DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2024.4.2

УДК 517.53 Дата поступления статьи: 15.07.2024
ББК 22.161.5 Дата принятия статьи: 10.10.2024

ПРИНЦИП НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДЛЯ РАЗНЫХ СИСТЕМ КООРДИНАТ

Андрей Валерианович Павлов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики-1,
Московский институт радиотехники, электроники и автоматики — РТУ
avpavlovmgu@my-post.ru
https://orcid.org/0000-0002-1082-2222
просп. Вернадского, 78, 117454 г. Москва, Российская Федерация

Аннотация. Рассматриваются комплексные аналитические функции в разных системах координат. Доказаны факты, приводящие к периодичности аналитических функций как следствие совпадения данных функций с некоторыми комплексными функциями, совпадающими с симметричным отражением относительно одной из осей системы координат (полями сдвигов). Доказаны теоремы о возникновении второго уравнения одного многообразия решений уравнения $z = f(p)$ (графика) с точки зрения рассмотрения новых систем координат на комплексной плоскости. Доказательство этих теорем опирается только на известные факты математического анализа.

Ключевые слова: периодичность функций, аналитические функции, комплексные поля сдвигов, разные системы координат, неоднозначность представления функций.

Введение

Статья посвящена исследованию аналитических функций в разных системах координат [2; 3]. Уравнение аналитической функции $z = f(p)$ в новой системе координат с центром в точке $(A, 0)$ совпадает с уравнением $z = f(r + A) = g(r)$, p, $r \in G$, $p = r + A$, r — комплексные переменные в исходной и сдвинутой вправо при $A > 0$ системах координат, G — некоторая открытая область комплексной плоскости.

Теорема 1 основана на следующем примере 1: аналитическая в области G функция $z = f(x + iy) = u(x, y) + v(x, y)i$ и некоторая функция $z = f_0(x + iy) = u(x, y) + v(x, y)i$ (далее поле сдвигов [2; 3]), имеют одно и то же уравнение с теми же $u(x, y)$ и $v(x, y)$, первая, как функция $z = f(p)$ в исходной системе координат, вторая совпадает с исходным отображением точек плоскости в системе координат с комплексной осью ix, направленной вдоль исходной оси OX, и действительной осью y, направленной вдоль исходной оси OY. Вторая функция $z = f_0(x+iy)$ не может быть аналитической в той же области G при том же сопоставлении $G \ni (x, y) \to z$, $z = u+iv$. (Если поменять местами x и y, так что $z = f_0(x + iy) = f(y + ix)$, то это приведет к изменению многообразия значений z, (графика $Y = f(X)$, $z = Y$, $p = X$ в действительном случае), которое, по определению, считается неподвижным в любых системах координат (теорема 1)).

В теореме 2 доказан аналогичный факт 1 [2; 3]: уравнение $z = f(p + A)$ с точки зрения аналитического многообразия точек значений для данного уравнения, (с точки зрения графика уравнения $y = f(x + A)$ в действительном случае при действительных $z = y$, $x = p$), совпадает с уравнеием $z = f(p)$; мы использовали то, что для сдвинутого вместе с z на $A > 0$ вправо аналитического многообразия (графика) $z = f(p)$ значению «сдвинутого» z соответствует значение (аргумент) $p + A$, (как «проекция» на поскость комплексных аргументов z при решении уравнения $z = f(p + A)$), в котором p то же самое как p при решении уравнения $z = f(p)$ с тем же самым z до его сдвига вправо при $A > 0$. Заметим, что уравнение $y = f(x + A)$ не может быть уравнением сдвинутого вправо при $A > 0$ геометрического многообразия (графика в действительном случае), так как уравнение сдвинутого вправо при $A > 0$ исходного многообразия $z = f(p - A)$, [2–6].

При доказательстве теоремы 2 используется следующее рассуждение (пример 2, [2; 3]): уравнение $z = g(p - A)$ можно воспринимать двумя разными способами. Первый способ, как уранение многообразия точек в исходной системе координат с центром в $(0, 0)$ ввиду определения переменной p для исходной системы координат; в этой ситуации уравнение совпадает с уравнением $z = g(R)$, $R = p - A$, если $R = p - A$ при всех $R = r$ из области определения r и $R = r$. Данную переменную R можно считать ранеее определенной переменной p, так как многообразие точек (график) $z = g(R)$ совпадает с многообразием (графиком) сдвинутого на величину A, (на величиу A влево при $A > 0$), исходного многообразия $z = g(r)$, $r = p - A$, из второго дальнейшего способа восприятия этого уравнения. Второй способ вытекает из уравнения $z = g(r)$ после замены $r = p - A$ из определения переменных p, r [2; 3], то есть можно считать, что замена $r = R = p - A$ определяет одновременно два сдвинутых одно относительно другого многообразия $z = g(p)$ и $z = g(r)$, (R можно ститать p как было отмечено).

В теореме 2 доказано также, что переменную R можно считать переменной p при определении $P = R$ из равенства $f(R) = g(p - A)$ при всех $P = p = R$.

1. Периодичность аналитических функций

В теоремах 1 и 2 для простоты изложения в области значений функции $z = f(p)$ не существует двух одинаковых значений: $f(p_1) \neq f(p_2)$ при всех $p_1 \neq p_2$, $p_1, p_2 \in G$.

Определим также понятие **аналитического отображения** точек комплексной плоскости для функции $z = f(p)$ как отображения точек (не векторов) концов радиус-векторов $\overline{p}$ плоскости с помощью уравнения $z = f(p)$, $p \in G$.

В примере 1 доказана теорема 1 [2; 3]. Далее мы приводим несколько другое доказательство, основаннное на изменении направления осей координат, [2; 3].

По определению, полем сдвигов $F(p)$ [2; 3], ($F(p) = F(x + iy)$), некоторой аналитической функции $h(p)$ называется функция $F(p)$, определенная с помощью равенства $F(x+iy) = h(-x+iy)$ или $F(x+iy) = h(x-iy)$ при всех $x+iy$ из области определения

$p = x + iy$.

Теорема 1. *Для произвольной аналитической в открытой области G функции*

$$z = f(p)$$

сопоставление комплексным значениям z тех же точек плоскости по формуле $z = f(ix + y)$ одновременно является полем сдвигов и аналической функцией с тем же уравнением.

Доказательство. Предположем, что при фиксированном многообразии значений точек комплексной плоскости, (как бы при фиксированном нависащем неподвижное многообразии значений $z = f(p)$), результат сопоставления точек плоскости с переброшенным i от y к x совпадает с некоторым полем с сдвигов аналитической функции, (все поля сдвигов определяются относительно исходных числовых переменных x, y; $x + iy = p$).

При этом предположении рассмотрим результат поворота новых осей координат (с действительной осью OY и мнимой осью OX) по часовой стрелке на угол $\pi/2$ и, затем, изменения направления новой повернутой оси iOX на противоположное (новая повернутая ось направленна в отрицательную сторону по сравнению с исходной для пременной p мнимой оси); преобразования происходят при неизменном «нависающем» многообразии значений.

Результат таких преобразований должен совпадать по предположению с некоторой аналитической функцией, так как поле сдвигов некоторого другоо поля сдвигов совпадает к с аналитической фунцией [2; 3].(Мы используем, то, что поле сдвигов по переменной y $F(x + iy) = h(x - iy) = h(-(-x + iy))$ совпадает с полем сдвигов отраженной аналитической функции $h(-p)$ по другой переменной).

Мы получили, что сопоставление точек плоскости при новом положении осей с переменными ix, (направленными вдоль исходной комплексной оси), и, расположенной вдоль исходной действительной оси новой оси с переменой y при неизменном многообразии «нависающих» значений, совпадает с некоторой аналитической функцией. У новых координатных осей x поменялся местами с y по сравнению с исходными комплексными координатами. Такое сопоставление совпадает с функцией

$$f_0 = u_0 + iv_0, u_0(x, y) = u(y, x), v_0(x, y) = v(y, x), f(x + iy) = u + iv,$$

и одновременно с функцией $z = f_0(x + iy) = f(y + ix)$. Но данная функция, очевидно, является полем сдвигов по переменным x, y, так как она совпадает с $f(i(-yi + x)) = z$. Мы доказали, что результат сопоставления точек плоскости с переброшенным i от y к x должен быть аналитической функцией [2; 3]. Но данное сопоставление тоже является полем сдвигов, так как оно совпадает с функцией $F(x+iy) = (f(i(-ix_1+y))|_{x1=-x}$, при всех $z = f(x_1 + yi)$, что является содержанием теоремы 1.

Замечание 1. Если действительная функция $y = f(x)$ определена в произвольном интервале I, то с точки зрения математически непротиворечивого доказательства, повторяющего рассуждения факта 1 введения, графики функций $y = f(x + A)$ и $y = f(x)$ совпадают при всех x, таких что $x + A \in G$, $x \in G$, $A > 0$.

Доказательство. Доказательство замечания повторяет факт 1 введения с учетом того, что аналитические отображения точек плоскости для уравнений $z = f(p + A)$ и $z = f(p)$ совпадают в случае действительных переменных $x = p, y = z$ с графиками функций $y = f(x+A)$ и $y = f(x)$, (данный факт следует из определения аналитических отображений точек плоскости).

При доказательстве теоремы 2 можно использовать рассуждение примера 2 из введения. Несколько другое доказательство теоремы 2 приведено ниже.

Теорема 2. *Для произвольной функции $z = f(p)$, определенной в некоторой открытой области G, исходное аналитическое многообразие точек плоскости для уравнения $z = f(p)$ с точки зрения новых систем координат на комплексной плоскости имеет два решения уравнения $z = f(p)$ при любом z из области значений функции $z = f(p)$, p — комплексная переменная.*

Доказательство. Рассмотрим аналитическое многоообразие точек, заданное уравнением $z = g(r)$ при всех $r = p - A$.

Имеют место одновременно два равенства: $z = f(P + A) = g(r), P = r$, и $z = f(p) = g(r)$ с одним и тем же z; здесь первое равенство следствие определения f, g во введении ввиду того, что переменную $P = r$ можно считать переменной p , второе равенство следствие определения значения функций f, g в любой точке, совпадающей с концами радиус-векторов p, r в системах координат из их определения, (см. далее). Переменную $P = r$ можно считать переменной p, так как эту переменную мы считали переменной p при разборе первого представления примера 2 для функции g, следовательно она является переменной p для любой другой функции вместо g, в том числе для функции f при всех $p = P = r$. (То, что ее можно считать переменной p, вытекает также из равенства $z = f(P) = g(P - A)$ при всех $p = P$ [1–3; 7], по исходному определению функций f, g во введении).

Следовательно, имеют место два уравнения $z = f(p) = g(r)$ и $z = f(P+A)$, $P = p$. (Отметим, что второе уравнение $z = f(P + A))$ совпадает с уравнением $z = f(s), P = p$, исходного многообразия $z = g(r)$, так как $p + A = s$, где s , по определению, комплексная переменная для третьей системы координат с центром в $(-A, 0)$. Данное второе уравнение суть уравнение сдвинутого на величину $-A$ исходного многообразия с центром координат в точке $(-A, 0)$; первое уравнение, как было отмечено, $z = f(p) = g(r)$).

Теорема 2 доказана.

Заключение

Отметим, что теорема 2 фактически приводит к равенству $P + A = p$ одновременно с возможностью считать переменную P переобозначением исходной комплексной переменной p, определенной в исходной системе координат с центром в $(0, 0)$ [1–3; 7].

С точки зрения примера 2 и факта 1 введения мы доказали утверждения примеров статьи [2] и совпадение исходного аналитического отображения $z = f(p)$ с некоторыми полями сдвигов ($F(p)$ из статьи [3]).

К аналогичному результату приводит также дальнейшее рассмотрение обратных функций без введения новых систем координат.

Имеет место равенство $f_{-1}(z) + A = h_{-1}(z)$ для обратных к f и h функций, соответственно, в котором переменной p можно обозначать или $f_{-1}(z)$ или $h_{-1}(z)$. Здесь уравнения $z = f(p)$ и $z = h(p)$ это — уравнения исходного аналитического отображения $z = f(p)$ и уравнение $z = h(p)$ сдвинутого вправо на величину $A > 0$ данного исходного аналитического отображения точек $z = f(p)$. После первого обозначения мы получаем, что $p + A = h_{-1}(z)$, и $h(p + A) = z$ суть уравнение уже сдвинутого многообразия, (а не $z = h(p)$ по определению), после второго обозначения получаем $f_{-1}(z) + A = p$, и $z = f(p - A)$ суть уравнение исходного аналитического отображения $z = f(p)$, (а не $z = f(p)$ по определению). В данном доказательстве нового уравнения исходного аналитического отображения мы не использовали новых переменных r и новых систем координат при разных действительных A.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1987. — 688 с.

2. Павлов, А. В. Отраженные функции и периодичность / А. В. Павлов // International Journal of Open Information Technologies. — 2022. — № 6. — С. 33–39.

3. Павлов, А. В. Разные системы координат и периодичность / А. В. Павлов // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2023. — Т. 26, № 3. — С. 114–118. — DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.3.9

4. Чубариков, В. Н. Об асимптотических формулах для интеграла И.М. Виноградова / В. Н. Чубариков // Тр. Матем. Ин-та АН СССР. — 1981. — Т. 157. — С. 214–232.

5. Pavlov, A. V. Permutability of Cosine and Sine Fourier Transforms / A. V. Pavlov // Journal Moscow University Mathematics Bulletin. — 2019. — Vol. 74, № 2. — P. 75–78.

6. Pavlov, A. V. About the equality of the transform of Laplace to the transform of Fourier / A. V. Pavlov // Issues of Analysis. — 2016. — Vol. 23, № 1. — P. 21–30.

7. Pavlov, A. V. The regularity of the transform of Laplace and the transform of Fourier / A. V. Pavlov // Chebyshevskii sbornik. — 2020. — Vol. 21, № 4. — P. 162–170.

REFERENCES

1. Lavrentiev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo* [The Methods of Theory Functions of Complex Variable]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 688 p.

2. Pavlov A.V. Otrazhennye funktsii i periodichnost [Reflected Functions and Periodicity]. *International Journal of Open Information Technologies*, 2022, no. 6, pp. 33-39.

3. Pavlov A.V. Raznye sistemy koordinat i periodichnost [Different Coordinate Systems and Periodicity]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2023, vol. 26, no. 3, pp. 114-118. DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.3.9

4. Chubarikov V.N. Ob asimptoticheskikh formulakh dlya integrala I.M. Vinogradova [On Asymptotic Formulas for the I.M. Vinogradov Integral]. *Tr. Matem. In-ta AN SSSR*, 1981, vol. 157, pp. 214-232.

5. Pavlov A.V. Permutability of Cosine and Sine Fourier Transforms. *Journal Moscow University Mathematics Bulletin*, 2019, vol. 74, no. 2, pp. 75-78.

6. Pavlov A.V. About the Equality of the Transform of Laplace to the Transform of Fourier. *Issues of Analysis*, 2016, vol. 23, no. 1, pp. 21-30.

7. Pavlov A.V. The Regularity of the Transform of Laplace and the Transform of Fourier. *Chebyshevskii sbornik*, 2020, vol. 21, no. 4, pp. 162-170.

THE UNCERTAINTY PRINCIPLE FOR DIFFERENT SYSTEMS OF COORDINATE

Andrey V. Pavlov

Candidate of Sciences (Physicals and Mathematics), Associate Professor,
Department of Higher Mathematics-1,
Moscow Institute of Radiotechnics, Electronics and Automatics — RTU
avpavlovmgu@my-post.ru
https://orcid.org/0000-0002-1082-2222
Prosp. Vernadskogo, 78, 117454 Moscow, Russian Federation

Abstract. We consider the analytical $z = f(p)$ functions in different coordinate systems. The centers of coordinates of the new systems are located in the $(A, 0)$ points, with the r variable. With point of view of the new coordinate system we obtain some new $y = f(x + A)$ equations for the same $y = f(x)$ graph for the only function, (the new equation of the same $(z, f(p))$ set of points for the $p = x$, $z = y$ complex variables). To prove the fact we can consider the $y = f(p)$ equation for the new $p = r + A$ variable with $r = x$; by definition of the p and r variables $p = r + A$, (the p variable we consider in the primary coordinate system, the r variable we consider in the new coordinate system with the $(A, 0)$ center of coordinate); for all the r, x variables $r = x$ by definition of the radius-vectors in both coordinate systems, (r is other designation of x). The consideration of the equations results in periodicity of the $f(p)$ function. The same result we obtain for the complex $F(p)$ field, where $F(x+iy) = f(-x+iy)$ by definition for the $p = x + iy$ complex variable. In the new coordinate system the i constant is located on the OX axis instead of the OY axis. In the system of coordinates the new equation of the $(z, f(p))$ set of points (graph) is the same as in the initial system of coordinates. It is proved, that the $f(ix + y)$ field in relation to the $x = y$ diagonal is equal to the $f(-i(-x + iy))$ field in relation to the iOX axis.

Key words: function periodicity, analytical functions, complex fields of movements, different coordinate systems, double representation of functions.