — нумерованная (вообще говоря) совокупность точек и соединяющих их отрезков (как в частичном составе, так и в полном), расположенных так, что расположение точек удовлетворяет условиям, определяющим множество $\mathcal{Y}$, а раскраска отрезков такова, что точки имеют отрицательную позицию. Отличие цветовой схемы от семейства заключается в том, что при ее составлении игнорируются в той или иной степени метрические соотношения между элементами семейства (например, в семействе отношение длин отрезков, инцидентных некоторой вершине, равно определенному числу; в цветовой схеме это требование может не соблюдаться). Отметим, что раскраска отрезков в цветовой схеме может оказаться противоречивой — то есть условия, вытекающие из такой раскраски, будут противоречить каким-либо условиям, определяющим семейство X или множество $\mathcal{Y}$. Например, если в семействе X отрезки $X(i)X(j)$, $X(i)X(k)$, $X(j)X(k)$ составляют невырожденный треугольник, а по схеме раскраски отрезки $Y(i)Y(j)$, $Y(i)Y(k)$, $Y(j)Y(k)$ составляют вырожденный треугольник и при этом окрашены в один цвет, то такая раскраска противоречива.

3) Если цветовая схема непротиворечива, то по ней составляется совокупность семейств Y (в простейшем случае — конечная) посредством каких-либо построений, определяемых спецификой условий на элементы семейства, вытекающих из цветовой схемы. Например, условие

$$\frac{|Y(i)Y(j)|}{|X(i)X(j)|} = \frac{|Y(i)Y(k)|}{|X(i)X(k)|}$$

задает принадлежность точки $Y(i)$ окружности равных отношений, определяемой точками $Y(j)$, $Y(k)$ и отношением $\frac{|X(i)X(j)|}{|X(i)X(k)|}$.

5. Пример

Рассмотрим простейший пример — вычисление степени невырожденности треугольника T как расстояния от трехточечного семейства, определенного некоторой нумерацией вершин треугольника, до множества семейств, определяющих вырожденные треугольники (см. также [11]). Степенью невырожденности треугольника T будем называть минимальное по всем нумерациям вершин расстояние от трехточечного семейства нумерованных вершин треугольника до $\mathcal{Y}$ — множества трехточечных семейств, все точки которых лежат на одной прямой. Допуская некоторую нестрогость в обозначениях, эту величину будем обозначать $\rho(T, \mathcal{Y})$.

Пусть

$$X = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ X(1) & X(2) & X(3) \end{Bmatrix} \; -$$

трехточечное семейство, определенное нумерацией вершин некоторого невырожденного треугольника. Имеем: степень вершины семейства $Y \in \mathcal{Y}$ — либо 1, либо 2. Позиция точки степени 1, очевидно, положительна. Взаимное расположение отрезков, инцидентных точке степени 2, определяется следующими условиями: смежные отрезки одноцветны/разноцветны, расположены по одну/разные стороны от инцидентной им точки. Из элементарных геометрических соображений получаем список позиций вершин — см. рис. 2, где точка с положительной позицией обозначена знаком «+», с отрицательной — знаком «−».

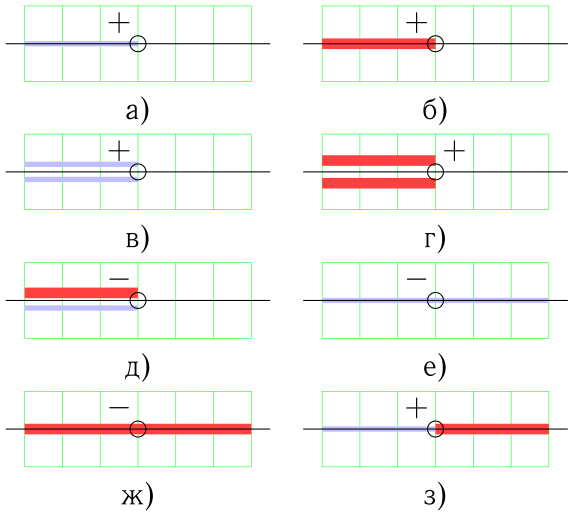

Рис. 2. Позиции точек

Рассмотрим возможность построения экстремального семейства, начиная со схемы рис. 2 ж). Дополняя ее красным отрезком получим противоречивую раскраску отрезков семейства (в силу невырожденности исходного треугольника). Дополняя ее синим отрезком получим также противоречивую раскраску — см. рис. 3 а) (в наглядном представлении получение такого семейства — разворот одного из углов исходного треугольника до 180°, при этом отрезок, противолежащий вершине угла может только растянуться, что противоречит получившейся раскраске). Таким образом, схема ж) не может быть достроена до экстремального семейства.

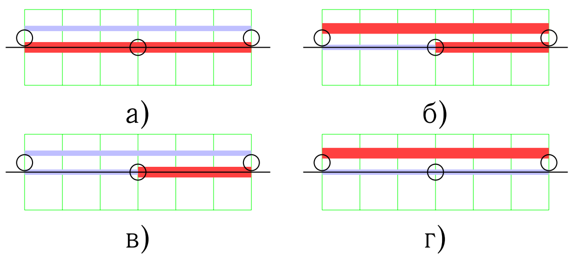

Рис. 3. Дополненные схемы

Рассмотрим возможность построения экстремального семейства, начиная со схемы рис. 2 д). Дополняя схему красным отрезком, в зависимости от того, какой из отрезков, синий или красный, на схеме д) длиннее, получим либо схему на рис. 3 а) с противоречивой раскраской, либо схему рис. 3 б), в которой позиция, например, вершины, инцидентной двум красным отрезкам, положительна, согласно рис. 2 г).

Дополняя схему синим отрезком, в зависимости от того, какой из отрезков на схеме рис. 2 д) длиннее, получим либо схему на рис. 3 в), либо схему на рис. 3 г). Схема на рис. 3 в) содержит вершины с положительной позицией, согласно рис. 2 в) и з).

В схеме на рис. 3 г) позиции всех вершин отрицательны, согласно рис. 2 д) и е). Исходя из наглядного представления получения семейства с такой раскраской определяем, что раскраска не является противоречивой и по этой схеме может быть построено экстремальное семейство.

Наконец, рассмотрим возможность построения экстремального семейства, начиная со схемы рис. 2 е). Дополнение этой схемы синим отрезком приводит к схеме с противоречивой раскраской (в силу невырожденности исходного треугольника). Дополнение красным отрезком приводит к уже рассмотренной схеме на рис. 3 г).

Таким образом, экстремальное семейство получается только по схеме на рис. 3 г).

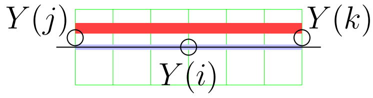

Рис. 4. Нумерованная схема экстремального семейства

При любой нумерации вершин (см. рис. 4) имеем согласно схеме раскраски:

$$\frac{|Y(i)Y(j)|}{|X(i)X(j)|} = \frac{|Y(i)Y(k)|}{|X(i)X(k)|}\ . \tag{3}$$

Полагая общее значение отношений в (3) равным 1, получаем $|Y(i)Y(j)| = |X(i)X(j)|$ и $|Y(i)Y(k)| = |X(i)X(k)|$. Откуда выводим упоминавшийся ранее способ построения экстремального семейства: стороны $X(i)X(j)$ и $X(i)X(k)$ разворачиваются вокруг точки $X(i)$ до получения развернутого угла.

Обозначим $\mathcal{Y}_{jik} \subset \mathcal{Y}$ — множество семейств, у которых точка $Y(i)$ расположена между точками $Y(j)$, $Y(k)$. Тогда расстояние $\rho(X, \mathcal{Y}_{jik})$ определяется величиной $\frac{|Y(j)Y(k)|}{|X(j)X(k)|}$ (где по построению $|Y(j)Y(k)| = |X(i)X(j)| + |X(i)X(k)|$). Поскольку

$$\rho(X, \mathcal{Y}) = \min_{\sigma} \rho(X, \mathcal{Y}_{\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)}),$$

то с учетом симметричности евклидова расстояния имеем

$$\rho(T, \mathcal{Y}) = \log \min \left\{ \frac{a+b}{c}, \frac{a+c}{b}, \frac{b+c}{a}, \right\}\ ,$$

где a, b, c — длины сторон треугольника T.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альфорс, Л. Лекции о квазиконформных отображениях / Л. Альфорс. — М. : Мир, 1969. — 154 с.

2. Неструктурированные адаптивные сетки для задач математической физики (обзор) / Л. В. Круглякова, А. В. Неледова, В. Ф. Тишкин, А. Ю. Филатов // Математическое моделирование. — 1998. — Т. 10, № 3. — С. 93–116.

3. Миклюков, В. М. Некоторые задачи, возникающие в проблеме триангуляции пограничного слоя / В. М. Миклюков // Записки семинара «Сверхмедленные процессы». — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2006. — Вып. 1. — С. 154–162.

4. Клячин, В. А. О гомеоморфизмах, сохраняющих триангуляцию / В. А. Клячин // Записки семинара «Сверхмедленные процессы». — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2009. — Вып. 4. — С. 169–182.

5. Карабцев, С. Н. Построение диаграммы Вороного и определение границ области в методе естественных соседей / С. Н. Карабцев, С. В. Стуколов // Вычислительные технологии. — 2010. — Т. 13, № 3. — С. 65–80.

6. Лебедев, А. С. Построение неструктурированных треугольных сеток с почти правильными ячейками / А. С. Лебедев // Вычислительные технологии. — 2010. — Т. 15, № 1. — С. 85–97.

7. Бахвалов, П. А. Об использовании искусственной вязкости в реберно-ориентированных схемах на неструктурированных сетках / П. А. Бахвалов, Т. К. Козубская // Математическое моделирование. — 2020. — Т. 32, № 12. — С. 114–128.

8. Методика деформации неструктурированных сеток в задачах определения аэродинамических характеристик тел при малых перемещениях / В. Г. Бобков, В. А. Вершков, Т. К. Козубская, В. О. Цветкова // Математическое моделирование. — 2021. — Т. 33, № 3. — С. 109–132.

9. Клячин, А. А. Построение C^1-гладких кусочно-квадратичных функций при решении краевых задач уравнений 4-го порядка на треугольной сетке / А. А. Клячин, И. Ю. Веревкин // Математическое моделирование. — 2023. — Т. 26, № 2. — С. 5–15.

10. Хижнякова, Е. В. NP-полнота задачи построения графа с минимальным коэффициентом непрямолинейности / Е. В. Хижнякова // Математическое моделирование. — 2023. — Т. 26, № 2. — С. 43–51.

11. Игумнов, А. Ю. Метризация пространства семейств точек в $\mathbb{R}^n$ и смежные вопросы / А. Ю. Игумнов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2016. — Т. 37, № 6. — С. 40–54. — DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.6.4

12. Игумнов, А. Ю. О степени невырожденности тетраэдра / А. Ю. Игумнов // Математ. физика и компьютер. моделирование. — 2019. — Т. 22, № 4. — С. 5–29. — DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2019.4.1

13. Игумнов, А. Ю. О сохранении отношения смежности треугольников при квазиизометрическом отображении / А. Ю. Игумнов // Математ. физика и компьютер. моделирование. — 2021. — Т. 24, № 4. — С. 34–52. — DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2021.4.3

REFERENCES

1. Alfors L. *Lektsii o kvazikonformnykh otobrazheniyakh* [Lectures on Quasiconformal Mappings]. Moscow, Mir Publ., 1969. 154 p.

2. Kruglyakova L.V., Neledova A.V., Tishkin V.F., Filatov A.Yu. Nestrukturirovannye adaptivnye setki dlya zadach matematicheskoy fiziki (obzor) [Unstructured Adaptive Grids for Mathematical Physics Problems (Review)]. *Matematicheskoe modelirovanie* [Math Modeling], 1998, vol. 10, no. 3, pp. 93-116.

3. Miklyukov V.M. Nekotorye zadachi, voznikayushchie v probleme triangulyatsii pogranichnogo sloya [Some of the Problems Arising in the Problem of Triangulation Boundary Layer]. *Zapiski seminara «Sverkhmedlennye protsessy»* [Notes of Seminar «Infraslow Processes»]. Volgograd, Izd-vo VolGU, 2006, iss. 1, pp. 154–162.

4. Klyachin V.A. O gomeomorfizmakh, sokhranyayushchikh triangulyatsiyu [On Homomorphisms Preserving Triangulation]. *Zapiski seminara «Sverkhmedlennye protsessy»* [Notes of Seminar «Infraslow Processes»]. Volgograd, Izd-vo VolGU, 2009, iss. 4, pp. 169–182.

5. Karabtsev S.N., Stukolov S.V. Postroenie diagrammy Voronogo i opredelenie granits oblasti v metode estestvennykh sosedey [Voronoi Diagrams and Definition of the Field in the Method of Natural Boundaries Neighbors]. *Vychislitelnye tekhnologii* [Computational Technologies], 2010, vol. 13, no. 3, pp. 65-80.

6. Lebedev A.S. Postroenie nestrukturirovannykh treugolnykh setok s pochti pravilnymi yacheykami [Construction of Unstructured Triangular Grids with Almost Correct Cells]. *Vychislitelnye tekhnologii* [Computational Technologies], 2010, vol. 15, no. 1, pp. 85-97.

7. Bakhvalov P.A., Kozubskaya T.K. Ob ispolzovanii iskusstvennoy vyazkosti v ryoberno-orientirovannykh skhemakh na nestrukturirovannykh setkakh [On Using Artificial Viscosity in Edge-Based Schemes on Unstructured Meshes]. *Matematicheskoe modelirovanie* [Math Modeling], 2020, vol. 32, no. 12, pp. 114-128.

8. Bobkov V.G., Vershkov V.A., Kozubskaya T.K., Tsvetkova V.O. Metodika deformatsii nestrukturirovannykh setok v zadachakh opredeleniya aerodinamicheskikh kharakteristik tel pri malykh peremeshcheniyakh [Method of Unstructured Mesh Deformation to Find Aerodynamic Characteristics of a Body at Small Displacements]. *Matematicheskoe modelirovanie* [Math Modeling], 2021, vol. 33, no. 3, pp. 109-132.

9. Klyachin A.A., Verevkin I.Yu. Postroenie C^1-gladkikh kusochno-kvadratichnykh funktsiy pri reshenii kraevykh zadach uravneniy 4-go poryadka na treugolnoy setke [Construction of C^1-Smooth Piecewise Quadratic Functions for Solving Boundary Value Problems of Fourth-Order Equations on a Triangular Grid]. *Matematicheskoe modelirovanie* [Math Modeling], 2023, vol. 26, no. 2, pp. 5-15.

10. Khizhnyakova E.V. NP-polnota zadachi postroeniya grafa s minimalnym koeffitsientom nepryamolineynosti [NP-Completeness of the Problem of Constructing a Graph with a Minimum Stretch Factor]. *Matematicheskoe modelirovanie* [Math Modeling], 2023, vol. 26, no. 2, pp. 43-51.

11. Igumnov A.Yu. Metrizatsiya prostranstva semeystv tochek v $\mathbb{R}^n$ i smezhnye voprosy [Metrization in Space Families of Points in $\mathbb{R}^n$ and Adjoining Questions]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1. Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2016, vol. 37, no. 6, pp. 40-54. DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.6.4

12. Igumnov A.Yu. O stepeni nevyrozhdennosti tetraedra [About the Degree of Nondegeneracy of a Tetrahedron]. *Matemat. fizika i kompyuter. modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2019, vol. 22, no. 4, pp. 5-29. DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2019.4.1

13. Igumnov A.Yu. O sokhranenii otnosheniya smezhnosti treugolnikov pri kvaziizometricheskom otobrazhenii [On the Preserving of the Orientation of Triangle by Quasi-Isometric Mappings]. *Matemat. fizika i kompyuter. modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2021, vol. 24, no. 4, pp. 34-52. DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2021.4.3

COMPUTING THE LOCAL QUALITY CHARACTERISTIC OF TETRAHEDRAL MESH ELEMENTS AS A SOLUTION EXTREME TASK

Alexander Yu. Igumnov

Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Department of Computer Science and Programming Technology,
Volzhsky Polytechnic Institute (Branch) of the Volgograd State Technical University
IAJu1965@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-2120-768X
Engelsa St, 42a, 404121 Volzhsky, Russian Federation

Abstract. The paper discusses the problem of calculating the quality characteristic of elements of a triangulation grid (in multidimensional space). We call quality the degree of difference between a mesh element in a sense critical. For example, the difference between a triangle and a degenerate triangle. To calculate this value, the following construction is used. Mesh element vertices are treated as a numbered set of X — points point family. In the space of such sets, the metric proposed in early works is introduced. As a result, the problem boils down to calculating the value of $\operatorname{dist}(X, \mathcal{Y})$ — the distance between a set X and a set $\mathcal{Y}$ defined by critical elements. In early works, the problem was solved through the empirical classification of families $Y \in \mathcal{Y}$ and excluding those that are not known to be closest to X. Namely, such that the offset some point in the Y family is given by the $Y' \in \mathcal{Y}$ family, which is closer to X. At the same time, empirical classification led to a large amount of calculations. This work gives a standardized classification of the families of the set $\mathcal{Y}$, allowing you to accurately describe the set of $\mathcal{Y}^- \subset \mathcal{Y}$ of such families for which The specified conversion is not possible. That is, $\mathcal{Y}^-$ is approved

$$\operatorname{dist}(X, \mathcal{Y}) = \operatorname{dist}(X, \mathcal{Y}^-) \ .$$

In addition, a diagram is given for constructing families of the set $\mathcal{Y}^-$ — analogues of the points of the assumed extremum in the extremum research problem of the function of numerical variables.

Key words: triangle non-degeneracy, extremum of a function in the space of point families, families of the expected extremum, coordinate-free extremum research scheme, saving grid properties in mappings.