УДК 513.83
ББК 22.152

О ПРОЕКТИВНО КОНЕЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Попов Владимир Валентинович

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики
Волгоградского государственного университета
popov_v_v@rambler.ru
Проспект Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Строится пример метризуемого пространства веса $c = 2^{\aleph_0}$, образ которого при любом открытом непрерывном отображении в метризуемое сепарабельное пространство состоит из одной точки.

Ключевые слова: проективно конечное пространство, метризуемое пространство, непрерывное открытое отображение, связное пространство, сепарабельное пространство.

В работе [1] А.В. Архангельский ввел понятие проективной мощности топологического пространства как точной верхней грани мощности всех сепарабельных метризуемых пространств, являющихся образами этого пространства при открытых непрерывных отображениях. Там же поставлен ряд вопросов о структуре проективно конечных и проективно счетных пространств. Спрашивается, в частности, — может ли проективно конечное пространство содержать нетривиальную сходящуюся последовательность. В данной работе строится проективно конечное (а потому и проективно счетное, а также проективно дискретное) тихоновское пространство, мощность и вес которого равны $c = 2^{\aleph_0}$. Кроме того, это пространство содержит нетривиальные сходящиеся последовательности.

Напомним, что отображение $f : X \to Y$ топологических пространств называется открытым, если образ $f(U)$ любого открытого множества $U \subset X$ открыт в Y. Все необходимые определения можно найти в [1; 2]. Все отображения предполагаются непрерывными.

Основные результаты работы:

Теорема 1. *Существует связное метризуемое проективно одноточечное пространство веса $c = 2^{\aleph_0}$.*

Теорема 2. *Для любого кардинала $\tau \geq 2^{\aleph_0}$ существует связное проективно одноточечное пространство веса τ, которое содержит гомеоморфный образ любого тихоновского пространства веса $\leq \tau$.*

© Попов В.В., 2013

1. Открытые отображения подмножеств прямой

Лемма 1. *Пусть $X = (a, b)$ — интервал числовой прямой, $a < b$, и $f : X \to Y$ — непрерывное открытое отображение на тихоновское пространство Y, состоящее более чем из одной точки. Тогда:*

(1) Если $y \in Y$, то множество $f^{-1}(y)$ не имеет предельных точек в X.
(2) Для любого $x \in X$ найдутся такие числа α и β, что $\alpha < x < \beta$ и ограничения f на полуинтервалы $(\alpha, x]$ и $[x, \beta)$ взаимно однозначны (и потому являются гомеоморфизмами).
(3) Для любого $y \in Y$ найдется такая окрестность Oy точки y, которая гомеоморфна или интервалу или полуинтервалу числовой прямой.

Доказательство. (1) Допустим, что существует последовательность x_n различных точек X, которая сходится к некоторой точке $x \in X$ и для которой $f(x_n) = y$ при всех n. Выберем интервал $U \subset X$, который содержит x и для которого $Y \setminus f(U) \neq 0$. Пусть n — такое число, что $x_n, x_{n+1}, x_{n+2} \in U$. Положим

$$\alpha = \min\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}\} \text{ и } \beta = \max\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}\}.$$

Тогда образ $Z = f((\alpha, \beta))$ интервала (α, β) при отображении f совпадает с образом отрезка $[\alpha, \beta]$. При этом первое множество открыто, а второе замкнуто (ввиду компактности образа отрезка). Так как Y связно, заключаем, что $Z = Y$. Однако $Y \setminus Z \supset Y \setminus$ $\setminus f(U) \neq 0$. Противоречие с выбором U показывает, что $f^{-1}(y)$ не может содержать предельных точек.

(2) Используя (1), выберем число α_1, для которого отрезок $[\alpha_1, x]$ пересекает множество $f^{-1}f(x)$ по единственной точке x, причем образ этого отрезка не совпадает с Y. Если f взаимно однозначно на отрезке $[\alpha_1, x]$, то заключению свойства (2) удовлетворяет число $\alpha = \alpha_1$. Пусть теперь найдутся точки t_1, t_2, для которых $\alpha_1 \leq t_1 < t_2 \leq x$ и $f(t_1) = f(t_2)$. Тогда $f(t_2) \neq f(x)$, поэтому $t_2 < x$.

Если f взаимно однозначно на отрезке $[t_2, x]$, то заключению свойства (2) удовлетворяет число $\alpha = t_2$. В противном случае найдутся точки t_3, t_4, для которых $t_2 \leq t_3 <$ $< t_4 \leq x$ и $f(t_3) = f(t_4)$.

Положим $Z = f((t_1, t_4))$. По построению $Z = f([t_1, t_4])$. Ясно, что Z открыто-замкнуто в Y, поэтому $Z = Y$. Однако это противоречит выбору числа α_1. Противоречие показывает, что заключению свойства (2) удовлетворяет число $\alpha = t_2$. Существование числа β доказывается аналогично.

(3) Пусть $y \in Y$. Фиксируем $x \in X$ с условием $y = f(x)$. Пусть числа α и β выбраны для x в соответствии со свойством (2). Если ограничение $f|_{(\alpha,\beta)}$ взаимно однозначно, то оно является гомеоморфизмом и за искомую окрестность точки x можно принять, например, $f((\alpha, \beta))$.

Пусть теперь найдутся точки $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$, для которых $f(x_1) = f(x_2)$. Выбор α и β гарантирует, что $\alpha < x_1 < x < x_2 < \beta$. Используя открытость отображения f, теперь несложно проверить, что $f((x_1, x)) = f((x, x_2))$. Поэтому за искомую окрестность точки y можно принять $f((x_1, x])$.

Лемма 2. *Пусть $X = [a, b] \cup [a', b']$ — объединение двух отрезков числовой прямой, $a < b \leq a' < b'$, и $f : X \to Y$ — непрерывное отображение в тихоновское пространство. Пусть заданы множества F и F', причем $F = \{a, b\}$ или $F = \{a\}$, $F' = \{a', b'\}$ или $F' = \{a'\}$. Пусть $U = [a, b] \setminus F$, $U' = [a', b'] \setminus F'$ и ограничения отображения f на множества U и U' являются открытыми отображениями. Пусть $f(U) \cap f(U') \neq \emptyset$, $f(F) \cap f(U') = \emptyset$ и $f(U) \cap f(F') = \emptyset$. Тогда $f(U) = f(U')$ и $f(F) = f(F')$.*

Доказательство. Допустим, что $f(U) \not\subset f(U')$. Тогда U не содержится во множестве $M = f^{-1}(f(U'))$. В то же время $U \cap M \neq \emptyset$, поскольку $f(U) \cap f(U') \neq \emptyset$. Так как U

связно, из сказанного следует существование точки $t \in U$, которая является граничной для множества M.

Выберем такие точки $x_n \in M$, что последовательность x_n сходится к точке t. При любом n выберем точку $x'_n \in U'$ с условием $f(x'_n) = f(x_n)$. Тогда последовательность x'_n имеет на отрезке $[a', b']$ некоторую предельную точку t'. Ясно, что $f(t) = f(t')$. Из $f(U) \cap f(F') = \emptyset$ получаем $t' \in U'$. Но тогда $t \in M$, поэтому t — внутренняя точка M, поскольку M открыто. Противоречие с выбором точки t показывает, что $f(U) \subset f(U')$. Аналогично проверяется обратное включение. Следовательно, $f(U) = f(U')$. Поэтому $f(U \cup F) = f([U]) = f([U']) = f(U' \cup F')$. Теперь легко закончить доказательство леммы.

Лемма 3. *Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное открытое отображение тихоновских пространств и $f(x_1) = f(x_2)$ для некоторых различных точек $x_1, x_2 \in X$. Пусть A — такое подмножество X, для которого $x_2 \in [A] \setminus A$. Пусть также Ox_1 и Ox_2 — открытые окрестности точек x_1 и x_2 соответственно. Тогда найдутся точки $x'_1 \in$ $\in Ox_1$ и $x'_2 \in Ox_2 \cap A$, для которых $f(x'_1) = f(x'_2)$.*

Доказательство. Множество $U = f^{-1}f(Ox_1) \cap Ox_2$ является окрестностью точки x_2, поэтому из $x_2 \in [A] \setminus A$ следует существование точки $x'_2 \in U \cap A$. Из $x'_2 \in U$ следует $f(x'_2) \in f(Ox_1)$, поэтому найдется точка $x'_1 \in Ox_1$, для которой $f(x'_1) = f(x'_2)$.

Лемма 4. *Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное открытое отображение тихоновских пространств, X связно и $Y = f(X)$. Пусть C — открытое связное подмножество X, а $x_1 \in X \setminus C$ и $x_2 \in C$ такие точки, что $f(x_1) = f(x_2)$ и $C \cup \{x_1\}$ — компакт. Тогда $f(C) = Y$.*

Доказательство. Множество $Y_1 = f(C)$ открыто в Y как образ открытого множества при открытом отображении. Множество же $Y_2 = f(\{x_1\} \cup C)$ замкнуто в Y ввиду компактности $\{x_1\} \cup C$. Из $f(x_1) = f(x_2)$ получаем $Y_1 = Y_2$. Следовательно, $Y_1 =$ $= f(C)$ — открыто-замкнутое подмножество связного пространства Y, поэтому $f(C) =$ $= Y_1 = Y$.

2. Пространство D

Рассмотрим на координатной плоскости точки $a = (0,0)$ и $b_n = \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{4^n}\right)$, $n =$ $= 1, 2, 3, \ldots$ Пусть D — подмножество плоскости, являющееся объединением отрезков $I_n = [a, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$

Точку x тихоновского пространства X будем называть r-точкой, если она имеет открытую окрестность, которая гомеоморфна или интервалу или полуинтервалу числовой прямой. В последнем случае x является тем концом полуинтервала, который содержится в этом полуинтервале.

Лемма 5. *Пусть X_0 — связное замкнутое подмножество плоскости, пересекающее множество D по единственной точке a. Пусть $X = X_0 \cup D$ — подмножество плоскости с обычной евклидовой метрикой и $f : X \to Y$ — непрерывное открытое отображение на тихоновское пространство Y. Пусть $f(a) = f(x)$ для некоторой r-точки $x_0 \in X$. Тогда Y состоит из одной точки.*

Доказательство. Допустим, что $|Y| > 1$. Тогда по лемме 1, (3) $y = f(x_0)$ является r-точкой, поэтому найдется открытая окрестность Oy точки y и гомеоморфизм $\varphi : Oy \to \to \mathbf{R}$ на связное подпространство Y' числовой прямой.

Пусть отображение $g : f^{-1}(Oy) \to Y'$ определено формулой $g(x) = \varphi(f(x))$. Тогда g — непрерывное открытое отображение. Положим $y_0 = g(a)$.

Так как любая окрестность точки a содержит все отрезки I_n, начиная с некоторого номера, найдется такой номер n_0, что $f(I_n) \subset Oy$ при $n \geq n_0$. Ясно, что $g(I_n) \subset Y'$ при $n \geq n_0$.

Допустим, что $g(I_n) = \{y_0\}$ при некотором n. Тогда $g(I_n \setminus \{a\}) = \{y_0\}$, причем $g(I_n \setminus \{a\})$ открыто в Y', поскольку $I_n \setminus \{a\}$ — открытое в X множество, а g — открытое отображение. Связность Y' дает $Y' = \{y_0\}$, откуда следует $Y = \{f(a)\}$ и лемма доказана.

Предположим теперь, что $|g(I_n)| > 1$ для всех n. Тогда $g(I_n)$ при любом $n > n_0$ — отрезок числовой прямой, поскольку это множество связно, компактно и лежит в $\mathbf{R}$. Концы этого отрезка обозначим α_n, β_n, где $\alpha_n < \beta_n$. Ясно, что $\alpha_n \leq y_0 \leq \beta_n$.

Так как g непрерывно, а любая окрестность точки a содержит все отрезки I_n, начиная с некоторого номера, справедливы равенства

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = y_0 = \lim_{n\to\infty} \beta_n.$$

Поэтому будут выполнены условия хотя бы одного из следующих случаев.

Случай 1. $y_0 < \beta_n < \beta_m$ при некоторых n, m. В этом случае множество $I_n \setminus \{a\}$ открыто в X, а его образ $g(I_n \setminus \{a\})$ не открыт в Y', поскольку точка β_n принадлежит этому образу, но не является его внутренней точкой. Противоречие с открытостью отображения g показывает, что этот случай невозможен.

Случай 2. $\alpha_n < \alpha_m < y_0$ при некоторых $n, m > n_0$. Этот случай рассматривается аналогично. Выясняется, что и этот случай также невозможен.

Случай 3. $\alpha_n = y_0 = \beta_n$ при всех $n > n_0$. Однако, как показано выше, в этом случае $Y = \{f(a)\}$.

Лемма 6. *Пусть $X = X_0 \cup D$, где X_0 — связное замкнутое подмножество плоскости и $X_0 \cap D = \{a\}$. Пусть X наделено обычной евклидовой метрикой и $f : X \to Y$ — непрерывное открытое отображение на тихоновское пространство Y, причем $|Y| > > 1$. Тогда:*

(1) Ограничение $f|_{I_n}$ взаимно однозначно (и потому является гомеоморфизмом) при любом n.

(2) Если $f(I_n \setminus \{a\}) \cap f(I_m \setminus \{a\}) \neq \emptyset$ при некоторых n и m, то $f(I_n \setminus \{a\}) = f(I_m \setminus \{a\})$ и $f(b_n) = f(b_m)$.

(3) Для любого n множество $M = \{m : f(I_n \setminus \{a\}) \cap f(I_m \setminus \{a\}) \neq \emptyset\}$ конечно.

Доказательство. (1) Допустим, что $f(x_1) = f(x_2)$ для некоторых различных точек $x_1, x_2 \in I_n = [a, b_n]$. Считаем, что точка x_2 лежит между точками x_1 и b_n или же $x_2 = b_n$ (в противном случае x_1 и x_2 меняем местами). Пусть C — та компонента связности множества $I_n \setminus \{x_1\}$, которая содержит точки x_2 и b_n. По лемме 4 верно $f(C) = Y$. Поэтому найдется точка $x_3 \in C$, для которой $f(x_3) = f(a)$. Ясно, что x_3 является r-точкой, поэтому из равенства $f(x_3) = f(a)$ по лемме 5 следует $|Y| = 1$. Противоречие с условием доказываемой леммы завершает доказательство пункта (1).

(2) При любом n множество $f(I_n \setminus \{a\})$ открыто в Y, а множество $f(I_n)$ замкнуто в нем (ввиду своей компактности), а также связно. Из (1) следует, что $f(a) \notin f(I_n \setminus \{a\})$, поэтому множество $Y_n = f(I_n \setminus \{a\})$ открыто-замкнуто в подпространстве $Y \setminus \{f(a)\}$ и

потому является компонентой связности. Известно, что две компоненты связности или не пересекаются или совпадают. Поэтому из $Y_n \cap Y_m \neq 0$ следует $Y_n = Y_m$, откуда легко заключить, что $f(b_n) = f(b_m)$.

(3) Множество $V = f^{-1}(Y \setminus \{f(b_n)\})$ является окрестностью точки a. Допустим, что M бесконечно. Тогда найдется $m \in M$, для которого $I_m \subset V$. Но тогда $f(I_m) \subset Y \setminus \setminus \{f(b_n)\}$, откуда $f(b_m) \neq f(b_n)$, что противоречит свойству (2).

3. Пространство E

Рассмотрим на координатной плоскости следующие точки:

$$c = (0,0), \quad d_0 = \left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad d_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^n}\right) \text{ и } e_{nm} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+m}}, \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n \cdot 4^m}\right),$$

где $n, m = 1, 2, 3, \ldots$ Положим

$$\begin{array}{lcl} D_n & = & \cup\{[d_n, e_{nm}] : m = 1, 2, \ldots\}, \\ J_n & = & [c, d_n] \cup D_n, \text{ где } : n = 1, 2, \ldots\}, \\ E & = & \cup\{J_n : n = 1, 2, \ldots\}. \end{array}$$

Отметим, что если ко множеству D (из предыдущего раздела) применить гомотетию с коэффициентом $\frac{1}{2^n}$, а затем произвести параллельный перенос на вектор $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^n}\right)$, то получим множество D_n.

Лемма 7. *Пусть X — объединение множества E и интервала на плоскости с концами $(-1, 0)$ и $(1, 0)$, рассматриваемое с обычной метрикой плоскости. Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное открытое отображение на тихоновское пространство Y, состоящее более чем из одной точки. Тогда:*
(1) Ограничение $f|_{[d_n, e_{ni}]}$ взаимно однозначно (и потому является гомеоморфизмом) при любых n, i.
(2) Множество $f((d_n, e_{ni}])$ является компонентой связности в подпространстве $Y \setminus \{f(d_n)\}$ при любых n, i.
(3) Для любого n множество $M = \{m : f(d_m) = f(d_n)\}$ конечно.
(4) Ограничение $f|_{[c, d_n]}$ взаимно однозначно (и потому является гомеоморфизмом) при любом n.

Доказательство. (1) следует из леммы 6 и гомеоморфности D и D_n;

(2) вытекает из того, что $f((d_n, e_{ni}])$ открыто в Y, $f([d_n, e_{ni}])$ замкнуто в нем и $f(d_n) \notin f((d_n, e_{ni}])$ (по свойству (1)).

(3) Допустим, что при некотором n множество M бесконечно. Положим $y_0 = f(d_n)$. Так как последовательность d_m сходится к точке $d_0 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, получаем $f(d_0) = y_0$.

Из леммы 6, (3) следует существование таких i и j, для которых множества $Y_{ni} = f((d_n, e_{ni}])$ и $Y_{nj} = f((d_n, e_{nj}])$ дизъюнктны. Рассмотрим окрестность $V = Y \setminus \setminus \{f(e_{ni}), f(e_{nj})\}$ точки y_0. Так как любая окрестность точки d_0 содержит все множества D_k, кроме, быть может, их конечного числа, а множество M бесконечно, найдется номер $m \in M$, для которого $f(D_m) \subset V$.

По свойству (1) (и ввиду выбора i, j) множества Y_{ni} и Y_{nj} являются различными компонентами связности в пространстве $Y \setminus \{y_0\}$. Связное множество $f((c, d_m))$ лежит в том же подпространстве, поэтому оно не может пересекать одновременно компоненты Y_{ni} и Y_{mj}. Пусть для определенности оно не пересекает первого из этих множеств.

Применяя лемму 3 при $x_1 = d_m$, $x_2 = d_n$, $Ox_1 = J_m \setminus \{c\}$, $Ox_2 = J_n \setminus \{c\}$ и $A = (d_n, e_{ni})$, выберем точки $x_1' \in J_m \setminus \{c\}$ и $x_2' \in (d_n, e_{ni})$, для которых $f(x_1') = f(x_2')$. Так как $Y_{ni} \cap f(c, d_m) = 0$, найдется такое k, что $x_1' \in (d_m, e_{mk}]$.

Положим $y' = f(x_1)$. Тогда

$$f((d_n, e_{ni}]) \cap f((d_m, e_{mk}]) \supset \{y'\} \neq 0.$$

Из $f(d_m) = f(d_n)$ и свойства (2) следует, что Y_{mk} является компонентой связности множества $Y \setminus \{y_0\}$. Поэтому эти компоненты совпадают:

$$f((d_n, e_{ni}]) = f((d_m, e_{mk}]),$$

откуда

$$f(e_{ni}) = f(e_{mk}),$$

что противоречит включению $f(D_m) \subset V$. Противоречие завершает доказательство свойства (3).

(4) Допустим, что $f(x_1) = f(x_2)$ для некоторых различных точек $x_1, x_2 \in [c, d_n]$. Считаем, что точка x_2 лежит между точками x_1 и d_n или же $x_2 = d_n$ (в противном случае x_1 и x_2 меняем местами). Пусть C — та компонента связности множества $J_n \setminus \setminus \{x_1\}$, которая содержит точки x_2 и d_n. По лемме 4 верно $f(C) = Y$. Пусть $m \geq 1$ — любое целое число. Тогда $f(d_m) \in Y = f(C)$, поэтому $f(d_m) = f(x)$ для некоторой точки $x \in C$. Если x — r-точка, то $|Y| = 1$ по лемме 5, что невозможно. Единственной не r-точкой в C является d_n. Поэтому $f(d_m) = f(d_n)$. Следовательно, $f(d_m) = f(d_n)$ при всех m. Противоречие со свойством (3) завершает доказательство свойства (4).

4. Классификация точек

Точку x тихоновского пространства X назовем a-точкой, если существует такая открытая окрестность Ox точки x, замыкание которой представимо в виде $[Ox] = \bigcup\{Z_n : : n = 1, 2, 3, \ldots\}$, где каждое Z_n гомеоморфно отрезку числовой прямой, причем $Z_n \setminus \{x\}$ связно, $Z_n \cap Z_m = \{x\}$ при различных m, n и любая окрестность точки x содержит все Z_n, начиная с некоторого номера.

Для удобства введенные ранее в разделе 2 r-точки будем называть также точками типа 1, а a-точки — точками типа 2.

Рассмотрим еще три типа точек в тихоновском пространстве X.

Точку $x \in X$ назовем точкой типа 3, если существует последовательность $x_n \in X \setminus \setminus \{x\}$ a-точек в X, которая сходится к x.

Точку $x \in X$ назовем точкой типа 4, если для этой точки существует такая окрестность Ox, которая не содержит a-точек и имеет бесконечно много компонент связности.

Точку $x \in X$ назовем точкой типа 5, если для этой точки имеется счетная база $O_n(x)$ связных окрестностей, каждая из которых содержит точки типа 5.

Отметим, что в пространстве X из леммы 7 a-точками являются точки d_n (и только они), точкой типа 3 является d_0, точками типа 4 являются точки интервала (c, d_0), а точкой типа 5 является c. Все остальные точки этого пространства являются r-точками (то есть точками типа 1).

Лемма 8. *Пусть $f : X \to Y$ — отображение из леммы 7. Пусть $x \in X$ и $y = f(x)$. Тогда:*

(1) Если x — точка типа k, где $k = 1, 2, 3, 4, 5$, то и y — точка типа k.

(2) Если $x_1 \in X$ — точка типа k, $x_2 \in X$ — точка типа l и $k \neq l$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Доказательство. (1) вытекает из лемм 5 и 7.

(2) следует из (1), а также того факта, что точка $y \in Y$ не может быть одновременно точкой типа k и точкой типа l при различных k и l.

5. Пространство $L(\theta)$

Пусть $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots)$ — последовательность из нулей и единиц и

$$F_n(\theta) = \begin{cases} D, \text{ если } \theta_n = 0, \\ E, \text{ если } \theta_n = 1. \end{cases}$$

Пусть также $L(\theta)$ — подмножество плоскости, определяемое равенством

$$L(\theta) = S \cup \bigcup \{\pi_n(F_n(\theta)) : n = 1, 2, 3, \ldots\},$$

где $S = \{(x, 0) : x \geq 0, x \in \mathbf{R}\}$ — луч на плоскости, а π_n — параллельный перенос плоскости на вектор $(n, 0)$. Множество $L(\theta)$ будем рассматривать в обычной топологии плоскости, индуцированной евклидовой метрикой. Через O будем обозначать точку на плоскости с координатами $(0, 0)$. В дальнейшем будем также предполагать, что выполнены следующие условия:

(t_1) последовательность θ не содержит двух нулей подряд;

(t_2) $\theta_1 = 1$;

(t_3) последовательность θ не является периодической.

Лемма 9. *Пусть $f : L(\theta) \to Y$ — непрерывное отображение на тихоновское пространство, состоящее более чем из одной точки, причем ограничение f на $L(\theta) \setminus \{O\}$ является открытым отображением. Тогда пространства $f(L(\theta) \setminus \{O\})$ и $L(\theta) \setminus \{O\}$ гомеоморфны.*

Доказательство. Положим

$$L_1(\theta) = \{x \in L(\theta) \setminus \{O\} : x \text{ — точка типа } 1\}.$$

Множество $L_1(\theta)$ распадается на компоненты связности. Для точки $x \in L_1(\theta)$ обозначим через $W(x)$ компоненту связности, содержащую точку x, а через $F(x)$ — множество ее граничных точек в $L(\theta)$. Ясно, что $W(x)$ — это интервал или полуинтервал на плоскости, а $F(x)$ состоит из одной или двух точек, имеющих тип, больший 1. Единственным исключением является компонента, граничными точками которой являются точки с координатами $(0, 0)$ и $(1, 0)$. Тип первой из этих точек пока не определен. Далее доказательство разбивается на ряд отдельных шагов.

(1) Пусть $x \in S$ — точка типа 2. Тогда существует (и единственна) точка $x' \in S$ типа 3 такая, что интервал U с концами x и x' состоит из точек типа 1.

(2) Во множестве $L(\theta) \setminus S$ нет интервала, состоящего из точек типа 1, концы которого имели бы тип 2 и 3.

По лемме 2 из (1) и (2) следует:

(3) $f(U) \cap f(L(\theta) \setminus S) = \emptyset$, где U — интервал из пункта (1).

(4) Пусть $d \in L(\theta) \setminus S$ — точка типа 2. Тогда $f(d) \notin f(S)$.

Для проверки (4) допустим, что $f(d) = f(x)$, где $x \in S$. Тогда x — точка того же типа, что и d, то есть точка типа 2. Пусть U — интервал, выбранный для x в соответствии со свойством (1).

Пусть Od — такая окрестность точки d, все точки которой являются r-точками и $Od \cap S = \emptyset$. Тогда $f^{-1}(f(Od))$ — окрестность точки x, поэтому из $x \in [U] \setminus U$ следует существование точки $u \in U \cap f^{-1}(f(Od))$. Тогда $f(u) \in f(Od)$, поэтому существует точка $v \in Od$, для которой $f(u) = f(v)$, поэтому $f(u) \in f(U) \cap f(L(\theta) \setminus S)$, что противоречит свойству (3). Свойство (4) доказано.

(5) Пусть $x \in L(\theta) \setminus S$. Тогда $f(d) \notin f(S)$.

Для проверки (5) допустим, что $f(x) = f(x')$, для некоторой точки $x' \in S$. Тогда по свойству (4) x не может иметь тип 2. Так как $L(\theta) \setminus S$ состоит из точек типа 1 и 2, заключаем, что x и x' — точки типа 1. Поэтому для них определены интервалы $W(x)$ и $W(x')$ с множествами граничных точек $F(x)$ и $F(x')$ соответственно. По лемме 2 имеем $f(F(x)) = f(F(x'))$. Из $x \in L(\theta) \setminus S$ следует, что $F(x)$ состоит или из двух точек типа 2 и 5 или из одной точки типа 2. В любом случае $F(x)$ содержит точку x_0 типа 2. Но тогда по свойству (4) $f(x_0) \notin f(S)$, что невозможно, поскольку $f(F(x)) = f(F(x'))$ и $F(x') \subset S$. Свойство (5) доказано.

Из открытости отображения f и свойства (5) следует свойство (6).

(6) Ограничение f на S является открытым отображением.

Используя тот факт, что последовательность θ не периодическая, и рассуждая, как при доказательстве свойств (1)–(4), несложно убедиться, что справедливо свойство (7).

(7) Ограничение f на $S \setminus \{O\}$ взаимно однозначно и потому является гомеоморфизмом.

Из свойства (7), а также лемм 6 и 8 вытекает гомеоморфность пространств $f(L(\theta) \setminus \{O\})$ и $L(\theta) \setminus \{O\}$.

6. Пространство K

Пусть Θ — множество всех последовательностей из нулей и единиц, удовлетворяющих свойствам (t_1)–(t_3). Ясно, что $|\Theta| = 2^{\aleph_0}$. Пусть

$$\widetilde{K} = \bigoplus \{L(\theta) : \theta \in \Theta\} \text{ —}$$

дизъюнктная сумма метрических пространств. При каждом $\theta \in \Theta$ обозначим через $\rho_\theta(x, y)$ обычную евклидову метрику на пространстве $L(\theta)$. Пусть также O_θ — точка с координатами $(0, 0)$. Склеим все точки O_θ, $\theta \in \Theta$, в одну точку O_*. В полученном множестве K можно ввести метрику $\rho(x, y)$ следующим образом:

Если $x, y \in L(\theta) \setminus \{O_\theta\}$ при некотором θ, то $\rho(x, y) = \rho_\theta(x, y)$.
Если $x \in L(\theta) \setminus \{O_\theta\}$, то $\rho(x, O_*) = \rho_\theta(x, O_\theta)$.
Наконец, если $x \in L(\theta) \setminus \{O_\theta\}$, $y \in L(\theta') \setminus \{O_{\theta'}\}$ и $\theta \neq \theta'$,
то $\rho(x, y) = \rho_\theta(x, O_\theta) + \rho(O_{\theta'}, y)$.

При $\theta \in \Theta$ и при $n = 0, 1, 2, \dots$ пусть $x_n(\theta)$ — точка пространства $L(\theta)$, имеющая координаты $(n, 0)$. Считаем, что при $\theta \neq \theta'$ пространства $L(\theta)$ и $L(\theta')$ лежат в различных координатных плоскостях, не имеющих общих точек, поэтому $x_n(\theta) \neq x_n(\theta')$ при $n > 1$. В то же время $x_0(\theta) = O_*$ при всех θ.

Через $V_n(\theta)$ будем обозначать интервал с концами $x_n(\theta)$, $x_{n+1}(\theta)$. Точка $x_n(\theta)$ при $n \geq 1$ имеет тип 2 в пространстве $L(\theta)$, если $\theta_n = 0$, и тип 5, если $\theta_n = 1$. Интервал же

$V_n(\theta)$ состоит из точек типа 1 (если $\theta_n = 0$) или из точек типа 1, 3 и 4 (если $\theta_n = 1$). Поэтому $f(x_n(\theta)) \notin f(V_m(\theta'))$ при любых θ, θ', $n \geq 1$ и любых $m \geq 0$.

Лемма 10. *Пусть $f : K \to Y$ — непрерывное отображение на сепарабельное тихоновское пространство и ограничение f на $K \setminus \{O_*\}$ — открытое отображение. Тогда Y состоит из одной точки.*

Доказательство. Допустим, что $|Y| > 1$. При каждом $\theta \in \Theta$ множество $f(V_0(\theta))$ открыто в Y и непусто. Ввиду сепарабельности Y найдутся различные θ, θ', для которых $f(V_0(\theta)) \cap f(V_0(\theta')) \neq \emptyset$. При этом $f(x_0(\theta)) = f(O_*) = f(x_0(\theta'))$.

Допустим, что $n \geq 1$, $f(x_{n-1}(\theta)) = f(x_{n-1}(\theta'))$ и $f(V_{n-1}(\theta)) \cap f(V_{n-1}(\theta)) \neq \emptyset$. Проверим, что тогда $f(x_n(\theta)) = f(x_n(\theta'))$ и $f(V_n(\theta)) \cap f(V_n(\theta')) \neq \emptyset$.

Применяя лемму 2 к интервалам $V_{n-1}(\theta)$ и $V_{n-1}(\theta')$, заключаем, что $f(V_{n-1}(\theta)) = f(V_{n-1}(\theta'))$, а множества $\{f(x_{n-1}(\theta)), f(x_n(\theta))\}$ и $\{f(x_{n-1}(\theta')), f(x_n(\theta'))\}$ совпадают. Так как $f(x_{n-1}(\theta)) = f(x_{n-1}(\theta'))$, получаем $f(x_n(\theta)) = f(x_n(\theta'))$. По свойству (7) леммы 9 ограничения отображения f на $S_\theta \setminus \{O_\theta\}$ и на $S_{\theta'} \setminus \{O_{\theta'}\}$ открыты, откуда легко заключить, что $f(V_n(\theta)) \cap f(V_n(\theta')) \neq \emptyset$. Таким образом, по индукции доказано, что $f(x_n(\theta)) = f(x_n(\theta'))$ при всех n. Отсюда следует, что $\theta_n = \theta'_n$ при всех n, то есть $\theta = \theta'$. Противоречие с выбором θ и θ' показывает, что $|Y| = 1$.

Доказательство теорем 1 и 2. По лемме 10 условиям теоремы 1 удовлетворяет пространство K (введенное в разделе 6).

Для доказательства теоремы 2 рассмотрим дизъюнктную сумму $\widetilde{X} = I^\tau \oplus [a, b] \oplus K$, где I^τ — тихоновский куб веса τ, $[a, b]$ — отрезок числовой прямой. Фиксируем произвольную точку $x_0 \in I^\tau$. Пусть X — фактор-пространство, полученное из $\widetilde{X}$ путем склейки пары точек x_0, a и пары точек b, O_*. Из леммы 10 легко выводится, что X проективно одноточечно. Осталось вспомнить, что тихоновский куб I^τ содержит гомеоморфный образ любого тихоновского пространства веса $\leq \tau$ [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архангельский, А. В. Некоторые новые направления в теории непрерывных отображений / А. В. Архангельский // Сб. науч. тр. Латвийского госуниверсита «Непрерывные функции на топологических пространствах». — 1986. — С. 5–35.

2. Архангельский, А. В. Основы общей топологии в задачах и упражнениях / А. В. Архангельский, В. И. Пономарев. — М. : Наука, 1974. — 424 с.

3. Энгелькинг, Р. Общая топология / Р. Энгелькинг. — М. : Мир, 1986. — 752 с.

REFERENCES

1. Arkhangel'skiy A.V. Nekotorye novye napravleniya v teorii nepreryvnykh otobrazheniy [Some new directions in the theory of continuous mappings]. *Sb. nauch. tr. Latviyskogo gosuniversita «Nepreryvnye funktsii na topologicheskikh prostranstvakh»* [The collection of scientific papers of Latvian state university "The continuous functions on topological spaces"], 1986, pp. 5–35.

2. Arkhangel'skiy A.V., Ponomarev V.I. *Osnovy obschey topologii v zadachakh i uprazhneniyakh* [The foundation of general topology in tasks and exercises]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 424 p.

3. Engelking R. *Obschaya topologiya* [Outline of general topology]. Moscow, Mir Publ., 1986. 752 p.

ON PROJECTIVE FINITE SPACES

Popov Vladimir Valentinovich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor, Department of Computer Science and Experimental Mathematics
Volgograd State University
popov_v_v@rambler.ru
Prospect Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. A.V. Arhangel'skii [1] defines the notion of projective power of a Tychonoff space. In particular, the space X is projectively finite, if for any open continuous mapping $f : X \to Y$ onto metrizable separable space the image $Y = f(X)$ is a finite set. The following results are obtained in this paper:

Теорема 1. *There is a projectively finite metrizable space of the weight $c = 2^{\aleph_0}$.*

Теорема 2. *For every cardinal number $\tau \geq 2^{\aleph_0}$ there exists such a projectively finite Tychonoff space X, that any Tychonoff space of the weight $\leq \tau$ is embeddable in X.*

It follows from theorems 1 and 2 the existance of such a projectively finite space, that contains a non trivial convergent sequence. This is an affirmative answer to one of the question of A.V. Arhangel'skii [1].

Key words: projective finite space, metrizable space, open continuous mapping, connected space, separable space.