www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2025.3.1

УДК 519.63
ББК 22.192.32

Дата поступления статьи: 24.04.2025
Дата принятия статьи: 16.07.2025

ПОВЫШЕННЫЙ ПОРЯДОК АППРОКСИМАЦИИ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Мурат Хамидбиевич Бештоков

Кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник отдела вычислительных методов,
Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН
beshtokov-murat@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-2968-9211
ул. Шортанова, 89а, 360000 г. Нальчик, Российская Федерация

Аннотация. Изучена первая начально-краевая задача для неклассического волнового уравнения с переменными коэффициентами. Для численного решения исходной задачи на равномерной сетке построена разностная схема повышенного порядка точности, аппроксимирующая исходную задачу. Методом энергетических неравенств получена априорная оценка в разностной трактовке. Из полученной оценки следуют единственность и непрерывная зависимость решения от входных данных задачи, а также сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью $O(h^4 + \tau^2)$.

Ключевые слова: первая начально-краевая задача, волновое уравнение, неклассическое уравнение, численное решение, разностная схема, априорная оценка, устойчивость и сходимость схем.

Введение

Многие задачи механики (колебания струн, стержней, мембран и трехмерных тел) и физики (электромагнитные колебания) сводятся к уравнениям гиперболического типа [1].

Неклассические гиперболические уравнения часто встречаются в задачах, связанных с распространением волн, динамикой структур и процессами передачи информации. В отличие от классических гиперболических уравнений, они могут обладать более сложными свойствами, например такими, как нелинейные эффекты и локальное влияние внешних воздействий на поведение структур. Эти особенности значительно усложняют их анализ и численное решение [7; 12].

Разностные схемы повышенного порядка аппроксимации представляют собой эффективные инструменты для решения задач, связанных с неклассическими гиперболическими уравнениями. Они обеспечивают высокую точность и устойчивость вычислений, что особенно важно при моделировании динамических процессов [11]. Применение таких схем позволяет существенно снизить численную дисперсию и уменьшить ошибки, возникающие в процессе расчетов. Таким образом, разработка и анализ разностных схем повышенного порядка для неклассических гиперболических уравнений являются актуальной задачей и способствуют более глубокому пониманию сложных динамических систем и повышению качества численных решений, что имеет важное значение для различных прикладных задач в науке и технике.

Настоящая работа посвящена численному решению первой начально-краевой задачи для неклассического гиперболического уравнения с переменными коэффициентами. Для исходной задачи на равномерной сетке была разработана разностная схема повышенного порядка точности, которая аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение. В результате анализа получена априорная оценка в разностной форме с использованием метода энергетических неравенств. Эта оценка позволяет сделать выводы о единственности решения разностной задачи и о непрерывной зависимости решения от входных данных, а также о сходимости численного решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью $O(h^4+\tau^2)$, где h и τ – шаги по пространству и времени соответственно.

Численным методам решения краевых задач для гиперболических уравнений посвящены работы [4–6; 8].

Настоящая работа представляет собой непосредственное продолжение серии исследований автора [2; 3], в которых рассматриваются вопросы разработки разностных схем с повышенным порядком точности.

1. Постановка задачи

В замкнутом прямоугольнике $\overline{D} = \{(x,t) : 0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$ рассмотрим первую начально-краевую задачу для неклассического дифференциального уравнения гиперболического типа

$$u_{tt} = (k(x,t)u_x)_x - \sum_{s=1}^{m} q_s(x,t)u(\xi_s,t) + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad 0\le x\le l, \tag{3}$$

где

$$0<c_0\le k(x,t)\le c_1,\ |q_s(x,t),k_t,k_x,q_{s,x}(x,t)|\ \le c_2,\quad s=1,2,...,m,$$
$$q_s,f\in C^{4,1}(\overline{D}),\quad u\in C^{6,4}(\overline{D}),\quad k(x,t),\frac{1}{k(x,t)}\in C^{5,1}(\overline{D}), \tag{4}$$

$\xi_s,(s=1,2,...,m)$ – произвольные точки интервала $(0,l)$: $0<\xi_1<...<\xi_m<l$.

Здесь и далее, при рассмотрении решения дифференциальной задачи, будем предполагать существование и единственность решения, а также выполнение условия согласованности начальных и граничных данных, то есть совпадение значений начальных и граничных условий в точках их пересечения.

2. Устойчивость и сходимость разностной схемы

Введем равномерную сетку $\bar\omega_{h\tau}=\bar\omega_h\times\bar\omega_\tau=\left\{(x_i,t_n)\in\overline{D}\right\}$, где

$$\bar\omega_h=\left\{x_i=ih, i=\overline{0,N}, h=\frac{l}{N}\right\},\quad \bar\omega_\tau=\left\{t_n=n\tau, n=\overline{0,n_0}, \tau=\frac{T}{n_0}\right\},$$

$N-$ количество узлов на $[0,l], n_0-$ количество узлов на $[0,T]$.

В дальнейшем изложении будем пользоваться следующими обозначениями, формулами и леммами [9]:

$$\hat y=y^{n+1},\ \check y=y^{n-1},\ y=y_i^n=y(x_i,t_n),\ y_{\mathring{t}}=\frac{\hat y_{\bar t}+y_{\bar t})}{2},\ y_{\bar t}=\frac{y^n-y^{n-1}}{\tau},\ y_t=\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau},$$

$$yy_{\mathring{t}}=y^n\frac{y^{n+1}-y^{n-1}}{2\tau}=\frac{y^{n+1}y^n-y^ny^{n-1}}{2\tau}=\frac{1}{2}\left(y^ny^{n-1}\right)_t.\ y_{\bar x}=\frac{y_i-y_{i-1}}{h},\ y_x=\frac{y_{i+1}-y_i}{h},$$

$$y^{(\sigma_1,\sigma_2)}=\sigma_1\hat y+(1-\sigma_1-\sigma_2)y+\sigma_2\check y=y+(\sigma_1-\sigma_2)\tau y_{\mathring{t}}+\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\tau^2y_{\bar tt},$$

$$y^{(\sigma,\sigma)}=\sigma\hat y+(1-2\sigma)y+\sigma\check y=y+\sigma\tau^2y_{\bar tt}\quad\text{при}\quad\sigma_1=\sigma_2,$$

$$(u,v)_x=u_xv+u^{(+1)}v_x=u_xv^{(+1)}+uv_x,\quad (u,v)_{\bar x}=u_{\bar x}v+u^{(-1)}v_{\bar x}=u_{\bar x}v^{(-1)}+uv_{\bar x},$$

$$u^{(\pm1)}=u(x\pm h),\ (u,(av_{\bar x})_x)=-(av_{\bar x},u_{\bar x}]+a_Nu_Nv_{\bar x,N}-a_1u_0v_{x,0},$$

$$\left(\sum u_kv_k\right)^2\le\sum u_k^2\sum v_k^2,\ |(u,v)|\le\|u\|\,\|v\|\le\varepsilon\|u\|^2+\frac{1}{4\varepsilon}\|v\|^2,\ \varepsilon>0-\text{ любое число.}$$

Скалярное произведение и нормы вводятся следующим образом:

$$(y,v)=\sum_{i=1}^{N-1}y_iv_ih,\quad (1,y^2)=\|y(\cdot,t)\|^2=\|y\|^2,\quad (y,v]=\sum_{i=1}^{N}y_iv_ih,\quad (1,y^2]=\|y]|^2.$$

Лемма 1 [9, лемма 3, гл. II, § 3]. Для всякой функции $y(x)$, заданной на равномерной сетке $\bar\omega_h$ и обращающейся в нуль при $x=0$ и $x=l$, справедлива оценка

$$\frac{h^2}{4}\|y_{\bar x}]|^2\le\|y\|^2\le\frac{l^2}{8}\|y_{\bar x}]|^2.$$

Лемма 2. Для всякой функции $y(x)$, заданной на равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$, справедлива оценка

$$yy_{\overset{\circ}{t}} = \frac{1}{4}\left(y^2 + \check{y}^2\right)_t - \frac{\tau^2}{4}\left((y_{\bar{t}})^2\right)_t.$$

На сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ задаче (1)–(3) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^4 + \tau^2)$:

$$y_{\bar{t}t} = \Lambda y^{(\sigma,\sigma)} - \frac{h^2}{12}\Lambda\left(py_{\bar{t}t}\right) - \sum_{s=1}^{m} d_s y^{(\sigma,\sigma)}(\xi_s, t_n) - \frac{h^2}{12}\Lambda\left(p\sum_{s=1}^{m} d_s y^{(\sigma,\sigma)}(\xi_s, t_n)\right) + \varphi, \quad (x,t) \in \omega_{h,\tau}, \tag{5}$$

$$y_0 = y_N = 0, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \tag{6}$$

$$\begin{cases} y(x,0) = u_0(x), & x \in \bar{\omega}_h, \\ y_t(x,0) = \bar{u}_1(x), & x \in \omega_h, \end{cases} \tag{7}$$

где

$$\Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x, \quad d_{s,i}^n = q_s(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}), \quad \varphi = f + \frac{h^2}{12}\Lambda(pf), \quad p(x,t) = \frac{1}{k(x,t)},$$

$$a(x,t) = 6\left[p(x-h,t) + 4p\left(x - 0,5h, t\right) + p(x,t)\right]^{-1} = 6\left[\frac{1}{k_{i-1}} + \frac{4}{k_{i-0,5}} + \frac{1}{k_i}\right]^{-1},$$

$$\bar{u}_1(x) = u_1(x) + \frac{\tau}{2}\left[(k(x,0)u'(x,0))' - q(x,0)u(x,0) + f(x,0)\right], \quad x \in \omega_h.$$

$$\eta_{i_s} = \frac{(\xi_s - x_{i_s})(\xi_s - x_{i_s+1})(\xi_s - x_{i_s+2})}{-6h^3}y_{i_s-1} + \frac{(\xi_s - x_{i_s-1})(\xi_s - x_{i_s+1})(\xi_s - x_{i_s+2})}{2h^3}y_{i_s} +$$

$$+ \frac{(\xi_s - x_{i_s-1})(\xi_s - x_{i_s})(\xi_s - x_{i_s+2})}{-2h^3}y_{i_s+1} + \frac{(\xi_s - x_{i_s-1})(\xi_s - x_{i_s})(\xi_s - x_{i_s+1})}{6h^3}y_{i_s+2},$$

где $\eta_{i_s}^n = y(\xi_s, t_n)$, $x_{i_s} \le \xi_s \le x_{i_s+1}$,
$y^{(\sigma,\sigma)}(\xi_s, t_n) = \sigma\eta_{i_s}^{n+1} + (1-2\sigma)\eta_{i_s}^n + \sigma\eta_{i_s}^{n-1} = \eta_{i_s}^n + \sigma\tau^2\eta_{i_s,\bar{t}t}^n$.

В дальнейшем будем считать, что $h < \min\{\xi_1, l - \xi_m\}$. Невязка

$$\Psi = -u_{\bar{t}t} + \Lambda u^{(\sigma,\sigma)} - \frac{h^2}{12}\Lambda\left(pu_{\bar{t}t}\right) - \sum_{s=1}^{m} q_s(x,t)u^{(\sigma,\sigma)}(\xi_s, t_n) -$$

$$- \frac{h^2}{12}\Lambda\left(p\sum_{s=1}^{m} q_s(x,t)u^{(\sigma,\sigma)}(\xi_s, t_n)\right) + \varphi = O(h^4 + \tau^2),$$

$$z_t(x,0) = \overset{\circ}{\Psi} = O(\tau^2), \quad p_{(-1)} = p_{i-1}, \quad a^{(-1)} = a^{n-1}.$$

Поскольку

$$(au_{\bar{x}})_x = (ku')' + \frac{h^2}{12}\left(k\left(p\left(ku'\right)'\right)'\right)' + O(h^4), \quad p = \frac{1}{k(x,t)},$$

то, выражая $(ku')'$ из исходного уравнения (1), так как $u = u(x,t)$ – решение уравнения (1), получаем

$$(ku')' = u_{tt} + \sum_{s=1}^{m} q_s(x,t)u(\xi_s, t) - f.$$

Следовательно,

$$\Lambda u=(au_{\bar{x}})_x=(ku')'+\frac{h^2}{12}\left(k\left(pu_{tt}+p\sum_{s=1}^{m}q_s(x,t)u(\xi_s,t)-pf\right)'\right)'+O(h^4). \quad (8)$$

Теорема. Пусть выполнены условия (4), тогда, если $\sigma\geq\frac{1}{\sqrt{2}}$, $h\leq\sqrt{6c_0(\sigma-\frac{1}{2})}\tau$, $\tau\leq\tau_0(c_0,c_1,c_2,\sigma,T,l,m)$, то для решения разностной задачи (5)–(7) справедлива априорная оценка

$$\|y^{n+1}\|_1^2\leq M\left[\sum_{n'=1}^{n}\|\varphi^{n'}\|^2\tau+\|y^1\|_1^2\right],$$

где $M=\mathrm{const}>0$, не зависящая от h и τ,

$$\|y\|_1=\left[\|y_{\bar{t}}\|^2+\|y_{\bar{x}}]|^2+\|\check{y}_{\bar{x}}]|^2+\left(\sigma-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\tau^2\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Получим априорную оценку решения разностной задачи (5)–(7). Для этого воспользуемся методом энергетических неравенств. Умножим (5) скалярно на $2\tau y_{\mathring{t}}=\tau(\hat{y}_{\bar{t}}+y_{\bar{t}})$:

$$(y_{\bar{t}t},2\tau y_{\mathring{t}})=\left(\Lambda y^{(\sigma,\sigma)},2\tau y_{\mathring{t}}\right)-\frac{h^2}{12}\left(\Lambda\left(py_{\bar{t}t}\right),2\tau y_{\mathring{t}}\right)-$$
$$-\left(\sum_{s=1}^{m}d_s y^{(\sigma,\sigma)}(\xi_s,t_n),2\tau y_{\mathring{t}}\right)-\frac{h^2}{12}\left(\Lambda\left(p\sum_{s=1}^{m}d_s y^{(\sigma,\sigma)}(\xi_s,t_n)\right),2\tau y_{\mathring{t}}\right)+(\varphi,2\tau y_{\mathring{t}}). \quad (9)$$

Преобразуем каждое слагаемое, входящее в (9):

$$(y_{\bar{t}t},2\tau y_{\mathring{t}})=(\hat{y}_{\bar{t}}-y_{\bar{t}},\hat{y}_{\bar{t}}+y_{\bar{t}})=\left(1,\hat{y}_{\bar{t}}^2-y_{\bar{t}}^2\right)=\left(\tau,(y_{\bar{t}}^2)_t\right)=(\tau,\bar{y}_{\bar{t}}^2)_t=\tau\left(\|y_{\bar{t}}\|^2\right)_t. \quad (10)$$

Первое слагаемое в правой части (9) преобразуем так:

$$\left(\Lambda y^{(\sigma,\sigma)},2\tau y_{\mathring{t}}\right)=\left((ay_{\bar{x}}^{(\sigma,\sigma)})_x,2\tau y_{\mathring{t}}\right)=-\left(ay_{\bar{x}}^{(\sigma,\sigma)},2\tau y_{\bar{x}\mathring{t}}\right]=$$
$$=-\left(ay_{\bar{x}}+a\sigma\tau^2y_{\bar{x}\bar{t}t},2\tau y_{\bar{x}\mathring{t}}\right]=-\left(2a\tau,y_{\bar{x}}y_{\bar{x}\mathring{t}}\right]-\left(2\sigma\tau^3a,y_{\bar{x}\bar{t}t}y_{\bar{x}\mathring{t}}\right]. \quad (11)$$

Преобразуем слагаемые, входящие в правую часть (11). Тогда на основании лемм 1 и 2 получим:

$$-\left(2a\tau,y_{\bar{x}}y_{\bar{x}\mathring{t}}\right]=-\left(\frac{\tau}{2}a,\left(y_{\bar{x}}^2+\check{y}_x^2\right)_t-\tau^2\left(y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right)_t\right]=-\frac{\tau}{2}\left(a^{(-1)},y_{\bar{x}}^2+\check{y}_{\bar{x}}^2-\tau^2y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right]_t+$$
$$+\frac{\tau}{2}\left(a_{\bar{t}},y_{\bar{x}}^2+\check{y}_{\bar{x}}^2-\tau^2y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right], \quad (12)$$

$$-\left(2\sigma\tau^3a,y_{\bar{x}\bar{t}t}y_{\bar{x}\mathring{t}}\right]=-\left(\tau^2\sigma a,\left(\hat{y}_{\bar{x}t}-y_{\bar{x}\bar{t}}\right)\left(\hat{y}_{\bar{x}\bar{t}}+y_{\bar{x}\bar{t}}\right)\right]=-\left(\sigma\tau^2a,\hat{y}_{\bar{x}\bar{t}}^2-y_{\bar{x}t}^2\right]=$$
$$=-\sigma\tau^3\left(a,\left(y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right)_t\right]=-\sigma\tau^3\left(a^{(-1)},y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right]_t+\sigma\tau^3\left(a_{\bar{t}},y_{\bar{x}t}^2\right]. \quad (13)$$

Учитывая (12), (13), из (11) получаем

$$\left(\Lambda y^{(\sigma,\sigma)},2\tau y_{\mathring{t}}\right)=-\frac{\tau}{2}\left(a^{(-1)},y_{\bar{x}}^2+\check{y}_{\bar{x}}^2-\tau^2y_{\bar{x}t}^2\right]_t+\frac{\tau}{2}\left(a_{\bar{t}},y_{\bar{x}}^2+\check{y}_{\bar{x}}^2-\tau^2y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right]-$$

$$-\sigma\tau^3\left(a^{(-1)}, y^2_{\bar{x}\bar{t}}\right]_t + \sigma\tau^3\left(a_{\bar{t}}, y^2_{\bar{x}\bar{t}}\right] = -\tau\left(\frac{a^{(-1)}}{2}, y^2_{\bar{x}} + \check{y}^2_{\bar{x}}\right]_t -$$

$$-\tau\left(a^{(-1)}, \tau^2\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)y^2_{\bar{x}\bar{t}}\right]_t + \tau\left(\frac{a_{\bar{t}}}{2}, y^2_{\bar{x}} + \check{y}^2_{\bar{x}}\right] + \tau\left(a_{\bar{t}}, \tau^2\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)y^2_{\bar{x}\bar{t}}\right]. \qquad (14)$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части уравнения (9), тогда имеем

$$-\frac{h^2}{12}\left(\Lambda\left(py_{\bar{t}t}\right), 2\tau y_{\mathring{t}}\right) = -\frac{h^2}{12}\left(\left(a\left(py_{\bar{t}t}\right)_{\bar{x}}\right)_x, 2\tau y_{\mathring{t}}\right) = \frac{h^2}{12}\left(a\left(py_{\bar{t}t}\right)_{\bar{x}}, 2\tau y_{\bar{x}\mathring{t}}\right] =$$

$$= \frac{h^2}{12}\left(ap_{\bar{x}}, \left(\hat{y}_{\bar{t}} - y_{\bar{t}}\right)\left(\hat{y}_{\bar{x}t} + y_{\bar{x}t}\right)\right] + \frac{h^2}{12}\left(ap_{(-1)}, \hat{y}^2_{\bar{x}t} - y^2_{\bar{x}t}\right]. \qquad (15)$$

Оценим слагаемые, входящие в правую часть (15). Тогда на основании леммы 2 имеем

$$\frac{h^2}{12}\left(ap_{\bar{x}}, \left(\hat{y}_{\bar{t}} - y_{\bar{t}}\right)\left(\hat{y}_{\bar{x}t} + y_{\bar{x}t}\right)\right] = \frac{h^2}{12}\left(ap_{\bar{x}}, \left(\hat{y}_{\bar{t}} - y_{\bar{t}}\right)\left(\frac{\hat{y}_{\bar{t},i} - \hat{y}_{\bar{t},i-1}}{h} + \frac{y_{\bar{t},i} - y_{\bar{t},i-1}}{h}\right)\right] =$$

$$= \frac{h}{12}\left(ap_{\bar{x}}, \hat{y}^2_{\bar{t}} - y^2_{\bar{t}} - (\hat{y}_{\bar{t},i} - y_{\bar{t},i})(\hat{y}_{\bar{t},i-1} - y_{\bar{t},i-1})\right] \le$$

$$\le \frac{hM_1}{8}\left(1, 2\hat{y}^2_{\bar{t},i} + \hat{y}^2_{\bar{t},i-1} + y^2_{\bar{t},i-1}\right] \le \frac{hM_1}{4}\left(1, \hat{y}^2_{\bar{t},i} + y^2_{\bar{t},i} + h^2\hat{y}^2_{\bar{x}\bar{t},i} + h^2 y^2_{\bar{x},\bar{t},i}\right] =$$

$$= hM_2\left(\|\hat{y}_{\bar{t}}\|^2 + \|y_{\bar{t}}\|^2\right) + \frac{h^3}{4}M_1\left(\|\hat{y}_{\bar{x}t}]|^2 + \|y_{\bar{x}t}]|^2\right) \le hM_3\left(\|\hat{y}_{\bar{t}}\|^2 + \|y_{\bar{t}}\|^2\right), \qquad (16)$$

$$\frac{h^2}{12}\left(ap_{(-1)}, \hat{y}^2_{\bar{x}\bar{t}} - y^2_{\bar{x}\bar{t}}\right] = \frac{h^2\tau}{12}\left(ap_{(-1)}\left(y^2_{\bar{x}\bar{t}}\right)_t\right] =$$

$$= \frac{h^2\tau}{12}\left[\left(\left(ap_{(-1)}\right)^{(-1)}, y^2_{\bar{x}\bar{t}}\right]_t - \left(\left(ap_{(-1)}\right)_{\bar{t}}, y^2_{\bar{x}\bar{t}}\right]\right]. \qquad (17)$$

Учитывая (16), (17), из (15) находим

$$-\frac{h^2}{12}\left(\Lambda\left(py_{\bar{t}t}\right), 2\tau y_{\mathring{t}}\right) \le hM_3\left(\|\hat{y}_{\bar{t}}\|^2 + \|y_{\bar{t}}\|^2\right) +$$

$$+\frac{h^2\tau}{12}\left(\left(ap_{(-1)}\right)^{(-1)}, y^2_{\bar{x}\bar{t}}\right]_t - \frac{h^2\tau}{12}\left(\left(ap_{(-1)}\right)_{\bar{t}}, y^2_{\bar{x}\bar{t}}\right]. \qquad (18)$$

Третье слагаемое в правой части уравнения (9) преобразуем следующим образом:

$$-\left(\sum_{s=1}^m d_s y^{(\sigma,\sigma)}(\xi_s, t_n), 2\tau y_{\mathring{t}}\right) = -\left(\sum_{s=1}^m d_s y(\xi_s, t_n) + \sum_{s=1}^m \sigma\tau^2 d_s y_{\bar{t}t}(\xi_s, t_n), 2\tau y_{\mathring{t}}\right) =$$

$$= -\left(\sum_{s=1}^m d_s y(\xi_s, t_n), 2\tau y_{\mathring{t}}\right) - \left(\sum_{s=1}^m \sigma\tau^2 d_s y_{\bar{t}t}(\xi_s, t_n), 2\tau y_{\mathring{t}}\right). \qquad (19)$$

Оценим слагаемые, входящие в правую часть (19), тогда получим

$$-\left(\sum_{s=1}^m d_s y(\xi_s, t_n), 2\tau y_{\mathring{t}}\right) = -2\tau\sum_{s=1}^m y(\xi_s, t_n)\left(d_s, y_{\mathring{t}}\right) \le$$

$$\leq \tau \sum_{s=1}^{m} \left(y^2(\xi_s, t_n) + (d_s, y_{\mathring{t}})^2 \right) \leq M_4 \tau \left(\|y_{\bar{x}}]|^2 + \|y\|^2 + \left(1, y_{\mathring{t}}^2\right) \right) \leq$$

$$\leq M_4 \tau \left(\|y_{\bar{x}}]|^2 + \|y\|^2 + \frac{1}{4} \left(1, (\hat{y}_{\bar{t}} + y_{\bar{t}})^2\right) \right) \leq M_5 \tau \left(\|\hat{y}_{\bar{t}}\|^2 + \|y_{\bar{t}}\|^2 + \|y_{\bar{x}}]|^2 + \|y\|^2 \right), \quad (20)$$

$$-\left(\sum_{s=1}^{m} \sigma\tau^2 d_s y_{\bar{t}t}(\xi_s, t_n), 2\tau y_{\mathring{t}} \right) = -\sigma\tau \sum_{s=1}^{m} \tau \left(\hat{y}_{\bar{t}}(\xi_s, t_n) - y_{\bar{t}}(\xi_s, t_n) \right) (d_s, \hat{y}_{\bar{t}} + y_{\bar{t}}) \leq$$

$$\leq M_6 \sigma\tau \sum_{s=1}^{m} \left(\hat{y}_{\bar{t}}^2(\xi_s, t_n)\tau^2 + y_{\bar{t}}^2(\xi_s, t_n)\tau^2 + \left(1, (\hat{y}_{\bar{t}} + y_{\bar{t}})^2\right) \right) \leq$$

$$\leq \sigma\tau^3 \varepsilon M_7 \left(\|\hat{y}_{\bar{t}\bar{x}}]|^2 + \|y_{\bar{t}\bar{x}}]|^2 \right) + M_8^{\varepsilon} \tau \left(\|\hat{y}_{\bar{t}}\|^2 + \|y_{\bar{t}}\|^2 \right). \quad (21)$$

Учитывая (20), (21), из (19) находим

$$-\left(\sum_{s=1}^{m} d_s y^{(\sigma,\sigma)}(\xi_s, t_n), 2\tau y_{\mathring{t}} \right) \leq$$

$$\leq \sigma\tau^3 \varepsilon M_7 \left(\|\hat{y}_{\bar{t}\bar{x}}]|^2 + \|y_{\bar{t}\bar{x}}]|^2 \right) + M_9 \tau \left(\|y_{\bar{x}}]|^2 + \|y\|^2 \right) + M_{10}^{\varepsilon} \tau \left(\|\hat{y}_{\bar{t}}\|^2 + \|y_{\bar{t}}\|^2 \right). \quad (22)$$

Преобразуем теперь четвертое слагаемое в правой части (9), тогда имеем

$$-\frac{h^2}{12} \left(\Lambda \left(p \sum_{s=1}^{m} d_s y^{(\sigma,\sigma)}(\xi_s, t_n) \right), 2\tau y_{\mathring{t}} \right) = -\frac{h^2}{12} \left(\left(a \left(p \sum_{s=1}^{m} d_s y^{(\sigma,\sigma)}(\xi_s, t_n) \right)_{\bar{x}} \right)_x, 2\tau y_{\mathring{t}} \right) =$$

$$= \frac{h^2}{12} \left(a \left(p \sum_{s=1}^{m} d_s y(\xi_s, t_n) \right)_{\bar{x}} + a \left(p\sigma\tau^2 \sum_{s=1}^{m} d_s y_{\bar{t}t}(\xi_s, t_n) \right)_{\bar{x}}, 2\tau y_{\bar{x}\mathring{t}} \right] =$$

$$= \frac{h^2}{12} \sum_{s=1}^{m} y(\xi_s, t_n) \left(a \left(p d_s \right)_{\bar{x}}, 2\tau y_{\bar{x}\mathring{t}} \right] + \sum_{s=1}^{m} \sigma\tau^2 y_{\bar{t}t}(\xi_s, t_n) \frac{h^2}{12} \left(a \left(p d_s \right)_{\bar{x}}, 2\tau y_{\bar{x}\mathring{t}} \right]. \quad (23)$$

Оценим слагаемые, входящие в правую часть (23), тогда имеем

$$\frac{h^2}{12} \sum_{s=1}^{m} y(\xi_s, t_n) \left(a \left(p d_s \right)_{\bar{x}}, 2\tau y_{\bar{x}\mathring{t}} \right] \leq M_{11} \frac{\tau h^2}{12} \sum_{s=1}^{m} y(\xi_s, t_n) \left(1, \hat{y}_{\bar{x}\bar{t}} + y_{\bar{x}\bar{t}} \right] \leq$$

$$\leq M_{11} \frac{\tau h^2}{24} \sum_{s=1}^{m} \left(y(\xi_s, t_n)^2 + \left(1, \hat{y}_{\bar{x}\bar{t}} + y_{\bar{x}\bar{t}}\right]^2 \right) \leq M_{12} \frac{\tau h^2}{24} \left(\|y_{\bar{x}}]|^2 + \|y\|^2 + \left(1, \left(\hat{y}_{\bar{x}\bar{t}}^2 + y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right]\right) \right) \leq$$

$$\leq M_{12} \frac{\tau h^2}{24} \left(\|\hat{y}_{\bar{x}\bar{t}}]|^2 + \|y_{\bar{x}\bar{t}}]|^2 + \|y_{\bar{x}}]|^2 + \|y\|^2 \right) \leq M_{13} \tau \left(\|\hat{y}_{\bar{t}}\|^2 + \|y_{\bar{t}}\|^2 + \|y\|^2 \right), \quad (24)$$

$$\sum_{s=1}^{m} \sigma\tau^2 y_{\bar{t}t}(\xi_s, t_n) \frac{h^2}{12} \left(a \left(p d_s \right)_{\bar{x}}, 2\tau y_{\bar{x}\mathring{t}} \right] \leq M_{14} \frac{\tau h^2}{12} \sum_{s=1}^{m} \sigma\tau^2 y_{\bar{t}t}(\xi_s, t_n) \left(1, y_{\bar{x}\mathring{t}} \right] \leq$$

$$\leq M_{14} \frac{\tau\sigma h^2}{48} \sum_{s=1}^{m} \left(\tau^2 \left(\hat{y}_{\bar{t}}(\xi_s, t_n) - y_{\bar{t}}(\xi_s, t_n) \right)^2 + \left(1, (\hat{y}_{\bar{x}\bar{t}} + y_{\bar{x}\bar{t}})\right]^2 \right) \leq$$

$$\leq \tau^2 M_{15} \frac{h^2}{48} \left(\|\hat{y}_{\bar{t}}\|^2 + \|y_{\bar{t}}\|^2 + \|\hat{y}_{\bar{x}\bar{t}}]|^2 + \|y_{\bar{x}\bar{t}}]|^2 \right) \leq \tau M_{16} \left(\|\hat{y}_{\bar{t}}\|^2 + \|y_{\bar{t}}\|^2 \right). \quad (25)$$

Учитывая (24), (25), из (23) находим

$$-\frac{h^2}{12}\left(\Lambda\left(p\sum_{s=1}^{m}d_s y^{(\sigma,\sigma)}(\xi_s,t_n)\right),2\tau y_{\mathring{t}}\right)\le M_{17}\tau\left(\|\hat{y}_{\bar{t}}\|^2+\|y_{\bar{t}}\|^2+\|y\|^2\right). \tag{26}$$

Последнее слагаемое в правой части (9) оценим следующим образом:

$$(\varphi,2\tau y_{\mathring{t}})=(\varphi,\tau(\hat{y}_{\bar{t}}+y_{\bar{t}}))\le\tau\left(1,\varphi^2+\frac{1}{2}\hat{y}_{\bar{t}}^2+\frac{1}{2}y_{\bar{t}}^2\right)=\tau\|\varphi\|^2+\frac{\tau}{2}\left(\|\hat{y}_{\bar{t}}\|^2+\|y_{\bar{t}}\|^2\right). \tag{27}$$

Учитывая полученные оценки (10)–(27), из (9) находим

$$\tau\left(\|y_{\bar{t}}\|^2\right)_t+\tau\left(\frac{a^{(-1)}}{2},y_{\bar{x}}^2+\check{y}_{\bar{x}}^2\right]_t+\tau\left(a^{(-1)},\tau^2\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right]_t-\frac{h^2\tau}{12}\left(\left(ap_{(-1)}\right)^{(-1)},y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right]_t\le$$

$$\le\sigma\tau^3\varepsilon M_7\left(\|\hat{y}_{\bar{t}\bar{x}}]|^2+\|y_{\bar{t}\bar{x}}]|^2\right)+M_{18}\tau\left(\|y_{\bar{x}}]|^2+\|y\|^2\right)+M_{19}^{\varepsilon}\left(h+\tau\right)\left(\|\hat{y}_{\bar{t}}\|^2+\|y_{\bar{t}}\|^2\right)+$$

$$+\tau\left(\frac{a_{\bar{t}}}{2},y_{\bar{x}}^2+\check{y}_{\bar{x}}^2\right]+\tau\left(a_{\bar{t}},\tau^2\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right]-\frac{h^2\tau}{12}\left(\left(ap_{(-1)}\right)_{\bar{t}},y_{\bar{x}t}^2\right]+\|\varphi\|^2\tau. \tag{28}$$

Выбирая $h\le\tau$, просуммируем (28) по n' от 1 до n, тогда получим

$$\|y_{\bar{t}}\|^2+\|y_{\bar{x}}]|^2+\|\check{y}_{\bar{x}}]|^2+\left(\tau^2\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)-\frac{h^2}{12c_1}\right)\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|^2\le$$

$$\le M_{20}\sum_{n'=1}^{n}\left[\sigma\tau^2\varepsilon\left(\|\hat{y}_{\bar{t}\bar{x}}]|^2+\|y_{\bar{t}\bar{x}}]|^2\right)+\|\hat{y}_{\bar{t}}\|^2+\|y_{\bar{t}}\|^2+\|y_{\bar{x}}]|^2+\|\check{y}_{\bar{x}}]|^2+\|y\|^2+\right.$$

$$\left.+\left[\tau^2\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)-\frac{h^2}{12}\left(c_1+\frac{1}{c_0}\right)\right]\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|^2+\|\varphi\|^2\right]\tau+$$

$$+M_{21}\left[\|y_{\bar{t}}^1\|^2+\|y_{\bar{x}}^1]|^2+\|y_{\bar{x}}^0]|^2+\left(\tau^2\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)-\frac{h^2}{12c_0}\right)\|y_{\bar{x}\bar{t}}^1]|^2\right]. \tag{29}$$

Выбирая $\sigma>\frac{1}{2}, h\le\sqrt{6c_0(\sigma-\frac{1}{2})}\tau$, из (29) находим

$$\|y_{\bar{t}}\|^2+\|y_{\bar{x}}]|^2+\|\check{y}_{\bar{x}}]|^2+\tau^2\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|^2\le M_{22}\sum_{n'=1}^{n}\left[\sigma\tau^2\varepsilon\left(\|\hat{y}_{\bar{t}\bar{x}}]|^2+\|y_{\bar{t}\bar{x}}]|^2\right)+\right.$$

$$\left.+\|\hat{y}_{\bar{t}}\|^2+\|y_{\bar{t}}\|^2+\|y_{\bar{x}}]|^2+\|\check{y}_{\bar{x}}]|^2+\|y\|^2+\tau^2\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|^2\right]\tau+$$

$$+M_{23}\left[\sum_{n'=1}^{n}\|\varphi\|^2\tau+\|y_{\bar{t}}^1]|^2+\|y_{\bar{x}}^1]|^2+\|y_{\bar{x}}^0]|^2+\tau^2\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\|y_{\bar{x}\bar{t}}^1]|^2\right]. \tag{30}$$

В (30) преобразуем $\sum\limits_{n'=1}^{n}\left(\|\hat{y}_{\bar{t}\bar{x}}]|^2+\|y_{\bar{t}\bar{x}}]|^2\right)\tau$ и $\sum\limits_{n'=1}^{n}\left(\|\hat{y}_{\bar{t}}\|^2+\|y_{\bar{t}}\|^2\right)\tau$, тогда получим

$$\sum_{n'=1}^{n}\left(\|\hat{y}_{\bar{t}\bar{x}}]|^2+\|y_{\bar{t}\bar{x}}]|^2\right)\tau=\sum_{n'=1}^{n}\|y_{\bar{t}\bar{x}}^{n'+1}]|^2\tau+\sum_{n'=1}^{n}\|y_{\bar{t}\bar{x}}^{n'}]|^2\tau=\sum_{n'=2}^{n+1}\|y_{\bar{t}\bar{x}}^{n'}]|^2\tau+\sum_{n'=1}^{n}\|y_{\bar{t}\bar{x}}^{n'}]|^2\tau\le$$

$$\leq \tau \|y_{\bar{t}\bar{x}}^{n+1}]|^2 + \tau \|y_{\bar{t}\bar{x}}^{1}]|^2 + 2\sum_{n'=1}^{n} \|y_{\bar{t}\bar{x}}^{n'}]|^2 \tau, \tag{31}$$

$$\sum_{n'=1}^{n} \left(\|\hat{y}_{\bar{t}}\|^2 + \|y_{\bar{t}}\|^2\right)\tau \leq \tau \|y_{\bar{t}}^{n+1}\|^2 + \tau \|y_{\bar{t}}^{1}\|^2 + 2\sum_{n'=1}^{n} \|y_{\bar{t}}^{n'}\|^2 \tau. \tag{32}$$

Принимая во внимание (31), (32), из (30) с учетом леммы 1 находим

$$(1 - M_{22}\tau)\|y_{\bar{t}}\|^2 + \|y_{\bar{x}}]|_0^2 + \|\check{y}_{\bar{x}}]|_0^2 + \left(\sigma\left(1 - \varepsilon T M_{23}\right) - \frac{1}{2}\right)\tau^2 \|y_{\bar{x}\bar{t}}]|^2 \leq$$

$$\leq M_{24}\sum_{n'=1}^{n}\left[\|y_{\bar{t}}\|^2 + \|y_{\bar{x}}]|^2 + \|\check{y}_{\bar{x}}]|^2 + \left(\sigma\left(1 - \varepsilon M_{25}\right) - \frac{1}{2}\right)\tau^2 \|y_{\bar{x}\bar{t}}]|^2\right]\tau +$$

$$+ M_{26}\left[\sum_{n'=1}^{n}\|\varphi\|^2\tau + \|y_{\bar{t}}^{1}\|^2 + \|y_{\bar{x}}^{1}]|^2 + \|y_{\bar{x}}^{0}]|^2 + \left(\sigma\left(1 - \varepsilon T M_{27}\right) - \frac{1}{2}\right)\tau^2 \|y_{\bar{x}\bar{t}}^{1}]|^2\right]. \tag{33}$$

Выбирая $\tau \leq \tau_0 = \frac{1}{2M_{22}}$, $\sigma \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varepsilon \leq \left\{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}TM_{23}}, \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}M_{25}}, \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}TM_{27}}\right\}$, из (33) получаем

$$\|y^{n+1}\|_1^2 \leq M_{28}\sum_{n'=1}^{n}\|y^{n'}\|_1^2\tau + M_{29}\left[\sum_{n'=1}^{n}\|\varphi^{n'}\|^2\tau + \ \|y^1\|_1^2\right], \tag{34}$$

где $\|y\|_1^2 = \|y_{\bar{t}}\|^2 + \|y_{\bar{x}}]|^2 + \|\check{y}_{\bar{x}}]|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\tau^2\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|^2$.

Применяя разностный аналог леммы Гронуолла [10, с. 171, лемма 4], из (34) получаем

$$\|y^{n+1}\|_1^2 \leq M_{30}\left[\sum_{n'=1}^{n}\|\varphi^{n'}\|^2\tau + \|y^1\|_1^2\right], \tag{35}$$

где M_i, $(i = 1, 2, 3, ...)$ – положительные постоянные, не зависящие от h и τ.

Теорема доказана.

Из оценки (35) следует устойчивость и сходимость схемы (5)-(7) со скоростью $O(h^4 + \tau^2)$ при $\sigma \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, $h \leq \sqrt{6c_0(\sigma - \frac{1}{2})}\tau$, $\tau \leq \tau_0(c_0, c_1, c_2, \sigma, T)$ в норме $\|y\|_1$.

Замечание. В работе исследована первая начально-краевая задача для неклассического дифференциального уравнения гиперболического типа. С помощью метода конечных разностей построена разностная схема повышенного порядка точности. Получена априорная оценка в разностной форме. Основной метод получения априорной оценки — метод энергетических неравенств. Из полученной оценки следуют единственность и устойчивость решения относительно входных данных. В силу линейности рассматриваемой задачи полученная оценка позволяет утверждать сходимость приближенного решения к точному (в предположении существования последнего в классе достаточно гладких функций) со скоростью $O(h^4 + \tau^2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Байков, В. А. Уравнения математической физики / В. А. Байков, А. В. Жибер. — М.; Ижевск : Ин-т компьютер. исслед., 2003. — 252 с.

2. Бештоков, М. Х. О сходимости разностной схемы высокого порядка аппроксимации для модифицированного уравнения влагопереноса дробного порядка / М. Х. Бештоков // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. — 2024. — № 3. — С. 42–54.

3. Бештоков, М. Х. Приближенное решение первой краевой задачи для нагруженного уравнения теплопроводности / М. Х. Бештоков, В. А. Водахова, М. М. Исакова // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2023. — № 26 (4). — С. 5–17. — DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.4.1

4. Бештоков, М. Х. Численный метод решения одной нелокальной краевой задачи для уравнения третьего порядка гиперболического типа / М. Х. Бештоков // Журнал вычисл. математики и математ. физики. — 2014. — № 54. — С. 1497–1514.

5. Бойков, И. В. О численном решении коэффициентной обратной задачи для гиперболических уравнений / И. В. Бойков, В. А. Рязанцев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2019. — № 3. — С. 47–62.

6. Кулиев, Г. Ф. Задача точечного управления для гиперболического уравнения / Г. Ф. Кулиев // Автоматика и телемеханика. — 1993. — № 3. — С. 80–84.

7. Нахушев, А. М. Нагруженные уравнения и их применение / А. М. Нахушев. — М. : Наука, 2012. — 232 с.

8. Попов, И. В. Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для нелинейного уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости / И. В. Попов. — М. : Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017. — 21 с.

9. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. — М. : Наука, 1983. — 616 с.

10. Самарский, А. А. Устойчивость разностных схем / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — М. : Наука, 1973. — 415 с.

11. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1977. — 736 с.

12. Courant, R. Supersonic Flow and Shock Waves / R. Courant, K. O. Friedrichs. — New York : Interscience Publishers, Inc., 1948. — 464 p.

HIGHER ORDER APPROXIMATION OF THE FIRST INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A NON-CLASSICAL DIFFERENTIAL EQUATION OF HYPERBOLIC TYPE

Murat K. Beshtokov

Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Leading Researcher, Department of Computational Methods,
Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
beshtokov-murat@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-2968-9211
Shortanova St, 89a, 360000 Nalchik, Russian Federation

Abstract. The first initial-boundary value problem for a non-classical wave equation with variable coefficients is studied. For the numerical solution of the original problem on a uniform grid, a difference scheme of increased order of accuracy is constructed, approximating the original problem. An a priori estimate in the difference interpretation is obtained by the method of energy inequalities. As a result of the analysis, an a priori estimate was obtained in difference form using the method of energy inequalities. This estimate allows us to draw conclusions about the uniqueness of the solution to the difference problem and the continuous dependence of the solution on the input data, as well as about the convergence of the numerical solution of the difference problem to the solution of the original differential problem with in the rate of $O(h^4 + \tau^2)$.

Key words: first initial-boundary value problem, wave equation, non-classical equation, numerical solution, difference scheme, a priori estimate, stability and convergence of schemes.