

DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2025.1.1>УДК 517.5
ББК 22.162Дата поступления статьи: 31.01.2025
Дата принятия статьи: 05.02.2025

НЕРАВЕНСТВО ЙЕНСЕНА КАК КРИТЕРИЙ ВЫПУКЛОСТИ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ

Владимир Александрович Клячин

Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой
компьютерных наук и экспериментальной математики,
Волгоградский государственный университет
klehny@mail.ru, klyachin.va@volsu.ru
<https://orcid.org/0000-0003-1922-7849>
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Многие неравенства математики могут быть выведены из нескольких базовых неравенств. К таким неравенствам относится классическое интегральное неравенство Йенсена, применяемое для получения разнообразных оценок интегралов функций, принадлежащих различным классам. Например, частный случай интегрального неравенства Гельдера для функций класса L^p , $p \geq 1$ может быть получен как следствие неравенства Йенсена, откуда легко выводится вложение пространств $L^q \subset L^p$, $1 \leq q \leq p$. В терминах вероятностной меры неравенство Йенсена утверждает, что значение выпуклой вниз функции в точке математического ожидания векторной случайной величины ξ не превосходит математического ожидания этой выпуклой функции от случайной величины ξ : $f(\mathbb{E}\xi) \leq \mathbb{E}f(\xi)$. В настоящей статье доказывается, что если неравенство Йенсена выполняется для непрерывной функции f для любого симплекса, то функция f является выпуклой вниз. В статье вводится понятие дефекта выпуклости непрерывной функции, так, что он является отрицательным для выпуклых функций. Используя линейные свойства дефекта выпуклости, доказан интегральный признак δ -выпуклости непрерывной функции. Он утверждает, что если дефект выпуклости не превосходит квадратичной функции от диаметра симплекса, то функция δ -выпукла. Из этого признака получается интегральное условие дважды почти всюду дифференцируемости непрерывной функции.

Ключевые слова: выпуклые функции, неравенство Йенсена, геометрический центр, весовой центр масс, δ -выпуклые функции.

Пусть в $\mathbb{R}^n, n \leq 1$ определена локально суммируемая функция $w(x) \geq 0$, причем множество $\{x : w(x) = 0\}$ нигде не плотно. Для измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ определим величину

$$|A|_w = \int_A w(x) dx.$$

Функцию w можно рассматривать как плотность распределения массы. Соответственно можно определить *весовой центр масс* множества A

$$x_w^A = \frac{1}{|A|_w} \int_A xw(x) dx.$$

В случае $w(x) \equiv \text{const}$ точка x_w^A представляет собой обычный геометрический центр множества A .

Классическое интегральное неравенство Йенсена утверждает, что для выпуклой вниз функции $f : D \subset \mathbb{R}^n$ выполнено

$$f(x_w^A) = f\left(\frac{1}{|A|_w} \int_A xw(x) dx\right) \leq \frac{1}{|A|_w} \int_A f(x)w(x) dx. \quad (1)$$

Мы доказываем, что если это неравенство для непрерывной функции выполняется для всякого симплекса $A = S \subset D$, то функция f – выпукла вниз. Заметим, что дискретный аналог неравенства Йенсена [5] эквивалентен определению выпуклости функции. В случае интегрального неравенства этот факт не является очевидным, по крайней мере в одну сторону. Также отметим ряд работ [2; 3; 6], которые посвящены тем или иным вопросам, связанным с исследованием выпуклых функций и неравенств с ними. Стоит также отметить, что неравенство (1) было положено в основу определения классов квазивыпуклых и поливыпуклых функций, имеющих важное значение для разрешимости краевых задач о равновесном состоянии гиперупругого тела [4; 7; 8].

Лемма 1. Для функции вида $f(x) = \langle a, x \rangle + b$ имеет место равенство

$$f(x_w^A) = \frac{1}{|A|_w} \int_A f(x)w(x) dx.$$

Доказательство. Нужно получается прямым вычислением

$$\begin{aligned} f(x_w^A) &= \langle a, \frac{1}{|A|_w} \int_A xw(x) dx \rangle + b = \\ &= \frac{1}{|A|_w} \int_A (\langle a, x \rangle + b)w(x) dx = \frac{1}{|A|_w} \int_A f(x)w(x) dx. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Предположим, что для всякого отрезка $I \subset [a, b]$ задана непрерывная функция $w_I(x) \geq 0, x \in I$. Мы предполагаем, что функция $w_I(x)$ непрерывно зависит от концов отрезка I .

Лемма 2. Непрерывная функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, является выпуклой вниз тогда и только тогда, когда для всякого отрезка $I = [x, y] \subset [a, b]$ выполнено

$$f(x_{w_I}^I) \leq \frac{1}{|I|_{w_I}} \int_x^y f(t) w_I(t) dt.$$

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ выпукла вниз на отрезке $[a, b]$. Тогда найдется такое число A , что всюду на $[a, b]$ будет выполнено неравенство

$$f(t) \geq f(x_{w_I}^I) + A(t - x_{w_I}^I).$$

Умножая обе части этого неравенства на $w_I(t)$, интегрируя его по отрезку I и применяя лемму 1, получаем требуемое.

Докажем обратное утверждение. Напомним, что функция $f(x)$ будет выпуклой на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда для произвольных $[x, y] \subset [a, b]$, $z \in [x, y]$ будет выполнено неравенство

$$f(z) \leq f(x) + \frac{z - x}{y - x} (f(y) - f(x)).$$

Предположим противное. Именно, найдется точка $z_0 \in [x, y]$ такая, что

$$f(z_0) > f(x) + \frac{z_0 - x}{y - x} (f(y) - f(x)).$$

Положим

$$h(t) = f(t) - f(x) - \frac{t - x}{y - x} (f(y) - f(x)).$$

Заметим, что в силу леммы 1 для функции $h(t)$ также выполнено условие доказываемой леммы. Поскольку $h(z_0) > 0$, $h(x) = 0$, $h(y) = 0$ и функция $h(t)$ непрерывна, то в некоторой точке z^* она достигает своего положительного максимума.

Пусть $\delta > 0$, $\delta_1, \delta_2 \geq 0$ такие, что $\delta_1 + \delta_2 = \delta$ и $h(t) > 0$, $t \in (z^* - \delta_1, z^* + \delta_2)$. Пусть $I = [z^* - \delta_1, z^* + \delta_2]$ и

$$z_I = \frac{1}{|I|_{w_I}} \int_I t w_I(t) dt.$$

Из соображений непрерывности ясно, что для каждого δ найдется такое δ_1 , что $z_I = z^*$. Действительно, при $\delta_1 = 0$ точка z_I лежит справа от z^* , а при $\delta_2 = 0$ точка z_I лежит слева от z^* . Точка z_I непрерывно зависит от концов отрезка I . Поэтому при заданном δ найдется требуемое δ_1 . В силу условия леммы

$$h(z^*) = h(z_I) \leq \frac{1}{|I|_{w_I}} \int_I h(t) w_I(t) dt \leq h(z^*).$$

Это возможно только если $h(t) \equiv h(z^*)$ на $[z^* - \delta_1, z^* + \delta_2]$. Увеличивая значение $\delta > 0$, можно подобрать такое δ , что $h(z^* - \delta_1) = 0$ или $h(z^* + \delta_2) = 0$. Откуда будет следовать $h(z^*) = 0$. Полученное противоречие доказывает лемму окончательно.

Будем предполагать, что для всякого n -мерного симплекса $S \subset D$ задана непрерывная функция $w_S(x) \geq 0$, $x \in S$, непрерывно зависящая от вершин симплекса S .

Теорема 1. Непрерывная функция $f(x)$, заданная в области $D \subset \mathbb{R}^n, n \geq 1$, выпукла вниз тогда и только тогда, когда для любого n -мерного симплекса $S \subset D$ выполнено

$$f(x_{w_S}^S) \leq \frac{1}{|S|_{w_S}} \int_S f(t) w_S(t) dt. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ выпукла вниз в D . Рассмотрим произвольный n -мерный симплекс $S \subset D$. Из выпуклости функции $f(x)$ следует, что найдется такой вектор $a \in \mathbb{R}^n$, что для каждой точки $x \in D$ будет выполнено неравенство (см., например, [5])

$$f(x) \geq f(x_S) + \langle a, x - x_S \rangle.$$

Умножая обе части этого неравенства на весовую функцию $w_S(x)$ и применяя лемму 1, получим (2).

Докажем обратное. Пусть для всякого симплекса $S \subset D$ выполнено (2). Сперва мы покажем, что аналогичное неравенство будет выполнено для любого $(n-1)$ -мерного симплекса $\Delta \subset D$. Пусть e – вектор нормали гиперплоскости симплекса Δ . Выберем $H > 0$ так, чтобы симплекс S с вершиной в точке $v = x_{w_S}^\Delta + H \cdot e$ и основанием Δ лежал в области D .

Точки $x \in S$ будем записывать парой (x', t) , где t равно расстоянию от точки x до гиперплоскости симплекса Δ . Введем функцию $\varphi_H(x')$, являющуюся кусочно-линейной в Δ , принимающую нулевое значение в вершинах симплекса Δ и такую, что

$$\varphi_H(x_{w_S}^\Delta) = H.$$

Легко заметить, что по построению имеет место равенство $\varphi_H(x) = H\varphi_1(x)$. По формуле Кронрода – Федерера имеем

$$\begin{aligned} \int_S f(x) w_S(x) dx &= \int_\Delta dx' \int_0^{\varphi_H(x')} f(x', t) w_S(x', t) dt = \\ &= H \int_\Delta dx' \int_0^{\varphi_1(x')} f(x', H\tau) w_S(x', H\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Поступая аналогично, вычислим следующие интегралы:

$$\begin{aligned} |S|_{w_S} &= \int_S w_S(x) dx = H \int_\Delta dx' \int_0^{\varphi_1(x')} w_S(x', H\tau) d\tau, \\ x_S^{w_S} &= \frac{1}{|S|_{w_S}} \int_S x w_S(x) dx = \frac{H}{|S|_{w_S}} \int_\Delta dx' \int_0^{\varphi_1(x')} x w_S(x', H\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Из этих соотношений и из условий теоремы, полагая $H \rightarrow 0$, будем иметь

$$x^* = \lim_{H \rightarrow 0} x_S^{w_S} = \left(\int_\Delta w_S(x', 0) \varphi_1(x') x' dx' \right) \left(\int_\Delta w_S(x', 0) \varphi_1(x') dx' \right)^{-1},$$

$$f(x^*) \leq \left(\int_{\Delta} w_S(x', 0) \varphi_1(x') f(x', 0) dx' \right) \left(\int_{\Delta} w_S(x', 0) \varphi_1(x') dx' \right)^{-1}.$$

Таким образом, для всякого $(n-1)$ -мерного симплекса $\Delta \subset D$ выполнено условие теоремы 1 с функцией

$$w_{\Delta}(x') = w(x', 0) \varphi_1(x').$$

Понижая размерность симплексов и используя лемму 2, мы покажем, что функция $f(x)$ будет выпуклой вниз на произвольном отрезке $I \subset D$. Это и будет означать, что функция $f(x)$ выпукла в D . Теорема доказана.

Определение. Величину

$$d_f(S) = f(x_S^{w_S}) - \frac{1}{|S|_{w_S}} \int_S f(x) w_S(x) dx$$

назовем дефектом выпуклости непрерывной функции f .

Из доказанной теоремы следует, что непрерывная функция $f(x)$ будет выпуклой тогда и только тогда, когда ее дефект выпуклости $d_f(S) \leq 0$ на любом симплексе $S \subset D$.

Ясно, что для любых двух непрерывных функций f_1, f_2 и любых чисел λ_1, λ_2 имеет место равенство

$$d_{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2}(S) = \lambda_1 d_{f_1}(S) + \lambda_2 d_{f_2}(S).$$

Отсюда получаем следующий факт. Если для непрерывной функции $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ и выпуклой вниз функции $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$d_f(S) \leq -d_g(S)$$

для любого симплекса $S \subset D$, то функция $f + g$ выпукла вниз, а функция f имеет почти всюду полный дифференциал. В качестве g рассмотрим квадратичную функцию вида

$$g(x) = \langle Bx, x \rangle,$$

где B – симметричная, положительно определенная матрица.

Следствие 1. Пусть непрерывная функция $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ для любого симплекса $S \subset D$ удовлетворяет неравенству

$$f(x_S^{w_S}) \leq \frac{1}{|S|_{w_S}} \int_S f(x) w_S(x) dx + \frac{1}{|S|_{w_S}} \int_S \langle B(x - x_S^{w_S}), x - x_S^{w_S} \rangle w_S(x) dx,$$

Тогда функция

$$f(x) + \langle Bx, x \rangle$$

выпукла вниз.

Доказательство. Вычислим дефект выпуклости функции $g(x) = \langle Bx, x \rangle$. Имеем

$$d_g(S) = g(x_S^{w_S}) - \frac{1}{|S|_{w_S}} \int_S g(x) w_S(x) dx = \langle Bx_S^{w_S}, x_S^{w_S} \rangle - \frac{1}{|S|_{w_S}} \int_S \langle Bx, x \rangle w_S(x) dx =$$

$$= \langle Bx_S^{w_S}, x_S^{w_S} \rangle - \frac{1}{|S|_{w_S}} \int_S \langle B(x - x_S^{w_S}), x - x_S^{w_S} \rangle w_S(x) dx - \\ - 2 \frac{1}{|S|_{w_S}} \int_S \langle Bx, x_S^{w_S} \rangle w_S(x) dx + \langle Bx_S^{w_S}, x_S^{w_S} \rangle.$$

Функция $\langle Bx, x_S^{w_S} \rangle$ линейна, поэтому, используя лемму 1, получаем окончательно

$$d_g(S) = -\frac{1}{|S|_{w_S}} \int_S \langle B(x - x_S^{w_S}), x - x_S^{w_S} \rangle w_S(x) dx.$$

Таким образом, в силу условия следствия, имеем $d_{f+g}(S) \leq 0$ и из теоремы 1 получаем требуемое свойство выпуклости.

Как и выше, предполагаем, что для каждого симплекса $S \subset D$ задана неотрицательная функция $w_S(x)$, $x \in S$. Пусть $e_i, i = 1, \dots, n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Построим аффинное отображение $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что

$$A(0) = p_0, \quad A(e_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Обозначим через G матрицу этого отображения. Положим $u^* \in \mathbb{R}^n$ такое, что $A(u^*) = x_S^{w_S}$. Обозначим через Δ симплекс с вершинами в точках $0, e_1, \dots, e_n$. Ясно, что $S = A(\Delta)$. Обозначим через m_{ij} величины

$$m_{ij} = \left(\int_{\Delta} (u - u^*)_j (u - u^*)_j w_S(Au) du \right) \left(\int_{\Delta} w_S(Au) du \right)^{-1}.$$

Ясно, что эти величины являются элементами симметричной, положительно определенной матрицы M . Пусть $\mu(S)$ — минимальное собственное число этой матрицы. Положим

$$\mu = \inf_{S \subset D} \mu(S).$$

Легко заметить, что если найдутся положительные числа $0 < w_0 \leq w_1$ такие, что

$$w_0 \leq w_S(x) \leq w_1, \quad \forall x \in S,$$

то имеет место оценка

$$\mu \geq \mu_n \frac{w_0}{w_1}$$

с постоянной $\mu_n > 0$, зависящей только от n .

Лемма 3. Предположим, что $\mu > 0$. Тогда для любого симплекса $S \subset D$ будет выполнено

$$\frac{1}{|S|_{w_S}} \int_S |x - x_S^{w_S}|^2 w_S(x) dx \geq \mu (\text{diam}(S))^2.$$

Доказательство. Выполним замену $x = Au$ в интеграле

$$\int_S |x - x_S^{w_S}|^2 w_S(x) dx = \det G \int_{\Delta} |G(u - u^*)|^2 w_S(Au) du.$$

Положим

$$|\Delta|_{w_S} = \int_{\Delta} w_S(Au) du.$$

Поскольку $|S|_{w_S} = \det G \cdot |\Delta|_{w_S}$, то получаем

$$\frac{1}{|S|_{w_S}} \int_S |x - x_S^{w_S}|^2 w_S(x) dx = \frac{1}{|\Delta|_{w_S}} \int_{\Delta} |G(u - u^*)|^2 w_S(Au) du.$$

Положим $Q = G^T G$. Тогда

$$\int_{\Delta} |G(u - u^*)|^2 w_S(Au) du = \int_{\Delta} \langle Q(u - u^*), u - u^* \rangle w_S(Au) du.$$

Имеем

$$\int_{\Delta} \langle Q(u - u^*), u - u^* \rangle w_S(Au) du = \operatorname{tr}(QM) \frac{1}{|\Delta|_{w_S}}.$$

Заметим, что по построению отображения A имеют место равенства

$$G(e_i) = p_i - p_0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно, i -й столбец матрицы G – это в точности координаты вектора $p_i - p_0$. Но тогда элементами q_{ij} симметричной матрицы $G^T G$ являются скалярные произведения

$$q_{ij} = \langle p_i - p_0, p_j - p_0 \rangle.$$

Пусть вектор $p_i - p_0$ имеет координаты $p_i^k - p_0^k$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_S |x - x_S^{w_S}|^2 w_S(x) dx &= \\ &= \operatorname{tr}(QM) = \sum_{i,j=1}^n q_{ij} m_{ij} = \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^n (p_i^k - p_0^k)(p_j^k - p_0^k) m_{ij} = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^n (p_i^k - p_0^k)(p_j^k - p_0^k) m_{ij} \geq \\ &\geq \mu(S) \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n (p_i^k - p_0^k)^2 = \mu(S) \sum_{i=1}^n |p_i - p_0|^2 \geq \mu \cdot \operatorname{diam}^2(S). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Напомним, непрерывная функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ называется δ -выпуклой, если она является разностью двух выпуклых функций.

Теорема 2. Предположим, что найдется постоянная $\lambda \geq 0$, такая, что для всякого симплекса $S \subset D$ выполнено неравенство

$$f(x_S^{w_S}) \leq \frac{1}{|S|_{w_S}} \int_S f(x) w_S(x) dx + \lambda \cdot \operatorname{diam}^2(S).$$

Тогда функция f является δ -выпуклой.

Доказательство. Положим $\langle Bx, x \rangle = \lambda \mu^{-1} |x|^2$. Тогда, согласно лемме 3, будут выполнены условия следствия теоремы 1. Из этого следствия заключаем, что функция $f(x) + \lambda \mu^{-1} |x|^2$ является выпуклой вниз, а, значит, функция f является δ -выпуклой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Водопьянов, С. К. Вариационные задачи нелинейной теории упругости в некоторых классах отображений с конечным искажением / С. К. Водопьянов, А. О. Молчанова // Докл. РАН. — 2015. — Т. 465, № 5. — С. 523–526.
2. Войтицкий, В. И. Средние функциональные величины набора действительных чисел, их сравнение и свойства / В. И. Войтицкий // Матем. сб. — 2017. — Т. 84, № 4. — С. 12–19.
3. Волченкова, И. В. Новые неравенства, связанные со свойством выпуклости, характеристика функций распределения вероятностей, а также свободные от распределения критерии / И. В. Волченкова, Л. Б. Клебанов // Вероятность и статистика. — 2018. — Т. 27, № 474. — С. 63–76.
4. Кузьмин, В. В. Расчет 3D-формы гиперупругого тела для моделей нелинейной теории упругости методом Ньютона / В. В. Кузьмин // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2024. — Т. 26, № 2. — С. 80–91. — DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2024.2.7>
5. Лехтвейс, К. Выпуклые множества / К. Лехтвейс. — М.: Наука, 1985. — 336 с.
6. Соловьев, В. Н. О критерии выпуклости положительно однородной функции / В. Н. Соловьев // Матем. сб. — 1982. — Т. 2, № 6. — С. 280–286.
7. Ball, J. M. Convexity Conditions and Existence Theorems in Nonlinear Elasticity / J. M. Ball // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1977. — № 63. — P. 337–403.
8. Morrey, Jr., C. B. Quasi-Convexity and the Lower Semicontinuity of Multiple Integrals / C. B. Morrey, Jr. // Pacific J. Math. — 1952. — № 2. — P. 25–53.

REFERENCES

1. Vodopyanov S.K., Molchanova A.O. Variatsionnye zadachi nelineynoy teorii uprugosti v nekotorykh klassakh otobrazheniy s konechnym iskazheniem [Variational Problems of Nonlinear Elasticity Theory in Some Classes of Mappings with Finite Distortion]. *Dokl. RAN [Doklady Mathematics]*, 2015, vol. 465, no. 5, pp. 523–526.
2. Voytitskiy V.I. Srednie funktsionalnye velichiny nabora deystvitelnykh chisel, ikh sravnenie i svoystva [Average Functional Values of a Set of Real Numbers, Their Comparison and Properties]. *Matem. sb. [Math. USSR-Sb.]*, 2017, vol. 84, no. 4, pp. 12–19.
3. Volchyonkova I.V., Klebanov L.B. Novye neravenstva, svyazannye so svoystvom vypuklosti, kharakterizatsiya funktsiy raspredeleniya veroyatnostey, a takzhe svobodnye ot raspredeleniya kriterii [New Inequalities Related to the Convexity Property, Characterization of Probability Distribution Functions, and Distribution-Free Criteria]. *Veroyatnost i statistika [Probability and Statistics]*, 2018, vol. 27, no. 474, pp. 63–76.
4. Kuzmin V.V. Raschet 3D-formy giperuprugogo tela dlya modeley nelineynoy teorii uprugosti metodom Nyutona [Calculation of 3D Shape of Hyperelastic Body for Models of Nonlinear Elasticity Theory by Newton's Method]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie [Mathematical Physics and Computer Simulation]*, 2024, vol. 26, no. 2, pp. 80–91. DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2024.2.7>
5. Lekhtveys K. *Vypuklye mnozhestva [Convex Sets]*. Moscow, Nauka Publ., 1985. 336 p.
6. Solovov V.N. O kriterii vypuklosti polozhitelno odnorodnoy funktsii [On the Convexity Criterion of a Positively Homogeneous Function]. *Matem. sb. [Math. USSR-Sb.]*, 1982, vol. 2, no. 6, pp. 280–286.
7. Ball J.M. Convexity Conditions and Existence Theorems in Nonlinear Elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1977, no. 63, pp. 337–403.
8. Morrey, Jr. C.B. Quasi-Convexity and the Lower Semicontinuity of Multiple Integrals. *Pacific J. Math.*, 1952, no. 2, pp. 25–53.

JENSEN'S INEQUALITY AS A CRITERION FOR THE CONVEXITY
OF A CONTINUOUS FUNCTION

Vladimir A. Klyachin

Doctor of Sciences (Physics and Mathematics),
Head of the Department of Computer Sciences and Experimental Mathematics,
Volgograd State University
klchnv@mail.ru, klyachin.va@volsu.ru
<https://orcid.org/0000-0003-1922-7849>
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. Many inequalities in mathematics can be derived from a few basic inequalities. One such inequality is the classical integral inequality of Jensen, which is used to obtain various estimates of integrals of functions belonging to different classes. For example, a special case of the integral Hölder inequality for functions of class $L^p, p \geq 1$, can be obtained as a consequence of Jensen's inequality, from which the embedding of spaces $L^q \subset L^p, 1 \leq q \leq p$ can be easily derived. In terms of probability measure, Jensen's inequality states that the value of a convex function at the expectation point of a vector random variable ξ does not exceed the expectation of this convex function of the random variable ξ : $f(\mathbb{E}\xi) \leq \mathbb{E}f(\xi)$. In this paper we prove that if Jensen's inequality holds for a continuous function f for any simplex, then f is convex downwards. We introduce the concept of the convexity defect of a continuous function, so that it is negative for convex functions. Using the linear properties of the convexity defect, we prove an integral criterion for δ -convexity of a continuous function. It states that if the convexity defect does not exceed a quadratic function of the diameter of the simplex, then the function is δ -convex. From this criterion we obtain an integral condition for twice almost everywhere differentiability of a continuous function.

Key words: convex functions, Jensen inequality, geometric center, weight center of mass, δ -convex functions.