УДК 517.51
ББК 22.161

ОЦЕНКА ИСКАЖЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ИЗОПЕРИМЕТРИЧНОСТИ ТЕТРАЭДРА ПРИ БИЛИПШИЦЕВОМ ОТОБРАЖЕНИИ

Шуркаева Диана Васильевна
Ассистент кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики
Волгоградского государственного университета
diana-547@yandex.ru
Проспект Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В статье дается оценка коэффициента изопериметричности тетраэдра, полученного при квазиизометрическом отображении через коэффициент изопериметричности исходного тетраэдра. Этот коэффициент дает условие сохранения аппроксимируемости градиента для тетраэдральной сетки при квазиизометрическом отображении.

Ключевые слова: коэффициент изопериметричности, тетраэдр, определитель Кэли — Менгера, формула Герона — Тарталья, билипшицево отображение, квазиизометрическое отображение.

Отображение $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ называется билипшицевым или квазиизометрическим, если существуют постоянные $0<l\le L$ такие, что для любых двух точек $x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$ выполнено

$$l|x_1-x_2|\le|f(x_1)-f(x_2)|\le L|x_1-x_2|.$$

Коэффициентом изопериметричности n-мерного симплекса T будем называть

$$\sigma(T)=\frac{|\partial T|^{\frac{n}{n-1}}}{|T|}. \tag{1}$$

Величина $\sigma(T)$ характеризует отклонение произвольного симплекса T от правильного, поскольку минимальное значение достигается на правильном симплексе. Данный термин был введен В.А. Клячиным в докладе «Задачи анализа на ε-сетях» Научной сессии ВолГУ в 2012 г.

Пусть $\{d_{ij}:0\le i<j\le n\}$ – совокупность $n(n+1)/2$ переменных. Рассмотрим квадратную $(n+2)\times(n+2)$-матрицу (см. [1] или [2])

$$CM_n:=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 0 & d_{01}^2 & d_{02}^2 & \dots & d_{0n}^2\\ 1 & d_{01}^2 & 0 & d_{12}^2 & \dots & d_{1n}^2\\ 1 & d_{02}^2 & d_{01}^2 & 0 & \dots & d_{2n}^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & d_{0n}^2 & d_{1n}^2 & d_{2n}^2 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Многочлен от многих переменных $\Gamma_n := \det(CM_n) \in \mathbb{Z}, \quad d_{ij} : 0 \leq i < j \leq n$ называется определителем Кэли — Менгера. Этот определитель дает формулу для вычисления n-мерного объема симплекса T в терминах евклидовых расстояний $\{d_{ij} := dist(v_i, v_j) : : 0 \leq i < j \leq n\}$ между рассматриваемыми точками:

$$V^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n (n!)^2} \Gamma_n(d_{01}, d_{02}, \ldots, d_{(n-1)n}).$$

В пространстве $\mathbb{R}^3$ объем тетраэдра будет вычисляться по формуле

$$V^2 = \frac{1}{144} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{01}^2 & d_{02}^2 & d_{03}^2 \\ 1 & d_{01}^2 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 \\ 1 & d_{02}^2 & d_{01}^2 & 0 & d_{23}^2 \\ 1 & d_{03}^2 & d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Следует отметить, что при $n = 3$ из определителя Кэли — Менгера получается формула Герона — Тарталья (см. [3]), которая является обобщением хорошо известной формулы Герона и позволяет вычислять объем тетраэдра по заданным длинам ребер:

$$V^2 = \frac{1}{144}\Big(d_{01}^2 d_{23}^2 (d_{02}^2 + d_{03}^2 + d_{12}^2 + d_{13}^2 - d_{01}^2 - d_{05}^2) + d_{02}^2 d_{13}^2 (d_{01}^2 + d_{03}^2 + d_{12}^2 + d_{23}^2 - d_{02}^2 - d_{13}^2) + \\ + d_{03}^2 d_{12}^2 (d_{01}^2 + d_{02}^2 + d_{13}^2 + d_{23}^2 - d_{03}^2 - d_{12}^2) - d_{01}^2 d_{02}^2 d_{12}^2 - d_{01}^2 d_{03}^2 d_{13}^2 - d_{02}^2 d_{03}^2 d_{23}^2 - \\ - d_{12}^2 d_{13}^2 d_{23}^2\Big). \quad (2)$$

Теорема 1. *Пусть в пространстве заданы тетраэдр T, у которого длина максимального ребра равна d, минимального – a, площадь наименьшей грани – S, и билипшицево отображение $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ с константами $\frac{L}{l} < \sqrt[6]{1 + \frac{3a^4}{5d^4}}$, тогда для коэффициента изопериметричности образа тетраэдра справедлива оценка*

$$\frac{l^3}{L^3}\sigma \frac{\left(1 - \frac{L^4 - l^4}{l^4}\frac{3d^4}{16S^2}\right)^{3/4}}{\sqrt{1 + \frac{L^6 - l^6}{L^6}\frac{10d^6}{144V^2}}} \leq \sigma\prime \leq \frac{L^3}{l^3}\sigma \frac{\left(1 + \frac{L^4 - l^4}{L^4}\frac{3d^4}{16S^2}\right)^{3/4}}{\sqrt{1 - \frac{L^6 - l^6}{l^6}\frac{10d^6}{144V^2}}}. \quad (3)$$

Доказательство. Обозначим через P сумму слагаемых из формулы (2), перед которыми стоит знак «+», а через Q – сумму слагаемых, перед которыми стоит знак «–», взятых с обратным знаком, то есть

$$P = d_{01}^2 d_{02}^2 d_{13}^2 + d_{01}^2 d_{02}^2 d_{23}^2 + d_{01}^2 d_{03}^2 d_{12}^2 + d_{01}^2 d_{03}^2 d_{23}^2 + d_{01}^2 d_{12}^2 d_{23}^2 + d_{01}^2 d_{13}^2 d_{23}^2 + d_{02}^2 d_{03}^2 d_{12}^2 + \\ + d_{02}^2 d_{03}^2 d_{13}^2 + d_{02}^2 d_{12}^2 d_{13}^2 + d_{02}^2 d_{13}^2 d_{23}^2 + d_{03}^2 d_{12}^2 d_{13}^2 + d_{03}^2 d_{12}^2 d_{23}^2,$$

и

$$Q = d_{01}^2 d_{02}^2 d_{12}^2 + d_{01}^2 d_{03}^2 d_{13}^2 + d_{02}^2 d_{03}^2 d_{23}^2 + d_{12}^2 d_{13}^2 d_{23}^2 + d_{01}^4 d_{23}^2 + d_{01}^2 d_{23}^4 + d_{02}^4 d_{13}^2 + d_{02}^2 d_{13}^4 + \\ + d_{03}^4 d_{12}^2 + d_{03}^2 d_{12}^4,$$

тогда формула Герона — Тарталья перепишется в виде:

$$V = \frac{1}{12}\sqrt{P - Q}.$$

Объем полученного при квазиизометричном отображении тетраэдра

$$\frac{1}{12}\sqrt{l^6 P - L^6 Q} \leq V\prime \leq \frac{1}{12}\sqrt{L^6 P - l^6 Q},$$

или

$$l^3 V\sqrt{1 - \frac{L^6 - l^6}{l^6}\frac{Q}{144V^2}} \leq V\prime \leq L^3 V\sqrt{1 + \frac{L^6 - l^6}{L^6}\frac{Q}{144V^2}}.$$

Но поскольку $Q \leq 10d^6$, где $d = \max d_{ij}, 0 \leq i < j \leq 3$, тогда

$$l^3 V\sqrt{1 - \frac{L^6 - l^6}{l^6}\frac{10d^6}{144V^2}} \leq V\prime \leq L^3 V\sqrt{1 + \frac{L^6 - l^6}{L^6}\frac{10d^6}{144V^2}}. \qquad (4)$$

Воспользуемся оценкой площади из [4], получим, что площадь i-й грани

$$l^2 S_i\sqrt{1 - \frac{L^4 - l^4}{l^4}\frac{3d_i^4}{16S_i^2}} \leq S_i\prime \leq L^2 S_i\sqrt{1 + \frac{L^4 - l^4}{L^4}\frac{3d_i^4}{16S_i^2}},\ 0 \leq i \leq 3,$$

где d_i – длина максимального ребра i-й грани. Обозначим через $S = \min S_i,\ 0 \leq i \leq 3$, и, так как $\max d_i = d$, суммируя оценки площадей всех граней, получаем, что площадь полной поверхности тетраэдра

$$l^2|\partial T|\sqrt{1 - \frac{L^4 - l^4}{l^4}\frac{3d^4}{16S^2}} \leq |\partial T\prime| \leq L^2|\partial T|\sqrt{1 + \frac{L^4 - l^4}{L^4}\frac{3d^4}{16S^2}}. \qquad (5)$$

Применив формулу (1) к (4)–(5), получим (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берже, М. Геометрия / М. Берже. — М. : Мир, 1984. — Т. 1. — 560 с.

2. Д'Андреа, К. Определитель Кэли — Менгера неприводим при $n \geq 3$ / К. Д'Андреа, М. Сомбра // Сиб. мат. журн. — 2005. — Т. 46, № 1. — С. 90–97.

3. Сабитов, И. Х. Обобщенная формула Герона — Тарталья и некоторые ее следствия / И. Х. Сабитов // Мат. сб. — 1998. — Т. 189, № 10. — С. 105–134.

4. Шуркаева, Д. В. Оценка искажения коэффициента изопериметричности треугольника при билипшицевом отображении / Д. В. Шуркаева // Материалы XI Казанской летней школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы». — 2013. — С. 467–468.

REFERENCES

1. Berger M. *Geometriya* [Geometry], vol. 1. Moscow, Mir Publ., 1984. 560 p.
2. D'Andrea K., Sombra M. Opredelitel' Keli — Mengera neprivodim pri $n \geq 3$ [The Cayley — Menger determinant is irreducible for $n \geq 3$]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal], 2005, vol. 46, no. 1, pp. 90–97.
3. Sabitov I.Kh. Obobschennaya formula Gerona — Tartal'ya i nekotorye ee sledstviya [A generalized Heron — Tartaglia formula and some of its consequences]. *Mat. sb.* [Sbornik: Mathematics], 1998, vol. 189, no. 10, pp. 105–134.
4. Shurkaeva D.V. Otsenka iskazheniya koeffitsienta izoperimetrichnosti treugol'nika pri bilipshitsevom otobrazhenii [The estimate of the distortion of the tetrahedron isoperimetricity coefficient under bi-Lipschitz mapping]. *Materialy XI Kazanskoy letney shkoly-konferentsii «Teoriya funktsiy, ee prilozheniya i smezhnye voprosy»* [Proceedings of the Eleventh International Kazan Summer Scholl-Conference "Theory of Functions and its Applications and Related Matters"], 2013, pp. 467–468.

THE ESTIMATE OF THE DISTORTION OF THE TETRAHEDRON ISOPERIMETRICITY COEFFICIENT UNDER BI-LIPSCHITZ MAPPING

Shurkaeva Diana Vasil'evna

Assistant Teacher, Department of Computer Science and Experimental Mathematics
Volgograd State University
diana-547@yandex.ru
Prospect Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. The article assesses the tetrahedron isoperimetricity coefficient obtained by quasi-isometric mapping through the original tetrahedron isoperimetricity coefficient. This coefficient determines the condition of finiteness conservation of gradient for tetrahedral mesh under quasi-isometric mapping.

Main Results: Let's in the space given tetrahedron T, in which the length of the maximum edge is equal to d, the minimum is a, the lower face area is S, and $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is bi-Lipschitz mapping with constants $\frac{l}{L} < \sqrt[6]{1 + \frac{3a^4}{6d^4}}$, then isoperimetricity coefficient of the tetrahedron image estimates as

$$\frac{l^3}{L^3}\sigma \frac{\left(1 - \frac{L^4 - l^4}{l^4}\frac{3d^4}{16S^2}\right)^{3/4}}{\sqrt{1 + \frac{L^6 - l^6}{L^6}\frac{10d^6}{144V^2}}} \leq \sigma\prime \leq \frac{L^3}{l^3}\sigma \frac{\left(1 + \frac{L^4 - l^4}{L^4}\frac{3d^4}{16S^2}\right)^{3/4}}{\sqrt{1 - \frac{L^6 - l^6}{l^6}\frac{10d^6}{144V^2}}}.$$

Key words: coefficient of isoperimetricity, tetrahedron, Cayley — Menger determinant, Heron — Tartaglia formula, bi-Lipschitz mapping, quasi-isometric mapping.