

DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2025.3.2>

УДК 621.317.361

ББК 32.842

Дата поступления статьи: 01.03.2025

Дата принятия статьи: 21.05.2025



## ЦИФРОВАЯ АДАПТИВНАЯ СИСТЕМА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ЧАСТОТЫ И АМПЛИТУДЫ<sup>1</sup>

**Андрей Викторович Никитин**

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры радиофизики,  
Волгоградский государственный университет  
[randombent@gmail.com](mailto:randombent@gmail.com)  
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

**Сергей Владимирович Перченко**

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры радиофизики,  
Волгоградский государственный университет  
[perchenko@volsu.ru](mailto:perchenko@volsu.ru)  
<https://orcid.org/0000-0003-4643-3015>  
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

**Аннотация.** Предложена структура двухканальной адаптивной цифровой системы для динамического измерения частоты и амплитуды квазигармонических сигналов с медленно меняющимися параметрами. Показано, что данная система требует небольшого количества операций и может быть реализована как система реального времени на базе современных микроконтроллеров. Приводятся результаты численного моделирования процесса измерения частоты и амплитуды с помощью предложенной системы.

**Ключевые слова:** адаптивная система, измерение частоты, измерение амплитуды, коэффициент прореживания, реальное время.

В ряде задач радиофизики и радиотехники измерение параметров нестационарных систем сводится к анализу квазигармонических колебаний следующего вида:

$$x(t) = X(t) \cos(\theta(t)), \quad (1)$$

то есть к определению законов изменения амплитуды  $X(t)$  и мгновенной частоты, которая является производной полной фазы:  $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ . Большинство существующих цифровых методов не позволяет с достаточной точностью получить оценку мгновенной частоты на коротком (порядка двух периодов сигнала) интервале наблюдения, либо требует существенных вычислительных затрат.

В работах [3; 6; 7] описан цифровой параметрический метод оценивания мгновенной частоты сигнала (1), в работе [4] он дополнен методом измерения амплитуды и проведен анализ его точности и устойчивости, а в статье [5] приведены результаты сравнения его характеристик с характеристиками аналогичных методов. Метод позволяет оперативно получить достаточно точные оценки частоты узкополосных сигналов, но его погрешности существенно возрастают, если частота изменяется медленно, но достаточно сильно. Для сохранения высокой точности необходимо изменять один из параметров этого метода при изменении частоты, то есть применять адаптацию. В данной работе предлагается структура адаптивной системы для измерения частоты и амплитуды сигналов вида (1) с медленно меняющимися параметрами.

Рассмотрим три значения смеси сигнала (1) с белым нормальным шумом  $\xi(t)$  с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$  в точках  $t - kT$ , ( $k = 0, 1, 2$ ), где  $T$  удовлетворяет условиям медленности изменения частоты и амплитуды [3]:

$$|\dot{X}(t)| \ll \frac{1}{T} X(t), |\ddot{\theta}(t)| \ll \frac{1}{T} |\dot{\theta}(t)|. \quad (2)$$

Более строгие условия единственности квазигармонического представления (1) приведены в работе [1]. Если параметр  $T$  удовлетворяет условию Найквиста:  $T < 1/(2f_{max})$ , где  $f_{max}$  – максимальная частота спектра сигнала  $x(t)$ , оценки частоты и амплитуды будут иметь вид [4]:

$$\hat{f}(t-T) = \frac{1}{2\pi T} \arccos \left( \frac{x(t) + x(t-2T)}{2x(t-T)} \right) = f(t-T) + \delta_f(t-T), \quad (3)$$

$$\hat{X}(t-T) = \frac{\sqrt{x^2(t-T) - x(t)x(t-2T)}}{\sin(2\pi\hat{f}(t-T)T)} = X(t-T) + \delta_X(t-T). \quad (4)$$

Систематические и случайные погрешности этих оценок определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \langle \delta_f \rangle &= \left( \pi T \operatorname{ctg}(2\pi f T) \dot{f} + \frac{\dot{X}}{2\pi X} \right) \operatorname{tg}(\theta), \quad \sigma_f^2 = \frac{1 + 2 \cos^2(2\pi f T)}{8\pi^2 X^2 T^2 \sin^2(2\pi f T) \cos^2(\theta)} \sigma^2, \\ \langle \delta_X \rangle &= \frac{\pi X T^2 (\cos^2(\theta) - \cos^2(2\pi f T)) \operatorname{tg}(\theta)}{\sin^2(2\pi f T)} \dot{f} - T \operatorname{ctg}(2\pi f T) \operatorname{tg}(\theta) \dot{X}, \\ \sigma_X^2 &= \frac{4 \sin^2(\theta + 2\pi f T) \sin^2(\theta - 2\pi f T) + \sin^2(\theta) (\sin^2(\theta + 2\pi f T) + \sin^2(\theta - 2\pi f T))}{4 \sin^4(2\pi f T) \cos^2(\theta)} \sigma^2. \end{aligned}$$

Здесь  $\theta = \theta(t-T)$ ,  $f = f(t-T)$ ,  $\dot{f} = \dot{f}(t-T)$ ,  $X = X(t-T)$ ,  $\dot{X} = \dot{X}(t-T)$ . Видно, что погрешности  $\delta_f$  и  $\delta_X$  неограниченно возрастают на краях частотного диапазона  $[0, 1/(2T)]$  и при  $\theta \rightarrow \pi/2 + \pi k$ .

Если провести дискретизацию сигнала (1) с шагом  $\Delta$ , взять его отсчеты  $x[n] = x(n\Delta)$  в рамках скользящего окна длительностью  $L\Delta$ , то есть в диапазоне  $[n-L+1, n]$ , и положить  $T = Q\Delta$  ( $Q$  – целочисленный коэффициент прореживания), аргумент

арккосинуса в формуле (3) можно найти путем минимизации функционала погрешности:

$$J_1[n] = \sum_{k=n-M+1}^n \left( 2x[k-Q] \cos(2\pi\hat{f}[n]Q\Delta) - x[k] - x[k-2Q] \right)^2.$$

Целочисленный параметр  $M = L - 2Q$  определяет количество усреднений в рамках скользящего окна. Подкоренное выражение в формуле (4) можно найти, усреднив его в том же диапазоне. Оценки частоты и амплитуды примут следующий вид:

$$\hat{f}[n] = \frac{1}{2\pi Q\Delta} \arccos \left( \frac{\sum_{k=n-M+1}^n (x[k-2Q] + x[k]) x[k-Q]}{2 \sum_{k=n-M+1}^n x^2[k-Q]} \right), \quad (5)$$

$$\hat{X}[n] = \frac{\sqrt{\sum_{k=n-M+1}^n (x^2[k-Q] - x[k]x[k-2Q])}}{\sqrt{M} \sin(2\pi\hat{f}[n]Q\Delta)}. \quad (6)$$

Эти оценки соответствуют моменту времени  $(n - R)\Delta$ , где  $R = (L - 1)/2$  – задержка оценок. Будем полагать, что  $L$  и  $M$  нечетны, тогда задержка будет содержать целое количество интервалов  $\Delta$ . Погрешности оценок (5) и (6), вызванные наличием аддитивного шума с дисперсией  $\sigma^2$ , получены в работе [4] для случая  $M \gg Q$ :

$$\begin{aligned} \sigma_f^2[n-R] &= \frac{1}{2\pi^2 \Delta^2 Q M^2 X^2[n-R] \sin^2(2\pi f[n-R]Q\Delta)} \sigma^2, \\ \sigma_X^2[n-R] &= \frac{2 \left[ M - \frac{3Q}{4} - (2M - Q) \cos^2(2\pi f[n-R]Q\Delta) + M \cos^4(2\pi f[n-R]Q\Delta) \right]}{M^2 \sin^4(2\pi f[n-R]Q\Delta)} \sigma^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Видно, что эти дисперсии неограниченно растут на краях частотного диапазона  $[0, 1/(2Q\Delta)]$ , не зависят от  $\theta$ , а оптимальным является целочисленный коэффициент прореживания  $Q_0 \approx 1/(4f\Delta)$ . Если ввести суммы:

$$S_m[n] = \sum_{k=n-M+1}^n x[k]x[k-mQ], \quad (8)$$

то выражения (5) и (6) примут следующий вид:

$$\hat{f}[n] = \frac{1}{2\pi Q\Delta} \arccos \left( \frac{S_1[n-Q] + S_1[n]}{2S_0[n-Q]} \right), \quad (9)$$

$$\hat{X}[n] = \frac{\sqrt{S_0[n-Q] - S_2[n]}}{\sqrt{M} \sin(2\pi\hat{f}[n]Q\Delta)}. \quad (10)$$

Суммы (8) могут рассчитываться рекурсивно:

$$S_m[n] = S_m[n-1] + x[n]x[n-mQ] - x[n-M]x[n-mQ-M],$$

тогда для их вычисления требуется всего четыре арифметические операции.

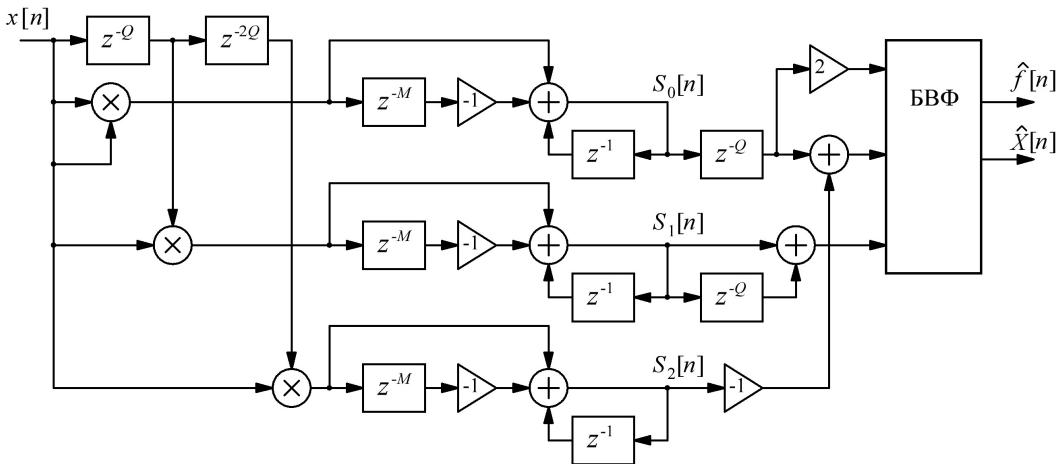


Рис. 1. Структурная схема системы для оценивания частоты и амплитуды

Структура системы для оценивания частоты и амплитуды представлена на рисунке 1. Видно, что расчет трех сумм  $S_0[n]$ ,  $S_1[n]$  и  $S_2[n]$  и их комбинаций, входящих в выражения (9) и (10), требует всего 11 операций сложения и одно умножение и легко реализуется средствами цифровой фильтрации. Блок вычисления функций (БВФ)  $\arccos(x/y)$ ,  $\sin(x)$  и  $\sqrt{x}$  может быть реализован на базе массивов памяти, в которые заранее вводятся значения этих функций.

Если частота сигнала (1) изменяется медленно в соответствии с условием (2), но достаточно сильно, для минимизации погрешностей (7) можно корректировать коэффициент прореживания  $Q$ , не изменяя шаг дискретизации  $\Delta$ . При этом частота дискретизации должна существенно превышать даже максимальную частоту сигнала:

$$\Delta f_{\max} \ll 1.$$

Построим систему из двух идентичных каналов, считая неизменной длину скользящего окна  $L$ :

$$L = 2Q_1 + M_1 = 2Q_2 + M_2$$

и полагая, что  $L \gg Q_1$  и  $L \gg Q_2$ . При запуске этой системы первый канал является ведущим, а выходные оценки системы совпадают с его оценками:  $\hat{f}[n] = \hat{f}_1[n]$ ,  $\hat{X}[n] = \hat{X}_1[n]$ . После окончания переходного процесса длительностью  $L\Delta$  в рамках каждого окна  $[(k-1)L\Delta, (kL-1)\Delta]$  ( $k > 1$ ) рассчитывается средняя частота и оптимальное значение целочисленного коэффициента прореживания  $Q_0$ , которое передается первому каналу:

$$\tilde{f} = \sum_{n=(k-1)L}^{kl-1} \hat{f}[n], \quad Q_0 \approx \frac{1}{4\tilde{f}\Delta}.$$

Ведущим становится второй канал, а выходные оценки системы принимают вид:  $\hat{f}[n] = \hat{f}_2[n]$ ,  $\hat{X}[n] = \hat{X}_2[n]$ . В первом канале начинается переходный процесс. Этот алгоритм продолжается непрерывно, а предложенная система является адаптивной.

На рисунке 2 показаны временные диаграммы, иллюстрирующие описанный процесс. Адаптивные системы активно используются при решении задач оценивания параметров сигналов [2].

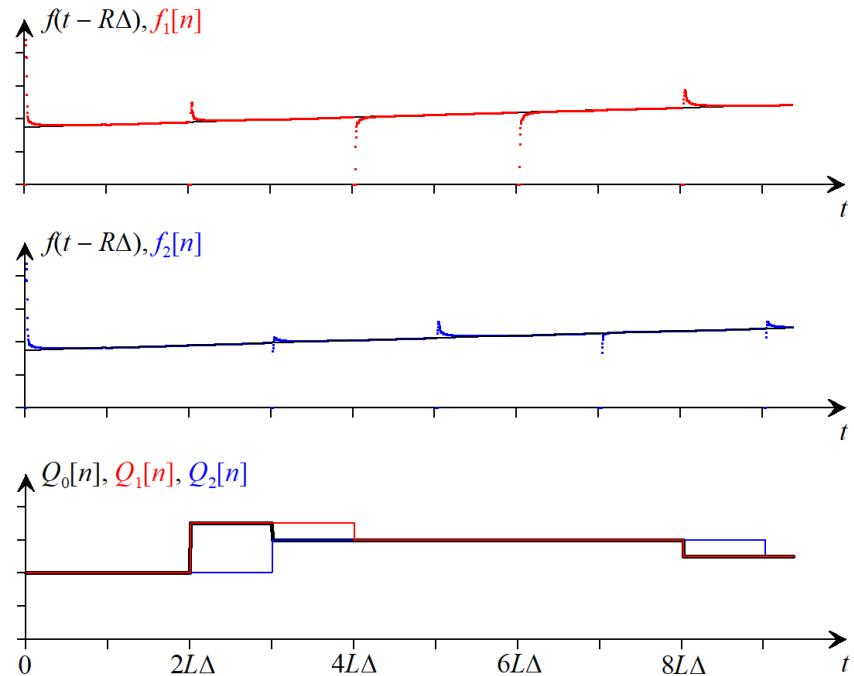


Рис. 2. Временные диаграммы работы адаптивной системы

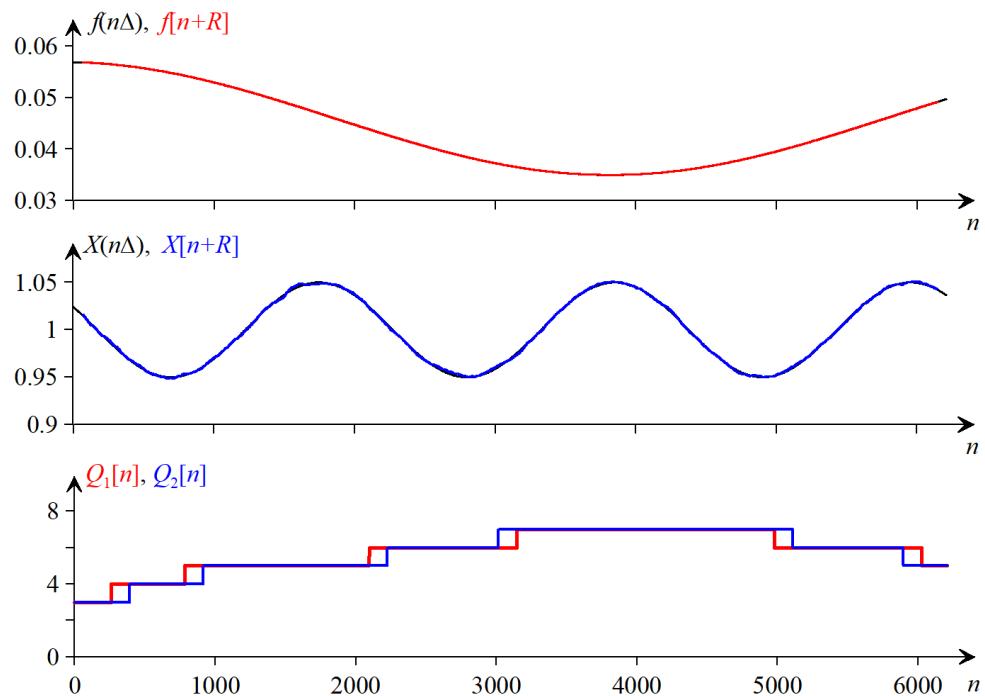


Рис. 3. Результаты обработки модельного сигнала

Для проверки работы предложенного адаптивного метода было проведено численное моделирование. Обрабатывалась последовательность отсчетов сигнала  $x[n]$  с тональной амплитудной и частотной модуляцией при наличии аддитивного шума:

$$x[n] = X[n] \cos(\theta[n]) + \xi[n], \quad n = 0, \dots, N - 1.$$

Задавались гармонические законы изменения амплитуды, частоты и полной фазы:

$$\begin{aligned} X[n] &= X_0 + \Delta_X \cos\left(\frac{2\pi}{T_X}n\Delta + \varphi_X\right), \quad f[n] = f_0 + \Delta_f \cos\left(\frac{2\pi}{T_f}n\Delta + \varphi_f\right), \\ \theta[n] &= 2\pi f_0 n\Delta + \Delta_f T_f \sin\left(\frac{2\pi}{T_f}n\Delta + \varphi_f\right) + \varphi_0, \end{aligned}$$

где  $\Delta = 1$ ,  $X_0 = 1$ ,  $\Delta_X = 0,05$ ,  $T_X = 2105\Delta$ ,  $\varphi_X = 1,07$ ,  $f_0 = 0,046$ ,  $\Delta_f = 0,011$ ,  $T_f = 7834\Delta$ ,  $\varphi_f = 0,081$ ,  $\varphi_0 = 0,081$ ,  $\sigma = 0,01$ ,  $N = 6210$ , длина скользящего окна  $L = 131$ . Результаты обработки представлены на рисунке 3.

Максимальные относительные отклонения оценок частоты и амплитуды в диапазоне  $[2L, \dots, N - 1]$  составили  $\delta_f = 0,00092$  и  $\delta_X = 0,0036$ . Для того же сигнала при том же значении  $L$  рассчитывались оценки частоты и амплитуды без адаптации с фиксированным значением  $Q$ . Максимальные отклонения оценок в зависимости от  $Q$  представлены в таблице. Видно, что адаптивный метод дает лучшие результаты, особенно, если заранее неизвестно хотя бы приближенное значение частоты.

#### Максимальные относительные отклонения оценок частоты и амплитуды

$Q$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\delta_f$	0,01361	0,00391	0,00223	0,00150	0,00102	0,00094	0,00094	0,00151
$\delta_X$	0,00854	0,00376	0,00356	0,00374	0,00364	0,00366	0,00369	0,00752

Предложенная цифровая адаптивная система для динамического измерения частоты и амплитуды квазигармонических сигналов может быть реализована на базе сигнальных процессоров, таких как ADSP-BF532, ADSP-21261, TMS320C6745, или на базе микроконтроллера с поддержкой инструкций ЦОС, например, STM32H750.

#### ПРИМЕЧАНИЕ

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда № 24-22-20025 (<https://rscf.ru/project/24-22-20025/>) и за счет средств бюджета Волгоградской области.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Игнатьев, В. К. О единственности квазигармонического представления / В. К. Игнатьев, А. В. Никитин, С. В. Юшанов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2010. — № 13. — С. 137–150.
2. Макаров, С. С. Адаптивный фильтр сигнала датчика ускорения / С. С. Макаров, И. В. Негинский, А. Л. Якимец // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2024. — Т. 27, № 2. — С. 72–79. — DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.volsu.2024.2.6>

3. Никитин, А. В. Измерение мгновенной частоты широкополосных сигналов на коротком интервале наблюдения / А. В. Никитин, С. В. Юшанов // Измерительная техника. — 2008. — № 2. — С. 50–54.
4. Никитин, А. В. Исследование оперативного метода измерения частоты и амплитуды сигналов с медленно меняющимися параметрами / А. В. Никитин, А. О. Никитин, А. А. Орлов // Измерительная техника. — 2016. — № 5. — С. 60–65.
5. Никитин, А. В. Сравнительный анализ рекурсивных методов оценивания частоты / А. В. Никитин // Инженерный вестник Дона. — 2018. — № 1. — С. 17.
6. Kusljevic, D. On LS-Based Power Frequency Estimation Algorithms / D. Kusljevic // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. — 2013. — Vol. 62, № 7. — P. 2020–2028. — DOI: <https://doi.org/10.1109/TIM.2013.2248254>
7. Savaresi, S. M. Closed-Form Unbiased Frequency Estimation of a Noisy Sinusoid Using Notch Filters / S. M. Savaresi, S. Bittanti, H. C. So // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2003. — Vol. 48. — P. 1285–1292. — DOI: <https://doi.org/10.1109/TAC.2003.814278>

**DIGITAL ADAPTIVE SYSTEM FOR FREQUENCY  
AND AMPLITUDE MEASUREMENT**

**Andrey V. Nikitin**

Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,  
Department of Radiophysics,  
Volgograd State University  
[randombent@gmail.com](mailto:randombent@gmail.com)  
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

**Sergey V. Perchenko**

Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,  
Department of Radiophysics,  
Volgograd State University  
[perchenko@volsu.ru](mailto:perchenko@volsu.ru)  
<https://orcid.org/0000-0003-4643-3015>  
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

**Abstract.** A method for dynamic measurement of frequency and amplitude of quasi-harmonic signals with slowly varying parameters is proposed. Parameter estimates are obtained in the approximation of the limited spectrum of the signal. Expressions describing systematic and random errors of the developed method in the presence of additive noise with a given variance are presented. On the basis of these expressions, the optimal conditions of the method operation are determined and an algorithm is developed that allows updating the frequency and amplitude estimates at each sampling interval. The algorithm is implemented as a two-channel adaptive digital system, which does not require a large number of operations and can be implemented as a real-time system based on modern signal processors and microcontrollers. The results of numerical modeling of the process of frequency and amplitude measurement using the proposed system are presented. It was found that even in the presence of tone amplitude modulation, additive noise, and slow twofold frequency change, the relative errors of frequency and amplitude estimates are  $9.2 \cdot 10^{-4}$  and  $3.6 \cdot 10^{-3}$ , respectively. The data obtained show that the adaptive system gives better results than the system without adaptation if at least an approximate frequency value is not known in advance.

**Key words:** adaptive system, frequency measurement, amplitude measurement, decimation factor, real time system.