



DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2024.4.6>

УДК 534.2, 537.7

ББК 22.25, 22.32

Дата поступления статьи: 10.09.2024

Дата принятия статьи: 19.11.2024

## ЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА АКУСТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В НЕРАВНОВЕСНОМ ГАЗЕ: ГРАНИЦЫ УСТОЙЧИВОСТИ И ОБЛАСТИ ЗАПРЕЩЕННЫХ ЧАСТОТ<sup>1</sup>

Сергей Сергеевич Храпов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры  
информационных систем и компьютерного моделирования,  
Волгоградский государственный университет  
khrapov@volsu.ru

<https://orcid.org/0000-0003-2660-2491>

просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

**Аннотация.** Рассмотрена динамика малых возмущений в неравновесном колебательно-возбужденном газе. Получены волновое и дисперсионное уравнения, описывающие динамику акустических мод в линейном приближении. Сформулированы критерии для выделения физически корректных решений дисперсионного уравнения и определения границ областей запрещенных частот акустических волн. Эти критерии позволяют исключить из рассмотрения области нефизических («фантомных») решений, в которых фазовая скорость звука может становиться аномально высокой и на определенных частотах обращаться в бесконечность. Подробно изучены дисперсионные свойства неустойчивых звуковых, получены оценки инкремента и определены границы устойчивости и зоны запрещенных частот в зависимости от степени неравновесности среды, моделей релаксации, нагрева и охлаждения. Показано, что при определенных значениях степени неравновесности среды и зависимости времени релаксации и функции охлаждения от температуры и плотности звуковые волны в колебательно-возбужденном газе оказываются неустойчивыми. При этом акустический инкремент достигает максимума, когда период звуковых волн  $\tau_s$  сопоставим со временем релаксации  $\tau$ , а в высокочастотной области спектра  $\tau_s \lesssim \tau$  за счет вязкости и теплопроводности происходит стабилизация акустической неустойчивости.

**Ключевые слова:** неравновесный газ, колебательная релаксация, время релаксации, акустическая неустойчивость, скорость звука, запрещенные частоты, нагрев и охлаждение.

## Введение

Неустойчивость звуковых волн в неравновесном колебательно-возбужденном газе может возникать, если в процессе VT-релаксации часть колебательной энергии молекул подпитывает энергию волны, увеличивая ее амплитуду. В этом случае неравновесная среда становится акустической активной и в ней развивается акустическая неустойчивость, которая связана с появлением положительной обратной связи между газодинамическим возмущением и неравновесным тепловыделением (критерий Рэлеевской акустической неустойчивости) [8; 10; 17; 18].

Ранее в работах [1; 6; 9; 11; 19] исследовалась линейная динамика звуковых в акустически активной неравновесной среде и получены дисперсионные уравнения в различных приближениях. Динамика акустических волн в приближении квадратичной нелинейности рассматривалась в работах [6; 7; 19; 21] и были изучены структура слабых ударных волн и автоволновые импульсы в неравновесном газе. Нелинейная динамика акустической неустойчивости и структура ударных волн исследовались в [12–14] на основе численного газодинамического моделирования. Было обнаружено, что в процессе взаимодействия газодинамических возмущений (звуковых волн и слабых ударных волн) с неравновесной средой происходит перестройка частоты этих возмущений. Возникают новые волновые структуры (ударно-волновые импульсы), которые практически не зависят от начальной частоты возмущений. Поэтому построение границ устойчивости и областей запрещенных частот является актуальной задачей.

Целью работы является детальный анализ дисперсионного уравнения, описывающего линейную динамику акустической неустойчивости. В п. 1 выводится общее волновое уравнение для линейных возмущений в неравновесном газе. В п. 2 и 3 проводится анализ дисперсионного уравнения, определяются границы устойчивости акустических волн и области запрещенных частот в зависимости от параметров неравновесной среды.

### 1. Волновое уравнение и закон дисперсии

Рассмотрим тонкий плоскопараллельный канал, заполненный неравновесным колебательно-возбужденным газом. Если длина канала много больше его толщины и ширины, то можно ограничиться одномерным приближением и описывать газовую среду усредненными вдоль поперечных координат канала параметрами: плотностью  $\rho$ , давлением  $p$ , скоростью течения вдоль канала  $u$ , термодинамической  $T$  и колебательной  $T_v$  температурами, соответственно. Внутри канала на газ воздействует источник нагрева  $Q$ , который увеличивает удельную колебательную температуру газа  $\varepsilon_v(T_v)$  и  $T_v$ . В процессе колебательной релаксации за характерное время  $\tau(\rho, T)$  происходит перекачка колебательной энергии газа в тепло с увеличением температуры  $T$  и для создания неравновесного состояния с  $T < T_v$  необходимо наличие теплоотвода  $\Lambda$ . Динамику такой неравновесной среды можно описывать системой газодинамических уравнений, включающей законы сохранения массы, импульса, тепловой и колебательной энергий [1; 11; 12]. Эта система уравнений замыкается уравнением состояния идеального газа с заданными значениями показателя адиабаты  $\gamma$  и газовой постоянной  $R$  [12].

В качестве начального стационарного состояния рассмотрим однородную покоящуюся среду:  $\{\rho_0, p_0, T_0, Q_0, \Lambda_0, \tau_0\} = \text{const}$ ,  $u_0 = 0$ . Из уравнений баланса тепловой и колебательной энергий [12] в стационарном состоянии получаем следующие соотношения:  $Q_0 = \Lambda_0$  и  $\varepsilon_v(T_{v0}) - \varepsilon_v(T_0) = \tau_0 Q_0$ . Из последнего при заданных значениях  $T_0, Q_0$ ,

$\tau_0$  и  $\theta_v$  получаем выражение для колебательной температуры  $T_{v0}$ :

$$T_{v0} = T_0 \bar{\theta} \left[ \ln \frac{\bar{\theta} \exp \bar{\theta} + S (\exp \bar{\theta} - 1)}{\bar{\theta} + S (\exp \bar{\theta} - 1)} \right]^{-1}, \quad (1)$$

где  $\bar{\theta} = \frac{\theta_v}{T_0}$ ,  $\theta_v$  — характеристическая колебательная температура,  $S = \frac{\tau_0 Q_0}{RT_0}$  — безразмерный параметр, характеризующий степень неравновесности среды. Из (1) при  $S = 0$  получаем  $T_{v0} = T_0$ , а в случае  $S > 0$  имеем  $T_{v0} > T_0$ .

Проводя стандартную процедуру линеаризации системы уравнений, описывающих динамику неравновесного газа [12], то есть представляя все газодинамические величины в виде  $f = f_0 + \tilde{f}$  и ограничиваясь только линейными по возмущениям  $\tilde{f}$  слагаемыми ( $|\tilde{f}| \ll |f_0|$ ), получим следующую систему линеаризованных уравнений:

$$\frac{\partial \tilde{\varrho}}{\partial t} = -\varrho_0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\varrho_0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \varrho_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} - c_\infty^2 \frac{\partial \tilde{\varrho}}{\partial t} = -\gamma_1 \varrho_0 \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_v}{\partial t} - \frac{B_1}{\tau_0} \tilde{p} + \frac{B_2}{\tau_0} c_\infty^2 \tilde{\varrho} + \chi_0 \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} - \frac{\chi_0 c_\infty^2}{\gamma} \frac{\partial^2 \tilde{\varrho}}{\partial x^2}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}_v}{\partial t} = -\frac{\tilde{\varepsilon}_v}{\tau_0} + \frac{[(A_1 - B_1)\tilde{p} - (A_2 - B_2)c_\infty^2 \tilde{\varrho}]}{\gamma_1 \varrho_0 \tau_0}, \quad (5)$$

где  $A_1 = \gamma_1 [C_v + S(\tau_T + \Lambda_T)]$ ;  $A_2 = \frac{\gamma_1}{\gamma} [C_v + S(\tau_T - \tau_e + \Lambda_T - \Lambda_e)]$ ;  $B_1 = \gamma_1 S(\Lambda_T - Q_T)$ ;  $B_2 = \frac{\gamma_1}{\gamma} S(Q_e - Q_T - \Lambda_e + \Lambda_T)$ ;  $\mu_0 = \left( \frac{4}{3} \mu_{01} + \mu_{02} \right)$ ;  $\mu_{01}$  и  $\mu_{02}$  — коэффициенты первой и второй кинематической вязкости;  $\chi_0 = \gamma_1 \varkappa_0 / R \varrho_0$  — коэффициент температуропроводности;  $\varkappa_0$  — коэффициент теплопроводности;  $\gamma_1 = \gamma - 1$ ;  $c_\infty = \sqrt{\gamma p_0 / \varrho_0}$  — высокочастотная «замороженная» скорость звука;  $f_g = \left( \frac{\partial \ln f}{\partial \ln g} \right)_0$ ,  $f = \{\tau, Q, \Lambda\}$ ;  $g = \{\varrho, T\}$ . Для безразмерной величины  $C_v$ , характеризующей удельную теплоемкость колебательных движений молекул в равновесном состоянии, имеем [12]:

$$C_v = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial \varepsilon_v^e}{\partial T} \right)_0 = \bar{\theta}^2 \frac{\exp \bar{\theta}}{(\exp \bar{\theta} - 1)^2}.$$

Исключая из системы уравнений (2)–(5) величины  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{p}$  и  $\tilde{\varepsilon}_v$ , получим в итоге волновое уравнение, описывающее динамику малых возмущений в неравновесном колебательно-возбужденном газе:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial^2 \hat{\varrho}_1}{\partial t^2} - c_\infty^2 \frac{\partial^2 \hat{\varrho}_2}{\partial x^2} \right] + \frac{B_1}{\tau_0} \frac{\partial^2 \tilde{\varrho}}{\partial t^2} - \frac{B_2 c_\infty^2}{\tau_0} \frac{\partial^2 \tilde{\varrho}}{\partial x^2} \\ & = \chi_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial^2 \hat{\varrho}}{\partial t^2} - \frac{c_\infty^2}{\gamma} \frac{\partial^2 \hat{\varrho}}{\partial x^2} - \mu_0 \frac{\partial^3 \hat{\varrho}}{\partial t \partial x^2} \right] + \mu_0 \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} \left[ \frac{\partial \hat{\varrho}_1}{\partial t} + \frac{B_1}{\tau_0} \tilde{\varrho} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\hat{\varrho} = \tilde{\varrho} + \tau_0 \frac{\partial \tilde{\varrho}}{\partial t}$ ,  $\hat{\varrho}_j = A'_j \tilde{\varrho} + \tau_0 \frac{\partial \tilde{\varrho}}{\partial t}$ ,  $A'_j = 1 + A_j$ ,  $j = \{1, 2\}$ .

Подставляя в уравнение (6) решение в виде плоской гармонической волны  $\tilde{\varrho}(t, x) \propto \exp\{-i\omega t + ikx\}$  с частотой  $\omega$  и комплексным волновым числом  $k = k_r + ik_i$  получим уравнение, определяющее закон дисперсии линейных волн в неравновесном колебательно-возбужденном газе:

$$\begin{aligned} & \bar{\chi} \left[ \bar{\omega} \left( \bar{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) + i \left( \frac{1}{\gamma} - \bar{\omega}^2 \bar{\mu} \right) \right] \bar{k}^4 + \\ & + \{ \bar{\omega} [A'_2 + \bar{\mu} B_1 - \bar{\omega}^2 (\bar{\chi} + \bar{\mu})] + i [B_2 - \bar{\omega}^2 (1 + \bar{\chi} + A'_1 \bar{\mu})] \} \bar{k}^2 - \\ & - \bar{\omega}^2 [\bar{\omega} A'_1 + i (B_1 - \bar{\omega}^2)] = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где введены следующие безразмерные величины  $\bar{\omega} = \omega \tau_0$ ;  $\bar{k} = k \tau_0 c_\infty$ ;  $\bar{\mu} = \mu_0 / (\tau_0 c_\infty^2)$  и  $\bar{\chi} = \chi_0 / (\tau_0 c_\infty^2)$ . Уравнение (7) является биквадратным и имеет в общем случае четыре аналитических решения — по две звуковых и энтропийных мод колебаний, распространяющихся в противоположных направлениях от источника возмущений.

Закон дисперсии  $\bar{k}(\bar{\omega})$  линейных волн, описываемых уравнением (7), определяется значениями параметров:  $\gamma$ ,  $\bar{\mu}$ ,  $\bar{\chi}$ ,  $C_v$ ,  $S$ ,  $\tau_\rho$ ,  $\tau_T$ ,  $\Lambda_\rho$ ,  $\Lambda_T$ ,  $Q_\rho$  и  $Q_T$ . Оценим диапазоны значений этих параметров, при которых возможно развитие акустической неустойчивости и применима рассматриваемая модель VT-релаксации.

Во всех моделях, описывающих колебательно-поступательную релаксацию (VT-релаксацию) зависимость времени релаксации от плотности среды:  $\tau \propto \rho^{-1}$ , то есть  $\tau_\rho = -1$ . В реальных средах характерное время релаксационных процессов является сложной функцией температуры  $\tau(T)$ . Для конкретных газовых смесей зависимость  $\tau(T)$  определяется экспериментально и может быть аппроксимирована формулой Ландау — Теллера [2–5; 16; 20], а параметр  $\tau_T$  может изменяться в широком диапазоне значений (например, от -10 до 0) в зависимости от температуры и состава газовой смеси. В основном, модели колебательной релаксации строятся для многоатомных молекул (чаще всего для двух- и трехатомных, реже с большим количеством атомов), а с учетом одноатомных молекул в газовых смесях при нормальных условиях можно ограничиться следующими значениями показателя адиабаты  $\gamma \approx 1, 2 - 1, 5$  и коэффициентов вязкости и температуропроводности  $\bar{\mu} \sim \bar{\chi} \approx 10^{-6} - 10^{-4}$ . Величина удельной колебательной теплоемкости сильно зависит от отношения  $\theta_v/T$  и может изменяться в широком диапазоне значений  $C_v \approx 10^{-4} - 10^{-2}$ . Степень неравновесности среды  $S$  характеризует отклонение колебательной температуры от равновесной и при превышении некоторого критического значения может приводить к возникновению акустической неустойчивости. Для определенности ограничимся диапазоном  $S \approx 0 - 5$ , внутри которого заведомо находится это критическое значение для рассматриваемых параметров газовых сред.

Параметры  $Q_\rho$ ,  $Q_T$ ,  $\Lambda_\rho$  и  $\Lambda_T$ , определяющие законы нагрева и охлаждения газовых сред, также могут изменяться в широком диапазоне значений. Так, например, в модели оптически тонкого газового слоя, когда излучательная способность вещества определяется тепловым тормозным излучением (свободно-свободное излучение), имеем [15]:  $\Lambda(\rho, T) \propto \rho T^{1/2}$ , то есть  $\Lambda_\rho = 1$ ,  $\Lambda_T = 0, 5$ . В модели оптически толстого газового слоя функция охлаждения может быть аппроксимирована следующей зависимостью [15]:  $\Lambda(\rho, T) \propto \kappa^{-1} \rho^{-2} T^4$ , где  $\kappa(\rho, T)$  — непрозрачность слоя в общем случае, зависящая от плотности и температуры среды. В случае томсоновского рассеяния на электронах  $\kappa = \text{const}$  и соответственно  $\Lambda_\rho = -2$ ,  $\Lambda_T = 4$ . А для закона Крамерса  $\kappa \propto \rho T^{-7/2}$  имеем:  $\Lambda_\rho = -3$ ,  $\Lambda_T = 7, 5$ . Если рассматривать функцию нагрева  $Q(\rho, T)$  как нагрев внешним излучением, то можно использовать аналогичные модели, рассмотренные выше для охлаждения. Возможны и другие физические механизмы нагрева и охлаждения

газового слоя, включая нагрев электрическим и СВЧ-разрядом, для которых значения параметров  $Q_\rho$ ,  $Q_T$ ,  $\Lambda_\rho$  и  $\Lambda_T$  могут сильно варьироваться.

В качестве базовых значений безразмерных параметров линейной модели выберем следующие:  $\gamma = 1, 4$ ,  $\bar{\mu} = \bar{\chi} = 0$ ,  $C_v = 10^{-3}$ ,  $S = 1$ ,  $\tau_\rho = -1$ ,  $\tau_T = -2$ ,  $\Lambda_\rho = \Lambda_T = Q_\rho = Q_T = 0$ . Далее, если явно не указаны значения этих параметров, то принимаются их базовые значения.

## 2. Анализ решений дисперсионного уравнения

В рассматриваемом случае  $\bar{\mu} \ll 1$ ,  $\bar{\chi} \ll 1$  влияние вязкости и теплопроводности на закон дисперсии звуковых волн пренебрежимо мало и сводится, в основном, к уменьшению акустического инкремента ( $\alpha = -k_i$ ) в высокочастотной области спектра  $\bar{\omega} \gg 1$ . Поэтому, полагая в уравнении (7)  $\bar{\mu} = \bar{\chi} = 0$ , получим:

$$\bar{\omega}^2 = \bar{c}^2(\bar{\omega}) \bar{k}^2, \quad \text{где } \bar{c}^2 = \frac{\bar{\omega} A'_2 + i(B_2 - \bar{\omega}^2)}{\bar{\omega} A'_1 + i(B_1 - \bar{\omega}^2)}. \quad (8)$$

Если обозначить  $\bar{c} = \bar{c}_r + i \bar{c}_i$ , то из (8) можно выразить волновое число (для определенности выберем положительное направление распространения возмущений):

$$\bar{k} = \frac{\bar{\omega}}{\bar{c}'} - i \bar{\alpha}, \quad (9)$$

где  $\bar{c}' = \bar{c}_r + \bar{c}_i^2/\bar{c}_r$  — безразмерная фазовая скорость звуковых волн,  $\bar{\alpha} = \bar{\omega} \bar{c}_i / (\bar{c}_r^2 + \bar{c}_i^2)$  — безразмерный акустический инкремент (амплитуда звуковой волны нарастает при  $\bar{\alpha} > 0$ ). Для размерных значений фазовой скорости и акустического инкремента имеем:  $c' = \bar{c}' c_\infty$ ,  $\alpha = \bar{\alpha} / (\tau_0 c_\infty)$ .

Проанализируем решения дисперсионного уравнения (8) в нескольких предельных случаях. В высокочастотном пределе ( $\bar{\omega} \gg 1$ ) для фазовой скорости получаем  $\lim_{\bar{\omega} \rightarrow \infty} \bar{c}'(\bar{\omega}) = 1$  ( $c' \rightarrow c_\infty$ ), а для акустического инкремента имеем  $\lim_{\bar{\omega} \rightarrow \infty} \bar{\alpha}(\bar{\omega}) = \frac{A_2 - A_1}{2} = \bar{\alpha}_\infty$ , где

$$\bar{\alpha}_\infty = -\frac{\gamma_1}{2\gamma} \{ \gamma_1 C_v + S [\gamma_1 (\tau_T + \Lambda_T) + \tau_\rho + \Lambda_\rho] \}. \quad (10)$$

Из соотношения (10) можно определить критические значения степени неравновесности среды  $S_I$ , удовлетворяющее уравнению  $\bar{\alpha}_\infty(S_I) = 0$ :

$$S_I = \frac{\gamma_1 C_v}{\gamma_1 (-\tau_T - \Lambda_T) - \tau_\rho - \Lambda_\rho}. \quad (11)$$

При  $S > S_I$  ( $A_2 > A_1$ ) звуковые волны оказываются неустойчивыми  $\bar{\alpha}_\infty > 0$ . Выражение (11) является обобщением на случай произвольных законов охлаждения  $\Lambda(\rho, T)$  критерия устойчивости звуковых волн, полученного ранее в работах [6; 19].

Поскольку по определению  $C_v > 0$ , то положительное значение  $S_I$  в (11) можно получить только при выполнении условия  $\gamma_1 (-\tau_T - \Lambda_T) - \tau_\rho - \Lambda_\rho > 0$ , которое позволяет определить критическое значение  $\tau_T^*$  как функцию параметров  $\gamma$ ,  $\tau_\rho$ ,  $\Lambda_\rho$  и  $\Lambda_T$ :

$$\tau_T^* = -\frac{\tau_\rho + \Lambda_\rho}{\gamma - 1} - \Lambda_T. \quad (12)$$

При  $\tau_T < \tau_T^*$  звуковые волны могут быть неустойчивы в случае  $S > S_I$ , а для  $\tau_T > \tau_T^*$  акустическая неустойчивость не возникает при любых сколь угодно больших значениях неравновесности среды  $S$ .

Рассмотрим предел низкочастотного звука  $\bar{\omega} \ll 1$  в предположении  $Q = \text{const}$  и  $\Lambda = \text{const}$ , то есть  $Q_e = Q_T = \Lambda_e = \Lambda_T = 0$  ( $B_1 = B_2 = 0$ ). В работах [6; 19] наряду с величиной  $S_I$  были введены параметры  $S_{II}$  и  $S_{III}$ , которые разделяют области неравновесности среды с качественно различающимися законами акустической дисперсии. Выражения для этих параметров можно получить из уравнений  $A'_1 = 0$  и  $A'_2 = 0$ :

$$S_{II} = \frac{1 + \gamma_1 C_v}{-\gamma_1 \tau_T}, \quad S_{III} = \frac{\gamma + \gamma_1 C_v}{\gamma_1 (\tau_e - \tau_T)}. \quad (13)$$

Проанализируем поведение фазовой скорости звуковых волн  $c'(\bar{\omega})$  и акустического инкремента  $\bar{\alpha}(\bar{\omega})$  при различных значениях степени неравновесности среды  $S$ . Из решений дисперсионного уравнения (8) в низкочастотном пределе  $\bar{\omega} \ll 1$  при  $B_1 = B_2 = 0$  следует:

- 1)  $S_I \leq S < S_{II}$  ( $A'_1 > 0$ ,  $A'_2 > 0$ ,  $A'_2 > A'_1$ ) — акустический инкремент  $\bar{\alpha}(\bar{\omega}) \propto \bar{\omega}^2$ , а фазовая скорость при  $\bar{\omega} \rightarrow 0$  имеет конечный предел  $\bar{c}'_0 \equiv \bar{c}'(0) = \sqrt{A'_2/A'_1} > 1$  (отрицательная акустическая дисперсия);
- 2)  $S = S_{II}$  ( $A'_1 = 0$ ,  $A'_2 > 0$ ) —  $\bar{\alpha}(\bar{\omega}) \propto \bar{\omega}^{3/2}$ ,  $\bar{c}'(\bar{\omega}) \propto \bar{\omega}^{-1/2} \rightarrow \infty$ ;
- 3)  $S_{II} < S < S_{III}$  ( $A'_1 < 0$ ,  $A'_2 > 0$ ) —  $\bar{\alpha}(\bar{\omega}) \propto \bar{\omega}$ ,  $\bar{c}'(\bar{\omega}) \propto \bar{\omega}^{-1} \rightarrow \infty$ ;
- 4)  $S = S_{III}$  ( $A'_1 < 0$ ,  $A'_2 = 0$ ) —  $\bar{\alpha}(\bar{\omega}) \propto \bar{\omega}^{1/2}$ ,  $\bar{c}'(\bar{\omega}) \propto \bar{\omega}^{1/2} \rightarrow 0$ ;
- 5)  $S > S_{III}$  ( $A'_1 < 0$ ,  $A'_2 < 0$ ,  $|A'_2| < |A'_1|$ ) — акустический инкремент  $\bar{\alpha}(\bar{\omega}) \propto \bar{\omega}^2$ , а фазовая скорость при  $\bar{\omega} \rightarrow 0$  имеет конечный предел  $\bar{c}'_0 = \sqrt{|A'_2|/|A'_1|} < 1$  (положительная акустическая дисперсия).

Видно, что в случае  $S_{II} \leq S < S_{III}$  фазовая скорость низкочастотного звука становится аномально высокой и обращается в бесконечность при  $\bar{\omega} \rightarrow 0$ . Эти аномальные бесконечные значения  $\bar{c}'$  являются следствием нефизических («фантомных») решений дисперсионного уравнения (8), лежащих в области запрещенных частот. Для выделения физически корректных решений уравнения (8) и определения границ областей запрещенных частот введем наблюдаемые характеристики акустических волн — среднюю плотность волновой энергии  $E_s$  и ее потока  $F_s$ , а также скорость переноса энергии в звуковой волне (скорость звука)  $c_s$ :

$$E_s = \frac{c_\infty^2 \hat{\rho}^2}{2\rho_0} \text{Re}(\bar{c}^2), \quad F_s = \frac{c_\infty^3 \hat{\rho}^2}{2\rho_0} \text{Re}(\bar{c}^3), \quad c_s = \frac{F_s}{E_s} = c_\infty \frac{\text{Re}(\bar{c}^3)}{\text{Re}(\bar{c}^2)}. \quad (14)$$

Далее удобно пользоваться безразмерными величинами  $\bar{c}_s = c_s/c_\infty$ ,  $\bar{E}_s = \text{Re}(\bar{c}^2)$ ,  $\bar{F}_s = \text{Re}(\bar{c}^3)$ .

В рассматриваемом случае покоящейся среды и выбранного положительного направления распространения возмущений ( $k_r > 0$ ) величины  $E_s$  и  $F_s$  должны быть положительными, что позволяет сформулировать алгоритм выделения физически корректных решений (8):

- если одновременно выполняются условия  $\text{Re}(\bar{c}^2) > 0$  и  $\text{Re}(\bar{c}^3) > 0$ , то решения физически корректны, и скорость переноса энергии в звуковой волне (скорость звука) определяется по (14);

— в противном случае, когда  $\text{Re}(\bar{c}^2) < 0$  и/или  $\text{Re}(\bar{c}^3) < 0$ , то попадаем в область  $\Omega(\bar{\omega}, S)$  запрещенных частот («фантомных» решений), в которой звуковые волны распространяться не могут.

Для фиксированного значения  $S$  найдем неотрицательные вещественные корни уравнений  $\text{Re}(\bar{c}^2) = 0$  и  $\text{Re}(\bar{c}^3) = 0$ :

$$\bar{\omega}_E = \text{Re}\sqrt{-A'_1 A'_2} \geq 0, \quad \bar{\omega}_F = \text{Re} \left[ \frac{\bar{\alpha}_\infty}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{\frac{\bar{\alpha}_\infty^2}{3} - A'_1 A'_2} \right] \geq 0.$$

Минимальный и максимальный корни  $\bar{\omega}_F$  обозначим как  $\bar{\omega}_{F \min}$  и  $\bar{\omega}_{F \max}$  соответственно. Тогда область запрещенных частот  $\bar{\omega}_*$  определяется следующим неравенством:

$$\bar{\omega}_{F \min}(S) \leq \bar{\omega}_*(S) \leq \max[\bar{\omega}_E(S), \bar{\omega}_{F \max}(S)]. \quad (15)$$

На основе (15) были определены границы областей запрещенных частот на плоскости параметров  $(\bar{\omega}, S)$  при различных значениях  $\gamma$  и  $\tau_T$ , показанные на рисунке 1. С увеличением  $\gamma$  область  $\Omega$  опускается по оси  $S$  и расширяется по оси  $\bar{\omega}$ . При уменьшении параметра  $\tau_T$  происходит сжатие области запрещенных частот  $\Omega$ . Для сравнения на рисунке 1 показаны также уровни степени неравновесности  $S_{II}$  и  $S_{III}$ , которые пересекают область  $\Omega$  и демонстрируют наличие запрещенных частот  $\bar{\omega}_*$  при  $S < S_{II}$  и  $S > S_{III}$ .

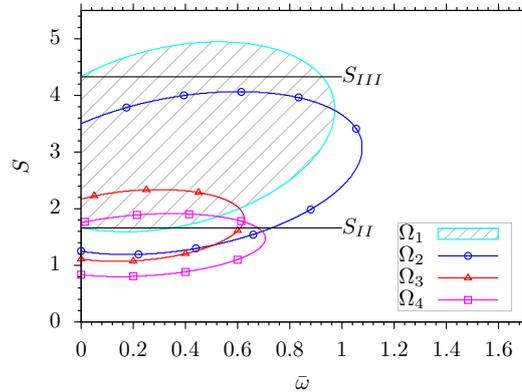


Рис. 1. Области  $\Omega$  ( $\bar{E}_s < 0$  и/или  $\bar{F}_s < 0$ ) запрещенных частот звуковых волн на плоскости параметров  $(\bar{\omega}, S)$  при различных значениях  $\gamma$  и  $\tau_T$ :

$$\begin{aligned} \Omega_1 - \gamma = 1, 3, \tau_T = -2; \Omega_2 - \gamma = 1, 4, \tau_T = -2; \\ \Omega_3 - \gamma = 1, 3, \tau_T = -3; \Omega_4 - \gamma = 1, 4, \tau_T = -3. \end{aligned}$$

Для зоны  $\Omega_1$  показаны уровни степени неравновесности, равные  $S_{II}$  и  $S_{III}$  из (13)

На рисунке 2, а показаны зависимости скорости звука (переноса энергии)  $\bar{c}_s$  и фазовой скорости  $\bar{c}'$  от частоты  $\bar{\omega}$  для трех значений степени неравновесности среды  $S = \{1, 2, 4\}$  при фиксированных значениях  $\gamma = 1, 4$  и  $\tau_T = -2$ . С учетом заданных параметров из (13) имеем:  $S_{II} \simeq 1, 25$  и  $S_{III} \simeq 3, 5$ . Анализ соотношения (15) при  $S = 1$  показывает отсутствие запрещенных частот. В этом случае хорошо видно, что в области сильной дисперсии ( $\bar{\omega} \sim 0, 1-1$ ) скорость звука  $\bar{c}_s$  оказывается меньше  $\bar{c}'$ , а когда дисперсия становится незначительной ( $\bar{\omega} \ll 1$  или  $\bar{\omega} \gg 1$ ), то  $\bar{c}_s \rightarrow \bar{c}'$ . При  $S = 2$  из (15) получаем следующий диапазон запрещенных частот  $0 \leq \bar{\omega}_* \lesssim 0, 89$ , а в случае

$S = 4$  имеем полосу запрещенных частот  $0,39 \leq \bar{\omega}_* \lesssim 0,8$ . Из рисунка 2, *a* видно, что с приближением к границам запрещенного диапазона частот скорость звука  $\bar{c}_s$  монотонно уменьшается до нуля. Область «фантомных» решений для фазовой скорости выделена на этом рисунке точечной линией.

Зависимости акустического инкремента  $\bar{\alpha}$  от частоты с выделенными точечными линиями участками запрещенных частот («фантомных» решений) представлены на рисунке 2, *b*. В модели без учета вязкости и теплопроводности ( $\bar{\mu} = \bar{\chi} = 0$ ) видно, что на частотах  $\bar{\omega} \gtrsim 10$  акустический инкремент достигает плато со значением равным  $\bar{\alpha}_\infty$ .

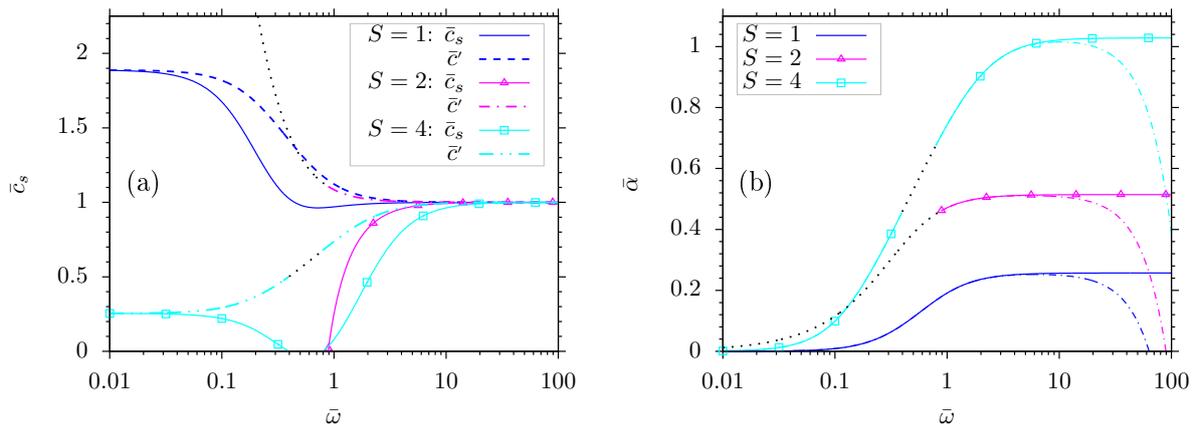


Рис. 2. Зависимости скорости переноса энергии в звуковой волне  $\bar{c}_s$  (*a*), фазовой скорости звука  $\bar{c}'$  (*a*) и акустического инкремента  $\bar{\alpha}$  (*b*) от частоты  $\bar{\omega}$  при различных значениях  $S$ .

Точечными линиями показаны нефизические («фантомные») решения, соответствующие запрещенным частотам на рисунке 1. Пунктирной линией на (*b*) показано влияние вязкости и теплопроводности ( $\bar{\mu} = \bar{\chi} = 10^{-4}$ ) на акустический инкремент в высокочастотной области спектра  $\bar{\omega} \gg 1$

Пунктирными линиями на этом рисунке продемонстрировано влияние вязкости и теплопроводности на неустойчивость звуковых волн, приводящее к стабилизации акустической неустойчивости в высокочастотной области спектра при  $\bar{\omega} > \bar{\omega}_{crit}$ . Для критической частоты  $\bar{\omega}_{crit}$  из полного дисперсионного уравнения (7) в предположении  $\bar{\alpha} \ll \bar{k}_r$  можно получить следующую оценку:

$$\bar{\omega}_{crit} \approx \sqrt{\frac{2 \bar{\alpha}_\infty}{\bar{\mu} + \bar{\chi} (1 - 1/\gamma)}}. \tag{16}$$

### 3. Влияние нагрева и охлаждения

Проанализируем влияние законов нагрева  $Q(\varrho, T)$  и охлаждения  $\Lambda(\varrho, T)$ , которые задаются значениями параметров  $(Q_\varrho, Q_T)$  и  $(\Lambda_\varrho, \Lambda_T)$ , на дисперсию звуковых волн и акустический инкремент. Для высокочастотного звука ( $\bar{\omega} \gg 1$ ) законы нагрева и охлаждения практически не оказывают никакого влияния на закон дисперсии  $\bar{c}'(\bar{\omega})$ , и при  $\bar{\omega} \rightarrow \infty$  получаем тот же предел для фазовой скорости  $\bar{c}' \rightarrow 1$  ( $c' \rightarrow c_\infty$ ) как и в случае постоянства нагрева и охлаждения. Из соотношений (10)–(12) следует, что на неустойчивость звуковых волн в высокочастотной области спектра законы нагрева  $(Q_\varrho, Q_T)$  не

вливают, а значения величин  $\bar{\alpha}_\infty$ ,  $S_\Lambda$  и  $\tau_T^*$  линейным образом зависят от параметров  $(\Lambda_\rho, \Lambda_T)$ .

Проанализируем поведение фазовой скорости звуковых волн  $c'(\bar{\omega})$  и акустического инкремента  $\bar{\alpha}(\bar{\omega})$  при произвольных законах нагрева  $(Q_\rho, Q_T)$  и охлаждения  $(\Lambda_\rho, \Lambda_T)$ . Из решений дисперсионного уравнения (8) в низкочастотном пределе  $\bar{\omega} \ll 1$  следует:

- 1)  $B_1 B_2 > 0$  — акустический инкремент  $\bar{\alpha}(\bar{\omega}) \propto \pm \bar{\omega}^2$ , а фазовая скорость при  $\bar{\omega} \rightarrow 0$  имеет конечный предел  $c'_0 = \sqrt{B_2/B_1}$ , и в случае  $|B_2| > |B_1|$  получаем отрицательную акустическую дисперсию  $c'_0 > 1$ ;
- 2)  $B_1 B_2 < 0$  —  $\bar{\alpha}(\bar{\omega}) \propto \pm \bar{\omega}$ ,  $c'(\bar{\omega}) \propto \bar{\omega}^{-1} \rightarrow \infty$ ;
- 3)  $B_1 B_2 = 0$  —  $\bar{\alpha}(\bar{\omega}) \propto \pm \bar{\omega}^{3/2}$ ,  $c'(\bar{\omega}) \propto \bar{\omega}^{1/2} \rightarrow 0$ .

Видно, что с учетом законов нагрева и охлаждения величины  $S_{II}$  и  $S_{III}$  теряют смысл, а в качестве параметров, разделяющих области неравновесности среды с качественно различающимися законами акустической дисперсии, теперь выступают коэффициенты  $B_1$  и  $B_2$ . При  $B_1 B_2 < 0$  фазовая скорость низкочастотного звука становится аномально высокой и обращается в бесконечность при  $\bar{\omega} \rightarrow 0$ , что является следствием нефизических («фантомных») решений дисперсионного уравнения (8), лежащих в области запрещенных частот. Аналогично разрешая уравнения  $\text{Re}(\bar{c}^2) = 0$  и  $\text{Re}(\bar{c}^3) = 0$  относительно частот  $\bar{\omega}_E$  и  $\bar{\omega}_F$  получим:

$$\bar{\omega}_E = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Re} \left[ -D \pm \sqrt{D^2 - 4B_1 B_2} \right]^{1/2} \geq 0,$$

$$\bar{\omega}_F^4 \mp \frac{2\bar{\alpha}_\infty}{\sqrt{3}} \bar{\omega}_F^3 + D \bar{\omega}_F^2 \pm \frac{A'_2 B_1 - A'_1 B_2}{\sqrt{3}} \bar{\omega}_F + B_1 B_2 = 0,$$

где  $D = (A'_1 A'_2 - B_1 - B_2)$ , из восьми корней  $\bar{\omega}_F$  выбираем только вещественные неотрицательные  $\bar{\omega}_{F1} \leq \bar{\omega}_{F2} \leq \bar{\omega}_{F3} \leq \bar{\omega}_{F4}$ . В общем случае для фиксированного значения  $S$  имеем две области запрещенных частот ( $\bar{\omega}_*$ ):

$$\bar{\omega}_{F1} \leq \bar{\omega}_* \leq \max[\bar{\omega}_{E1}, \bar{\omega}_{F2}], \quad \bar{\omega}_{F3} \leq \bar{\omega}_* \leq \max[\bar{\omega}_{E2}, \bar{\omega}_{F4}]. \quad (17)$$

На рисунке 3 показаны границы областей запрещенных частот  $\Omega$  на плоскости параметров  $(\bar{\omega}, S)$  при различных значениях  $\tau_T$ ,  $\Lambda_\rho$  и  $\Lambda_T$ , рассчитанные по (17) при фиксированных  $\gamma = 1, 4$  и  $Q_\rho = Q_T = 0$ . Области  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  соответствуют случаю  $B_1 B_2 < 0$ , а  $\Omega_3$  и  $\Omega_4$  — случаю  $B_1 B_2 > 0$ . Видно, что зоны  $\Omega_{1,2}$  прижаты к оси  $Oy$  ( $S$ ) и имеют только одну границу в низкочастотной области  $0 < \bar{\omega} < 1$ , которая при  $S \gg 1$  асимптотически становится параллельна оси  $Oy$ . При уменьшении параметра  $\tau_T$  происходит сжатие области запрещенных частот. Область  $\Omega_3$  ограничена как по частоте, так и по степени неравновесности ( $0,5 < \bar{\omega} < 2,5$  и  $1 < S < 5$ ). При фиксированном  $S$  эта зона имеет от двух до четырех (в окрестности изломов профиля) граничных значений частоты в соответствии с (17). С ростом параметра  $\Lambda_T$  (зона  $\Omega_4$ ) происходит быстрое расширение области запрещенных частот и смещение ее нижней границы в сторону больших значений параметров  $\bar{\omega}$  и  $S$ , а увеличение параметра  $\Lambda_\rho$  уменьшает этот эффект.

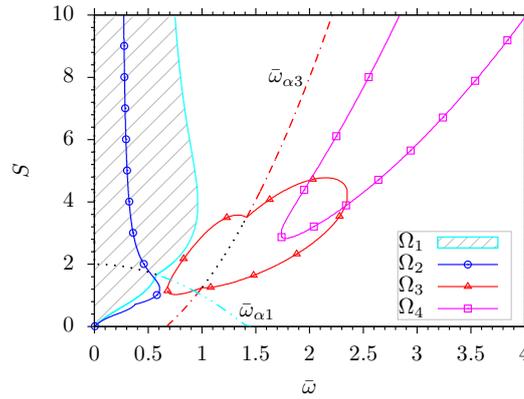


Рис. 3. Области  $\Omega$  запрещенных частот звуковых волн на плоскости параметров  $(\bar{\omega}, S)$  при различных значениях  $\tau_T, \Lambda_\rho$  и  $\Lambda_T$ :

$\Omega_1 - \tau_T = -2, \Lambda_\rho = 1$  и  $\Lambda_T = 0, 5$ ;  $\Omega_2 - \tau_T = -4, \Lambda_\rho = 1$  и  $\Lambda_T = 0, 5$ ;  
 $\Omega_3 - \tau_T = -4, \Lambda_\rho = 0$  и  $\Lambda_T = 2$ ;  $\Omega_4 - \tau_T = -4, \Lambda_\rho = 1$  и  $\Lambda_T = 4$ .

Пунктирными линиями показаны границы устойчивости (18) —  $\bar{\omega}_{\alpha 1}$  и  $\bar{\omega}_{\alpha 3}$ .

Точечными линиями показаны продолжения границ устойчивости  $\bar{\omega}_\alpha$  в зону запрещенных частот  $\Omega_1$  и  $\Omega_3$

Характерной особенностью зон  $\Omega_{1,2,3}$  является наличие излома профиля границы в одной или двух точках, в которых акустический инкремент  $\bar{\alpha}$  обращается в ноль. Соответственно, через эти точки проходит кривая  $\bar{\omega}_\alpha(S)$ , которая определяется из решения уравнения  $\bar{\alpha}(\bar{\omega}, S) = 0$ :

$$\bar{\omega}_\alpha = \text{Re} \sqrt{\frac{A'_2 B_1 - A'_1 B_2}{2 \bar{\alpha}_\infty}}. \tag{18}$$

Величина  $\bar{\omega}_\alpha(S)$  — граница акустической неустойчивости, которая разделяет области затухания  $\bar{\alpha}(\bar{\omega} < \bar{\omega}_\alpha) < 0$  и нарастания  $\bar{\alpha}(\bar{\omega} > \bar{\omega}_\alpha) > 0$  звуковых волн на плоскости параметров  $(\bar{\omega}, S)$ .

Качественно аналогичная картина распределения областей запрещенных частот  $\Omega$  и границ устойчивости  $\bar{\omega}_\alpha$  на плоскости параметров  $(\bar{\omega}, S)$  наблюдается и для различных моделей нагрева  $Q(\rho, T)$ , но только при отрицательных значениях параметров  $Q_\rho, Q_T$ , так как эти параметры входят в выражения для коэффициентов  $B_1$  и  $B_2$  с противоположным знаком по отношению к величинам  $\Lambda_\rho$  и  $\Lambda_T$ .

На рисунке 4 показаны зависимости скорости звука (переноса энергии)  $\bar{c}_s$  и акустического инкремента  $\bar{\alpha}$  от частоты  $\bar{\omega}$  для различных значений степени неравновесности среды  $S$ , моделей охлаждения  $(\Lambda_\rho, \Lambda_T)$  и релаксации  $(\tau_T)$ , рассмотренных при построении областей запрещенных частот  $\Omega$  на рисунке 3. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют моделям с областями запрещенных частот  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  при двух значениях параметра  $S = \{1, 4\}$ . В этом случае звуковые волны с частотами  $\bar{\omega} \leq \bar{\omega}_m$  ( $\bar{\omega}_m = \max[\bar{\omega}_{E1}, \bar{\omega}_{F2}]$ ) не могут распространяться в среде, так как при приближении к границе запрещенного диапазона частот  $\bar{\omega}_m$  скорость звука  $\bar{c}_s$  монотонно уменьшается до нуля (см. рис. 4, а). Соответственно для кривых 1, 2 и 3 имеем:  $\bar{\omega}_m \approx \{0.42, 0.97, 0.32\}$ . Кривые 4 и 5 соответствуют модели с областью запрещенных частот  $\Omega_3$ . При  $S = 1$  (кривая 4) акустические волны могут распространяться во всем диапазоне частот, а в случае  $S = 2$  (кривая 5) имеем полосу запрещенных частот  $0,79 \lesssim \bar{\omega}_* \lesssim 1,72$ . На рисунке 4, а для демонстрации аномального закона дисперсии в области запрещенных частот приведена

зависимость фазовой скорости  $\bar{c}'$  (кривая 6). Область «фантомных» решений выделена на этом рисунке точечной линией.

Зависимости акустического инкремента от частоты с выделенными точечными линиями участками запрещенных частот («фантомных» решений) представлены на рисунке 4 *b*. На кривых 1, 4 и 5 можно выделить области затухания и нарастания звуковых волн и определить границы акустической неустойчивости (18), равные соответственно  $\bar{\omega}_\alpha \approx \{1, 0, 94, 1, 15\}$ . Отметим, что для кривой 5 значение  $\bar{\omega}_\alpha$  лежит внутри запрещенного диапазона частот.

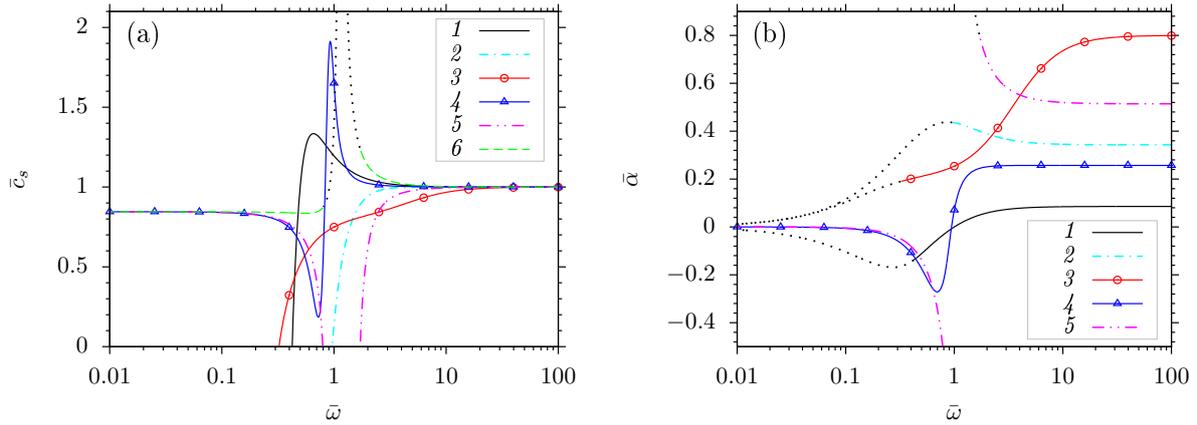


Рис. 4. Зависимости скорости звука  $\bar{c}_s$  (a) и акустического инкремента  $\bar{\alpha}$  (b) от частоты  $\bar{\omega}$  для различных моделей охлаждения ( $\Lambda_\rho$ ,  $\Lambda_T$ ), релаксации  $\tau_T$  и значений параметра  $S$ :

- 1 —  $\Lambda_\rho = 1$ ,  $\Lambda_T = 0,5$ ,  $\tau_T = -2$ ,  $S = 1$ ;
- 2 —  $\Lambda_\rho = 1$ ,  $\Lambda_T = 0,5$ ,  $\tau_T = -2$ ,  $S = 4$ ;
- 3 —  $\Lambda_\rho = 1$ ,  $\Lambda_T = 0,5$ ,  $\tau_T = -4$ ,  $S = 4$ ;
- 4 —  $\Lambda_\rho = 0$ ,  $\Lambda_T = 2$ ,  $\tau_T = -4$ ,  $S = 1$ ;
- 5 —  $\Lambda_\rho = 0$ ,  $\Lambda_T = 2$ ,  $\tau_T = -4$ ,  $S = 2$ .

Кривая 6 — фазовая скорость  $\bar{c}'$  для модели 5.

Точечными линиями показаны нефизические («фантомные») решения, соответствующие запрещенным частотам на рисунке 3 (области  $\Omega_{1,2,3}$ )

Из проведенного анализа решений дисперсионного уравнения (8) следует, что в случае  $Q_\rho = Q_T = \Lambda_\rho = \Lambda_T = 0$  акустический инкремент является монотонной функцией частоты в области  $\bar{\omega} \leq 1$ . Отличные от нуля значения параметров моделей нагрева и охлаждения оказывают сильное влияние на величину  $\bar{\alpha}$ , особенно в низкочастотной области и приводят к нарушению условия монотонности в окрестности  $0 \leq \bar{\omega} \leq 1$ . Акустический инкремент убывает с увеличением параметров  $\Lambda_\rho$ ,  $\Lambda_T$  и с уменьшением  $Q_\rho$ ,  $Q_T$ , причем функция  $\bar{\alpha}(\bar{\omega})$  является немонотонной и знакопеременной. Параметры  $Q_\rho$ ,  $Q_T$  влияют на акустический инкремент только в низкочастотной области спектра, а параметры  $\Lambda_\rho$ ,  $\Lambda_T$  — во всем диапазоне частот. Этот результат следует из соотношений (10) и (11).

### Заключение

Сформулируем основные результаты работы.

В линейном приближении получены волновое и дисперсионное уравнения, описы-

вающие динамику акустических волн в неравновесном колебательно-возбужденном газе. Эти уравнения записаны для вязкого теплопроводного газа и произвольных зависимостей времени VT-релаксации  $\tau$ , функций нагрева  $Q$  и охлаждения  $\Lambda$  от плотности и температуры.

Определены критерии для выделения физически корректных решений дисперсионного уравнения и областей запрещенных частот звуковых волн, в которых плотность волновой энергии  $E_s$  и/или скорость звука  $c_s$  (скорость переноса энергии в акустической волне) становятся отрицательными.

Показано, что динамика неустойчивых звуковых волн сильно зависит от степени неравновесности среды  $S$  и моделей времени релаксации  $\tau(\rho, T)$ , функций нагрева  $Q(\rho, T)$  и охлаждения  $\Lambda(\rho, T)$ . Получено, что аномально высокие значения фазовой скорости звука при  $\bar{\omega} \lesssim 1$  оказываются локализованы в зоне запрещенных частот и соответствуют «фантомным» (нефизичным) решениям дисперсионного уравнения. В моделях с функциями нагрева и охлаждения, зависящими от плотности и температуры полоса запрещенных частот может быть локализована в низкочастотной области спектра  $0 \leq \bar{\omega}_* \lesssim \bar{\omega}_{*max} \sim 1$  или в области частот  $0 < \bar{\omega}_{*min} \lesssim \bar{\omega}_* \lesssim \bar{\omega}_{*max} > 1$ .

Полученные в данной работе результаты могут быть использованы для подготовки начальных распределений газодинамических параметров, используемых в вычислительных экспериментах. А также позволят объяснить эффекты перестройки частоты при образовании системы ударно-волновых импульсов [12].

### ПРИМЕЧАНИЕ

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (РНФ) № 23-21-00401, <https://rscf.ru/project/23-21-00401/>.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Динамика малых возмущений в неравновесном колебательно-возбужденном газе / С. С. Храпов, Г. С. Иванченко, В. П. Радченко, И. С. Маковеев // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2023. — Т. 26, № 4. — С. 83–105. — DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2023.4.7
2. Каталог моделей физико-химических процессов 2. Процессы колебательно-го энергообмена / Э. А. Ковач, С. А. Лосев, А. Л. Сергиевская, Н. А. Храпак // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. — 2010. — Т. 10. — Article ID: <http://chemphys.edu.ru/issues/2010-10/articles/332>
3. Колебательная релаксация в газах и молекулярные лазеры / Б. Ф. Гордиец, А. И. Осипов, Е. В. Ступоченко, Л. А. Шелепин // Успехи физических наук. — 1972. — Т. 108. — С. 655–699. — DOI: 10.3367/UFN.0108.197212c.0655
4. Косарева, А. А. Диссоциация и колебательная релаксация в пространственно однородной смеси CO<sub>2</sub>/CO/O / А. А. Косарева, Е. А. Нагнибеда // Вестник СПбГУ. Серия 1. — 2016. — Т. 61, № 3. — С. 468–480.
5. Ландау, Л. Д. Собрание трудов / Л. Д. Ландау, Е. Теллер. — М. : Наука, 1969. — 181 с.
6. Макарян, В. Г. Структура слабых ударных волн в стационарно неравновесной среде / В. Г. Макарян, Н. Е. Молевич // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. — 2005. — Т. 3. — Article ID: <http://chemphys.edu.ru/issues/2005-3/articles/84>
7. Молевич, Н. Е. Автоволновой импульс в среде с дисбалансом между тепловыделением и теплоотводом при произвольной величине тепловой дисперсии / Н. Е. Молевич,

Д. С. Рящиков // Письма в Журнал технической физики. — 2020. — Т. 46, № 7. — С. 637–640.

8. Молевич, Н. Е. Вторая вязкость в термодинамически неравновесных средах / Н. Е. Молевич, А. Н. Ораевский // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1988. — Т. 94, № 3. — С. 128–132.

9. Молевич, Н. Е. Дисперсия скорости звука и вторая вязкость в средах с неравновесными химическими реакциями / Н. Е. Молевич // Акустический журнал. — 2003. — Т. 49, № 2. — С. 229–232.

10. Осипов, А. И. Кинетические и газодинамические процессы в неравновесной молекулярной физике / А. И. Осипов, А. В. Уваров // Успехи физических наук. — 1992. — Т. 162, № 11. — С. 1–42.

11. Храпов, С. С. Газодинамические неустойчивости в неравновесной химически активной среде / С. С. Храпов // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2024. — Т. 27, № 1. — С. 26–44. — DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2024.1.2

12. Храпов, С. С. Нелинейная динамика акустической неустойчивости в колебательно-возбужденном газе: влияние нагрева и охлаждения / С. С. Храпов // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. — 2023. — Т. 24, № 6. — Article ID: <http://chemphys.edu.ru/issues/2023-24-6/articles/1059/>

13. Храпов, С. С. Численное моделирование ударных волн в неравновесном химически активном газе / С. С. Храпов // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2024. — Т. 27, № 1. — С. 86–96. — DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2024.1.6

14. Численное моделирование акустической неустойчивости в неравновесном колебательно-возбужденном газе / С. С. Храпов, Г. С. Иванченко, В. П. Радченко, А. В. Титов // Журнал технической физики. — 2023. — Т. 93, № 12. — С. 1727–1731.

15. Шапиро, С. А. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. Ч. 2 / С. А. Шапиро, С. А. Тьюколски. — М.: Мир, 1985. — 400 с.

16. Разработка и апробация методики численного моделирования термически неравновесных диссоциирующих течений в ANSYS Fluent / Г. В. Шоев, Е. А. Бондарь, Г. П. Облапенко, Е. В. Кустова // Теплофизика и аэромеханика. — 2016. — Т. 23, № 2. — С. 159–171.

17. Kogan, E. Y. Sound Waves in a Nonequilibrium Molecular Gas / E. Y. Kogan, N. E. Molevich // Soviet Physics Journal. — 1986. — Vol. 29. — P. 547–551.

18. Lensky, N. G. Expansion Dynamics of Volatile-Supersaturated Liquids and Bulk Viscosity of Bubbly Magmas / N. G. Lensky, V. Lyakhovskiy, O. Navon // Journal of Fluid Mechanics. — 2002. — Vol. 460. — P. 39–56.

19. Makaryan, V. G. Stationary Shock Waves in Nonequilibrium Media / V. G. Makaryan, N. E. Molevich // Plasma Sources Science and Technology. — 2007. — Vol. 16, № 1. — P. 124–131.

20. Millikan, R. C. Systematics of Vibrational Relaxation / R. C. Millikan, D. R. White // Journal of Chemical Physics. — 1963. — Vol. 39, iss. 12. — P. 3209–3213. — DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1734182>

21. Overstability of Acoustic Waves in Heat-Releasing Gaseous Media / D. I. Zavershinskiy, N. E. Molevich, S. Belov, D. Riashchikov // AIP Conference Proceedings. — 2020. — Vol. 2304, № 1. — Article ID: 020028. — DOI: 10.1063/5.0034849

## REFERENCES

1. Khrapov S.S., Ivanchenko G.S., Radchenko V.P., Makoveev I.S. Dinamika mal'kikh vozmushcheniy v neravnovesnom kolebatelno-vozbuzhdennom gaze [Dynamics of Small Perturbations in a Nonequilibrium Vibrationally Excited Gas]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2023, vol. 26, no. 4, pp. 83–105. DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2023.4.7

2. Kovach E.A., Losev S.A., Sergievskaya A.L., Khrapak N.A. Katalog modeley fiziko-khimicheskikh protsessov 2. Protsessy kolebatelnogo energoobmena [Catalogue of

Models of Physical and Chemical Processes. Part 2. Vibrational Energy Exchange Processes]. *Fiziko-khimicheskaya kinetika v gazovoy dinamike*, 2010, vol. 10, article ID: <http://chemphys.edu.ru/issues/2010-10/articles/332>

3. Gordiets B.F., Osipov A.I., Stupochenko E.V., Shelepin L.A. Kolebatelnaya relaksatsiya v gazakh i molekulyarnye lazery [Vibrational Relaxation in Gases and Molecular Lasers]. *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 1972, vol. 108, pp. 655-699. DOI: 10.3367/UFNr.0108.197212c.0655

4. Kosareva A.A., Nagnibeda E.A. Dissotsiatsiya i kolebatelnaya relaksatsiya v prostranstvenno odnorodnoy smesi CO<sub>2</sub>/CO/O [Dissociation and Vibrational Relaxation in a Spatially Homogeneous Mixture CO<sub>2</sub>/CO/O]. *Vestnik SPbGU. Seriya 1*, 2016, vol. 61, no. 3, pp. 468-480.

5. Landau L.D., Teller E. *Sobranie trudov* [Collection of Works]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 181 p.

6. Makaryan V.G., Molevich N.E. Struktura slabykh udarnykh voln v statsionarno neravnesnoy srede [Weak Shock Waves in Negative-Dispersion Nonequilibrium Media]. *Fiziko-khimicheskaya kinetika v gazovoy dinamike*, 2005, vol. 3, article ID: <http://chemphys.edu.ru/issues/2005-3/articles/84>

7. Molevich N.E., Ryashchikov D.S. Avtovolnovoy impuls v srede s disbalansom mezhdru teplovydeleniem i teplotvodom pri proizvolnoy velichine teplovoy dispersii [Autowave Pulse in a Medium with the Heating/Cooling Misbalance and an Arbitrary Thermal Dispersion]. *Pisma v Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, 2020, vol. 46, no. 7, pp. 637-640.

8. Molevich N.E., Oraevskiy A.N. Vtoraya vyazkost v termodinamicheski neravnesnykh sredakh [The Second Viscosity in Thermodynamically Nonequilibrium Media]. *Zhurnal eksperimentalnoy i teoreticheskoy fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 1988, vol. 94, no. 3, pp. 128-132.

9. Molevich N.E. Dispersiya skorosti zvuka i vtoraya vyazkost v sredakh s neravnesnymi khimicheskimi reaktsiyami [Sound Velocity Dispersion and Second Viscosity in Media with Nonequilibrium Chemical Reactions]. *Akusticheskiy zhurnal* [Acoustical Physics], 2003, vol. 49, no. 2, pp. 229-232.

10. Osipov A.I., Uvarov A.V. Kineticheskie i gazodinamicheskie protsessy v neravnesnoy molekulyarnoy fizike [Kinetic and Gas Dynamic Processes in Nonequilibrium Molecular Physics]. *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Soviet Physics Uspekhi], 1992, vol. 162, no. 11, pp. 1-42.

11. Khrapov S.S. Gazodinamicheskie neustoychivosti v neravnesnoy khimicheski aktivnoy srede [Gas-Dynamic Instabilities in a Nonequilibrium Chemically Active Medium]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2024, vol. 27, no. 1, pp. 26-44. DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2024.1.2

12. Khrapov S.S. Nelineynaya dinamika akusticheskoy neustoychivosti v kolebatelno-vozbuzhdennoy gaze: vliyanie nagreva i okhlazhdeniya [Nonlinear Dynamics of Acoustic Instability in a Vibrationally Excited Gas: Influence of Heating and Cooling]. *Fiziko-khimicheskaya kinetika v gazovoy dinamike*, 2023, vol. 24, no. 6, article ID: <http://chemphys.edu.ru/issues/2023-24-6/articles/1059/>

13. Khrapov S.S. Chislennoe modelirovanie udarnykh voln v neravnesnom khimicheski aktivnom gaze [Numerical Modeling of Shock Waves in a Nonequilibrium Reactive Gas]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2024, vol. 27, no. 1, pp. 86-96. DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2024.1.6

14. Khrapov S.S., Ivanchenko G.S., Radchenko V.P., Titov A.V. Chislennoe modelirovanie akusticheskoy neustoychivosti v neravnesnom kolebatelno-vozbuzhdennoy gaze [Numerical Simulation of Acoustic Instability in a Nonequilibrium Vibrationally Excited Gas]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki* [Technical Physics], 2023, vol. 93, no. 12, pp. 1727-1731.

15. Shapiro S.A., Tyukolski S.A. *Chernye dyry, belye karliki i neytronnyye zvezdy. Ch. 2* [Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars. Vol. 2]. Moscow, Mir Publ., 1985. 400 p.

16. Shoev G.V., Bondar E.A., Oblapenko G.P., Kustova E.V. Razrabotka i aprobatsiya metodiki chislennogo modelirovaniya termicheski neravnesnykh dissotsiiruyushchikh techeniy v ANSYS Fluent [Development and Testing of a Numerical Simulation Method for Thermally Nonequilibrium Dissociating Flows in Ansys Fluent]. *Teplofizika i aeromekhanika*

[Thermophysics and Aeromechanics], 2016, vol. 23, no. 2, pp. 159-171.

17. Kogan E.Y., Molevich N.E. Sound Waves in a Nonequilibrium Molecular Gas. *Soviet Physics Journal*, 1986, vol. 29, pp. 547-551.

18. Lensky N.G., Lyakhovsky V., Navon O. Expansion Dynamics of Volatile-Supersaturated Liquids and Bulk Viscosity of Bubbly Magmas. *Journal of Fluid Mechanics*, 2002, vol. 460, pp. 39-56.

19. Makaryan V.G., Molevich N.E. Stationary Shock Waves in Nonequilibrium Media. *Plasma Sources Science and Technology*, 2007, vol. 16, no. 1, pp. 124-131.

20. Millikan R.C., White D.R. Systematics of Vibrational Relaxation. *Journal of Chemical Physics*, 1963, vol. 39, iss. 12, pp. 3209-3213. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1734182>

21. Zavershinskiy D.I., Molevich N.E., Belov S., Riashchikov D. Overstability of Acoustic Waves in Heat-Releasing Gaseous Media. *AIP Conference Proceedings*, 2020, vol. 2304, no. 1, article ID: 020028. DOI: 10.1063/5.0034849

## LINEAR DYNAMICS OF ACOUSTIC INSTABILITY IN A NONEQUILIBRIUM GAS: STABILITY BOUNDARIES AND FORBIDDEN FREQUENCY REGIONS

**Sergey S. Khrapov**

Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,  
Department of Information Systems and Computing Modeling,  
Volgograd State University  
khrapov@volsu.ru  
<https://orcid.org/0000-0003-2660-2491>  
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

**Abstract.** The dynamics of small disturbances in a nonequilibrium vibrationally excited gas is considered. The wave and dispersion equations are obtained, describing the dynamics of acoustic modes in the linear approximation. The criteria for identifying physically correct solutions of the dispersion equation and determining the boundaries of the regions of forbidden frequencies of acoustic waves are formulated. These criteria allow us to exclude from consideration the regions of non-physical (“phantom”) solutions, in which the phase velocity of sound can become abnormally high and at certain frequencies turn to infinity. The dispersion properties of unstable sound waves are studied in detail, estimates of the increment are obtained, and the stability boundaries and zones of forbidden frequencies are determined depending on the degree of nonequilibrium of the medium, models of relaxation, heating and cooling. It is shown that at certain values of the degree of nonequilibrium of the medium and the dependence of the relaxation time and the cooling function on temperature and density, sound waves in a vibrationally excited gas are unstable. In this case, the acoustic increment reaches its maximum when the period of sound waves  $\tau_s$  is comparable with the relaxation time  $\tau$ , and in the high-frequency region of the spectrum  $\tau_s \lesssim \tau$ , due to viscosity and thermal conductivity, stabilization of acoustic instability occurs.

**Key words:** nonequilibrium gas, vibrational relaxation, relaxation time, acoustic instability, speed of sound, forbidden frequencies, heating and cooling.