УДК 514.752.44+514.772
ББК 22.15

К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ ПЕРЕМЕННОГО ТИПА СО МНОГИМИ СКЛАДКАМИ [1]

Кондрашов Александр Николаевич
Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики
Волгоградского государственного университета
ankondr@mail.ru
Проспект Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Задача построения теории уравнения Бельтрами переменного типа ставилась Л.И. Волковыским [3]. В работе показывается, что решения такого уравнения определенного строения ((A, B)-мультискладки) являются композицией конформной мультискладки и подходящего гомеоморфизма. При этом линии смены типа такого уравнения не могут быть произвольными, а лишь теми, которые преобразуются подходящим гомеоморфизмом в аналитические дуги. Доказывается вариант теоремы единственности для конформных мультискладок.

Ключевые слова: уравнение Бельтрами переменного типа, мультискладки, черно-белое разбиение области, конформные отображения первого рода, конформные отображения второго рода, решение с особенностью E.

1. Уравнение Бельтрами переменного типа: уточнение понятий

Пусть в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ задано дифференциальное уравнение

$$A(z)f_z(z) + B(z)f_{\overline{z}}(z) = 0, \quad (z = x_1 + ix_2 \in D), \tag{1}$$

где $A(z)$, $B(z)$ ($|A(z)| \neq |B(z)|$ почти всюду в D) — конечные измеримые комплекснозначные функции. В случае $A = \mu, B = -1$ уравнением (1) является *уравнение Бельтрами* (см. [2, гл. 2]),

$$f_{\overline{z}}(z) = \mu(z)f_z(z), \tag{2}$$

имеющее при условии

$$\operatorname{ess\,sup}_{D'} |\mu(z)| < 1 \text{ во всякой подобласти } D' \Subset D$$

гомеоморфное решение $w = f(z)$, принадлежащее классу $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ вместе с обратным. Это решение единственно с точностью до суперпозиции с конформным отображением.

В дальнейшем *решением* уравнения (1) будем называть непрерывную функцию $f(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, удовлетворяющую ему почти всюду в D.

Напомним [1, с. 7], что коэффициент $\mu(z) = f_{\overline{z}}(z)/f_z(z)$ называется *комплексной дилатацией* отображения $f(z) \in W^{1,2}_{\rm loc}(D)$. Его задание эквивалентно заданию почти всюду в D поля распределения характеристик Лаврентьева $(p(z), \theta(z))$ (см. [3]). Отображение $w = f(z)$, первая характеристика которого почти всюду в D удовлетворяет условию

$$p(z) \leq Q \equiv \text{const}, \tag{3}$$

называется *Q-квазиконформным*. Если условие (3) выполняется в D локально (то есть со своим $Q = Q(D')$ для всякой области $D' \Subset D$), то отображение называется *локально квазиконформным*. Условие $\operatorname{ess\,sup}_D |\mu(z)| < 1$ ($\operatorname{ess\,sup}_{D'}|\mu(z)| < 1$ для всякой области $D' \Subset D$) эквивалентно условию квазиконформности (локальной квазиконформности).

Уравнение Бельтрами с $|\mu(z)| < 1$ почти всюду в D будем в дальнейшем называть *классическим*. Случаи $|\mu(z)| < 1$ почти всюду в D и $|\mu(z)| > 1$ почти всюду в D отличаются тем, что в первом случае гомеоморфные отображения не меняют ориентацию, а во втором меняют. Различие здесь лишь формальное. Интерес представляет ситуация, когда одновременно существуют подобласти D, в которых почти всюду выполнено $|\mu(z)| < 1$ и подобласти D, в которых почти всюду $|\mu(z)| > 1$. В этом случае говорится, что уравнение Бельтрами имеет *переменный* тип. Его решения описывают отображения со складками, сборками и т. п. Задача исследования таких уравнений была поставлена Л.И. Волковыским [3], а ряд успехов в этом направлении был сделан в работах Э.Х. Якубова и У. Сребро [16–18]. Следует отметить, что уравнение (1) впервые рассматривалось в работе [16]. В той же работе [16] было изучено строение отображений со сменой ориентации в окрестности критических точек (то есть точек, в любой окрестности которых отображение негомеоморфно), лежащих на линии смены типа. В частности, в этой работе было дано описание некоторых важных случаев таких точек — точек, в которых отображение является складкой, зонтиком или (p, q)-сборкой.

В настоящей работе изучаются общие закономерности в строении отображений, описываемых уравнением (1), смена типа которого происходит во многих подобластях области D.

Пусть существует замкнутое относительно D множество $E \subset D$ меры $\operatorname{mes}_2 E = 0$. Если непрерывная в D функция $f(z)$ является решением уравнения (1) в $D \backslash E$, при этом принадлежность $f \in W^{1,2}_{\rm loc}(D)$ не известна, то функцию $f(z)$ будем называть *решением с особенностью E* данного уравнения.

Наличие особенностей у решений характерно для уравнений (1), *вырождающихся* на некотором множестве E, то есть таком E, что

$$\operatorname*{ess\,inf}_{B_r(z) \bigcap D} \big||A(z)| - |B(z)|\big| = 0$$

для всякого $r > 0$, где $B_r(z)$ — круг с центром $z \in E$. При этом в качестве E часто выступает *множество смены типа* уравнения (1), то есть множество раздела между $\{z : z \in D, |A(z)| < |B(z)|\}$ и $\{z : z \in D, |A(z)| > |B(z)|\}$.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область. Пусть задано конечное семейство жордановых дуг $\Gamma = \{\gamma\}$, разбивающих D на конечный набор подобластей $T(\Gamma) = \{D_i\}_{i=1}^N$. Дуги, входящие в семейство Γ, могут быть открытыми, замкнутыми или полуоткрытыми, то есть взаимно-однозначными образами интервала, отрезка или полуинтервала. Мы будем различать понятия замкнутой жордановой *дуги* и жордановой *кривой*. В первом случае будет иметься в виду дуга, включающая оба конца, а во втором — непрерывный взаимно-однозначный образ окружности S^1, или, другими словами, замкнутая дуга, у которой начало и конец совпадают.

Определение 1. *Пусть имеется полуоткрытая дуга γ, заданная непрерывным взаимно-однозначным отображением $z = z(t) : [a, b) \to \overline{\mathbb{C}}$. У нее определен конец при $t = a$ — точка $z(a)$, но не определен конец при $t = b$. В этом случае под концом понимается точка $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, определяемая равенством*

$$z_0 = \lim_{t \to b-0} z(t),$$

если такая точка существует. Точку $z(a)$ будем при этом называть собственным концом дуги γ, а точку z_0 — несобственным.

Аналогично определяются понятия несобственного конца полуоткрытой дуги γ вида $z = z(t) : (a, b] \to \overline{\mathbb{C}}$ при $t = a$, а также несобственных концов открытой дуги $z = z(t) : (a, b) \to \overline{\mathbb{C}}$ при $t = a$ и $t = b$, если они существуют. Замкнутая дуга $z = z(t) : [a, b] \to \mathbb{C}$ имеет два собственных конца $z(a)$ и $z(b)$.

В дальнейшем договоримся обозначать через $\langle a, b \rangle$ любой промежуток вида (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ или $[a, b]$. Положим

$$E_\Gamma = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} [\gamma],$$

где $[\gamma] = \{z : z = z(t),\ t \in \langle a, b \rangle\}$ обозначает носитель дуги γ.

Относительно дуг семейства Γ предполагаем следующее.

1) Всякая дуга из семейства Γ имеет ровно два конца, собственных или несобственных.
2) Разные дуги могут иметь общими разве лишь концевые точки.
3) Все конечные несобственные концы лежат на границе области ∂D. Какая-либо точка области D может быть разве лишь собственным концом некоторого четного набора дуг, в количестве не менее 4-х (или, что то же самое, быть общей граничной точкой не менее 4 областей D_i).
4) Среди замкнутых дуг $\gamma \in \Gamma$ нет вырождающихся в точку.
5) Каждая дуга без концевых точек является частью границы двух и только двух областей $\{D_i\}$.

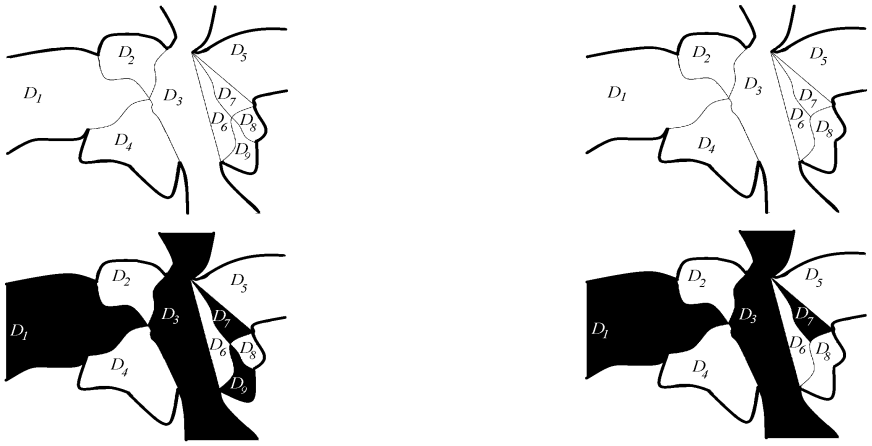
В дальнейшем, говоря о концах рассматриваемых дуг, слова «собственный» и «несобственный» мы будем опускать, считая ясным из контекста, о концах какого вида идет речь.

Определение 2. *Разбиение $T(\Gamma) = \{D_i\}_{i=1}^N$ называется* правильным, *если оно допускает черно-белую раскраску, то есть такую раскраску, что любые две области D_i и D_j, имеющие общую невырожденную граничную дугу $\gamma \in \Gamma$, имели разные цвета (см. рис. 1).*

Очевидно, что в случае правильности разбиения $T(\Gamma)$ раскраска однозначно определяется указанием цвета любой из областей и существует только две возможные раскраски. В частности, можно считать, что раскраска $T(\Gamma)$ определяется приписыванием области D_1 белого цвета.

В дальнейшем речь будет исключительно о черно-белых раскрасках, поэтому слова «черно-белая» будут опускаться.

Кроме того, договоримся считать, что всякий гомеоморфизм $f : D \to f(D)$ индуцирует в $f(D)$ разбиение $T(f^*\Gamma) = \{f(D_i)\}$. При этом раскраска $T(f^*\Gamma)$ сохраняется, если f сохраняет ориентацию, и меняется на другую, если ориентация меняется.



Правильное разбиение области D | Неправильное разбиение области D

Рис. 1. Виды разбиений

Напомним [8, гл. 2, § 3, п. 35], что дуга $\gamma \subset \mathbb{C}$, заданная в виде

$$z = f(t) : (\alpha, \beta) \to \mathbb{C}, \quad f'(t) \neq 0,$$

где $f(t)$ — аналитическая по вещественному переменному t функция, называется *аналитической*.

Определение 3. *Пусть в области D с разбиением $T(\Gamma)$ с заданной раскраской определено уравнение (1), причем $|A(z)| \leq |B(z)|$ п.в. в белых областях D_i и $|A(z)| \geq |B(z)|$ п.в. в черных областях D_i. Предположим, что $f(z) : D \to \mathbb{C}$ решение с особенностью E_Γ этого уравнения и для него выполнены свойства:*

1) отображение f гомеоморфно в каждой из подобластей D_i и на каждой дуге $\gamma \in \Gamma$;

2) отображение f сохраняет ориентацию в каждой белой области и меняет в каждой черной области.

Тогда будем называть отображение f (A, B)-мультискладкой.

В случае когда отображение f является (A, B)-мультискладкой, критическими точками являются точки всех дуг, входящих в семейство Γ. В терминах степени отображения (см., например, [7]) (A, B)-мультискладки f можно охарактеризовать тем, что локальная степень отображения в этих точках равна $\deg(f, z) = 0$. В белых областях $\deg(f, z) = 1$, а в черных $\deg(f, z) = -1$.

Гомеоморфное отображение области $D \subset \mathbb{C}$, осуществляемое голоморфной функцией, будем называть, следуя [9, с. 92], *конформным отображением первого рода*, а осуществляемое антиголоморфной функцией будем называть *конформным отображением второго рода*. Отметим, что голоморфность или антиголоморфность гомеоморфности не подразумевает.

Следуя работе [6], уравнению (1) будем ставить в соответствие классическое уравнение Бельтрами с комплексной дилатацией

$$\mu^*(z) = \begin{cases} -A(z)/B(z) & \text{при } |A(z)| \le |B(z)|, \\ -\overline{B(z)}/\overline{A(z)} & \text{при } |A(z)| > |B(z)|. \end{cases}$$

Это уравнение называем в дальнейшем *уравнением, ассоциированным с уравнением* (1).

Отметим, что для уравнения Бельтрами (2)

$$\mu^*(z) = \begin{cases} \mu(z) & \text{при } |\mu(z)| \le 1, \\ 1/\overline{\mu}(z) & \text{при } |\mu(z)| > 1, \end{cases}$$

и, значит, в классическом случае $\mu(z) = \mu^*(z)$.

Замечание. Связь между уравнениями Бельтрами переменного типа и ассоциированными уравнениями Бельтрами впервые отмечена в [12], а сам термин был введен нами в [6]. В этих работах показано, что складчатые решения уравнения Бельтрами переменного типа получаются из решений ассоциированного с ним уравнения с помощью дополнительной суперпозиции с функцией Бора $B(z) = x_1 + i|x_2|$. В следующей теореме показывается аналогичная связь в случае, когда уравнение имеет несколько областей, в соседних из которых уравнение имеет разный тип.

Теорема 1. *Предположим, что в области D с правильным разбиением $T(\Gamma)$ и заданной черно-белой раскраской задана (A, B)-мультискладка $f(z) : D \to \mathbb{C}$. Предположим также, что существует $w = f_0(z) : D \to f_0(D)$ — гомеоморфное решение с особенностью E_Γ, уравнения ассоциированного с* (1). *Кроме того, предположим, что для всякого i выполнено $f_0^{-1} \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f_0(D_i))$ и $f_i^{-1} \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f(D_i))$, где f_i^{-1} ветвь многозначной функции f^{-1}, соответствующая D_i.*

Тогда:

1) *$f(f_0^{-1}(w))$ конформное отображение первого рода всякой белой области $f_0(D_i)$ и конформное отображение второго рода всякой черной области $f_0(D_i)$;*

2) *дуги $f_0(\gamma)$ без концевых точек — аналитические.*

Доказательство. Будем обозначать $\zeta = f(z)$. Пусть D_i — некоторая белая область. Тогда отображения f и f_0 имеют в D_i одну и ту же комплексную дилатацию $\mu(z)$. Отображение $f(f_0^{-1}(w)) : f_0(D_i) \to f(D_i)$ почти всюду переводит бесконечно малые круги области $f_0(D_i)$ в бесконечно малые круги области $f(D_i)$. Как суперпозиция отображений класса $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ отображение $f(f_0^{-1}(w))$ есть отображение класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ (см., например, [14, лемма 6.4, с. 151]). В силу стандартной аргументации (см., например, [10, доказательство теоремы 1]) заключаем о его конформности первого рода.

Пусть теперь D_i — некоторая черная область. Тогда легко видеть, что отображения $g(z) = \overline{f(z)}$ и $f_0(z)$ имеют в D_i одну и ту же комплексную дилатацию $\mu(z)$. Отсюда заключаем, что отображение $g(f_0^{-1}(w)) : f_0(D_i) \to g(D_i)$ почти всюду переводит бесконечно малые круги области $f_0(D_i)$ в бесконечно малые круги области $g(D_i)$.

Как и выше, отображение $g(f_0^{-1}(w))$ как суперпозиция отображений класса $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ есть отображение класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$. Отсюда заключаем о конформности второго рода отображения $\overline{g(f_0^{-1}(w))} = f(f_0^{-1}(w))$.

Докажем теперь аналитичность всякой дуги $f_0(\gamma)$, если γ некоторая общая смежная граничная дуга двух областей D_i и D_j.

Пусть для определенности D_i — белая область, а D_j — черная.

Заметим, что $\gamma^* = f(\gamma)$ — жорданова дуга, как гомеоморфный образ жордановой дуги. Рассмотрим область $D^* = f(D_i)\bigcup f(D_j)$.

Отображение $\zeta = f(z)$ сохраняет ориентацию в D_i и меняет ее на противоположную в D_j. Поэтому области $f(D_i)$ и $f(D_j)$ имеют непустое пересечение, примыкающее к γ^*.

Если область D^* односвязна, то отобразим ее конформно в нижнюю полуплоскость комплексной плоскости так, чтобы образ множества γ^* лежал на вещественной оси. Пусть тогда $\zeta_1 = \varphi_1(\zeta)$ — данное отображение.

Если область D^* неодносвязна, то возможны две ситуации:

(*) $\gamma^* = f(\gamma)$ лежит на внешней компоненте связности границы ∂D^*,

(**) $\gamma^* = f(\gamma)$ лежит на некоторой внутренней компоненте связности границы ∂D^*.

В случае (*) пусть $\zeta_1 = \varphi_1(\zeta)$ конформное отображение области $\tilde{D}$ — минимальной односвязной области, содержащей D^*, в нижнюю полуплоскость комплексной плоскости, переводящее дугу γ^* в промежуток на вещественной оси.

В случае (**) пусть $\zeta_2 = \varphi_2(\zeta)$ конформное отображение области D^* на некоторую область D^{**}, такое, что граничная компонента ∂D^*, содержащая γ^*, перейдет во внешнюю компоненту границы ∂D^{**}. Пусть $\tilde{D}$ — минимальная односвязная область, содержащая D^{**} и $\zeta_1 = \varphi_3(\zeta_2)$ — конформное отображение $\tilde{D}$ в нижнюю полуплоскость комплексной плоскости, переводящее дугу $\varphi_3(\gamma^*)$ в промежуток на вещественной оси. Положим $\varphi_1 = \varphi_3 \circ \varphi_2$.

Отметим, что в силу принципа соответствия границ для конформных отображений, отображение $\varphi_1 : D^* \to \varphi_1(D^*)$ продолжается на $D^*\bigcup\gamma^*$ по непрерывности взаимно однозначно. Положим

$$v = \Phi(z) = \begin{cases} \varphi_1(f(z)) & \text{при } \ z \in D_i\bigcup\gamma, \\ \overline{\varphi_1(f(z))} & \text{при } \ z \in D_j. \end{cases}$$

Из процесса построения отображения Φ ясно, что оно гомеоморфно в $D_i\bigcup D_j\bigcup\gamma$, причем $\Phi, \Phi^{-1} \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ в областях D_s и $\Phi(D_s)$ $(s = i, j)$ соответственно и в D_i и D_j его комплексная дилатация совпадает с комплексной дилатацией $f_0(z)$.

Рассмотрим отображение

$$\Psi(v) = f_0(\Phi^{-1}(v)) : \Phi(D) \to f_0(D). \tag{4}$$

Из доказанного выше следует конформность $\Psi(v)$ в областях $\Phi(D_i)$ и $\Phi(D_j)$.

Поскольку прямая $\operatorname{Im} v = 0$ локально спрямляема, то, по теореме Пенлеве [11, гл. 2, § 26], заключаем о конформности $\Psi(v)$ во всей области $\Phi(D)$.

Аналитичность дуги $f_0(\gamma)$ следует из равенства $f_0(\gamma) = \Psi(\Phi(\gamma))$, того факта, что $\Phi(\gamma)$ есть промежуток на прямой $\operatorname{Im} v = 0$ и в силу неравенства $\Psi'(v) \neq 0$, справедливого внутри области $\Phi(D)$. Теорема доказана.

2. Конформные мультискладки

Определение 4. *Отображение* $w = f(z) : D \to \mathbb{C}$ *называется конформной мультискладкой с правильным разбиением* $T(\Gamma) = \{D_i\}$ *области* D *и заданной черно-белой раскраской, если:* 1) *дуги, составляющие семейство* Γ, *— аналитичны, за исключением, быть может, концов;* 2) *в каждой белой области* D_i *отображение является* $w = f(z)$ *конформным первого рода, а в каждой черной области* D_i *отображение является* $w = f(z)$ *конформным второго рода.*

Следствие теоремы 1. *При выполнении условий теоремы 1* (A, B)*-мультискладка* $f(z)$ *представима в виде*

$$f(z) = \varphi(f_0(z)),$$

где φ *— конформная мультискладка в* $f_0(D)$ *с разбиением* $T(f_0^*\Gamma)$.

Таким образом, из всего полученного выше можно заключить, что задача описания (A, B)-мультискладок сводится к задаче описания конформных мультискладок. В общем случае эта задача представляется достаточно сложной, однако можно отметить следующее свойство единственности, характеризующее всю совокупность конформных мультискладок с заданным разбиением с раскраской $T(\Gamma)$.

Теорема 2. *Пусть* $w = f_1(z)$ *и* $\zeta = f_2(z)$ *— конформные мультискладки области* D *с одним и тем же разбиением* $T(\Gamma) = \{D_i\}$ *с заданной раскраской. Тогда существует аналитическая функция* $\varphi : f_1(D) \to f_2(D)$*, такая, что*

$$f_2(z) = \varphi(f_1(z)).$$

Доказательство. Пусть D_i и D_j — произвольные соседние области с общей граничной дугой $\gamma \in \Gamma$ и для определенности D_i — белая область, а D_j — черная область.

Тогда $f_1(D_i)$ и $f_1(D_j)$ — две области, примыкающие к дуге $f_1(\gamma)$, а $f_2(D_i)$ и $f_2(D_j)$ — две области, примыкающие к дуге $f_2(\gamma)$. Причем в обоих случаях примыкание происходит «с одной» стороны.

Рассмотрим в $f_1(D_i)$ и $f_1(D_j)$ конформные отображения

$$F_i(w) = f_{2i}(f_{1i}^{-1}(w)), \quad F_j(w) = f_{2j}(f_{1j}^{-1}(w)),$$

где i, j указывают, что берутся ветви f_1 и f_2, соответствующие D_i и D_j.

Пусть Δ_{ij}^{γ} — компонента связности $f_1(D_i) \bigcap f_1(D_j)$, примыкающая к дуге $f_1(\gamma)$. Поскольку, очевидно, $F_i(w) = F_j(w)$ на $f_1(\gamma)$, то из теоремы 1 [5, с. 99] легко следует, что $F_i(w) \equiv F_j(w)$ в Δ_{ij}^{γ}. Тем самым $F_i(w)$ и $F_j(w)$ являются аналитическими продолжениями одного и того же аналитического элемента $(F_i(w), \Delta_{ij}^{\gamma}) = (F_j(w), \Delta_{ij}^{\gamma})$.

Ясно, что тогда и любые две функции (необязательно порожденные соседними областями D_i и D_j)

$$F_i(w) = f_{2i}(f_{1i}^{-1}(w)), \quad F_j(w) = f_{2j}(f_{1j}^{-1}(w))$$

являются аналитическими продолжениями друг друга. В целом они образуют некоторую аналитическую функцию $\varphi(w)$. Теорема доказана[2].

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-97021-р_поволжье_а).
[2] Автор выражает благодарность А.А. Клячину, взявшему на себя труд прочтения работы и сделавшему ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белинский, П. П. Общие свойства квазиконформных отображений / П. П. Белинский. — Новосибирск : Наука, 1974. — 100 с.

2. Векуа, И. Н. Обобщенные аналитические функции / И. Н. Векуа. — М. : Наука, 1988. — 512 с.

3. Волковыский, Л. И. Некоторые вопросы теории квазиконформных отображений / Л. И. Волковыский // Некоторые проблемы математики и механики (к семидесятилетию М. А. Лаврентьева). — Л. : Наука, 1970. — С. 128–134.

4. Гольдштейн, В. М. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения / В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк. — М. : Наука, 1983. — 284 с.

5. Каратеодори, К. Конформное отображение / К. Каратеодори. — М.; Л. : ОНТИ Гос. технико-теорет. изд-во, 1934. — 129 с.

6. Кондрашов, А. Н. К теории вырождающихся уравнений Бельтрами переменного типа / А. Н. Кондрашов // Сиб. мат. журн. — 2012. — Т. 53, № 6. — С. 1321–1337.

7. Красносельский, М. А. Векторные поля на плоскости / М. А. Красносельский, А. И. Перов, А. И. Поволоцкий, П. П. Забрейко. — М. : ГИФМЛ, 1963. — 245 с.

8. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : ГИФМЛ, 1958. — 680 с.

9. Маркушевич, А. И. Теория аналитических функций. В 2 т. Т. 1. Начала теории / А. И. Маркушевич. — М. : Наука, 1967. — 486 с.

10. Миклюков, В. М. Изотермические координаты на поверхностях с особенностями / В. М. Миклюков // Мат. сб. — 2004. — Т. 195, № 1. — С. 69–88.

11. Монтель, П. Нормальные семейства аналитических функций / П. Монтель. — М.; Л. : ОНТИ НКТП СССР, 1936. — 239 с.

12. Якубов, Э. Х. О решениях уравнения Бельтрами с вырождением / Э. Х. Якубов // Доклады академии наук СССР. — 1978. — Т. 243, № 5. — С. 1148–1149.

13. Lavrentieff, M. Sur une classe de representation continues / M. Lavrentieff // Мат. сб. — 1935. — Т. 42, № 4. — С. 407–424. Имеется перевод: Об одном классе непрерывных отображений // Лаврентьев, М. А. Избранные труды. Математика и механика / М. А. Лаврентьев. — М. : Наука, 1990. — С. 219–237.

14. Lehto, O. Quasiconformal Mappings in the Plane / O. Lehto, K. Virtanen. — New York; Heidelberg; Berlin : Springer-Verlag, 1973. — 258 p.

15. Martio, O. On existence and uniqueness of degenerate Beltrami equations / O. Martio, V. M. Miklyukov // Complex Variables. — 2004. — V. 49. — P. 647–656.

16. Srebro, U. Branched folded maps and alternating Beltrami equations / U. Srebro, E. Yakubov // Journal d'analyse mathematique. — 1996. — V. 70. — P. 65–90.

17. Srebro, U. Uniformization of maps with folds / U. Srebro, E. Yakubov // Israel mathematical conference proceedings. — 1997. — V. 11. — P. 229–232.

18. Srebro, U. μ-Homeomorphisms / U. Srebro, E. Yakubov // Contemporary Mathematics AMS. — 1997. — V. 211. — P. 473–479.

REFERENCES

1. Belinskiy P.P. *Obschie svoystva kvazikonformnykh otobrazheniy* [General Properties of Quasiconformal Mappings]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1974. 100 p.

2. Vekua I.N. *Obobschennye analiticheskie funktsii* [Generalized Analytic Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 512 p.

3. Volkovyskiy L.I. Nekotorye voprosy teorii kvazikonformnykh otobrazheniy [Some problems of the theory of quasiconformal mappings]. *Nekotorye problemy matematiki i mekhaniki (k semidesyatiletiyu M. A. Lavrent'eva)* [Some Problems of Mathematics and

Mechanics (to the seventieth birthday of M. A. Lavrent'ev)]. Leningrad, Nauka Publ., 1970, pp. 128–134.

4. Goldstein V.M., Reshetnyak Yu.G. *Vvedenie v teoriyu funktsiy s obobschennymi proizvodnymi i kvazikonformnye otobrazheniya* [Introduction to the theory of functions with generalized derivatives, and quasiconformal mappings]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 284 p.

5. Caratheodory K. *Konformnoe otobrazhenie* [Conformal mapping]. Moscow; Leningrad, ONTI Gos. tekhniko-teoret. izd-vo Publ., 1934. 129 p.

6. Kondrashov A.N. K teorii vyrozhdayuschikhsya uravneniy Bel'trami peremennogo tipa [On the theory of degenerate alternating Beltrami equations]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian mathematical journal], 2012, vol. 53, no. 6, pp. 1321–1337.

7. Krasnosel'skiy M.A., Perov A.I., Povolotskiy A.I., Zabreyko P.P. *Vektornye polya na ploskosti* [Plane Vector Fields]. Moscow, GIFML Publ., 1963. 245 p.

8. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Methods of the Theory of Functions of Complex Variables]. Moscow, GIFML Publ., 1958. 680 p.

9. Markushevich A.I. *Teoriya analiticheskikh funktsiy. V 2 t. T. 1. Nachala teorii* [Theory of analytic functions, vol. I]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 486 p.

10. Miklyukov V.M. Izotermicheskie koordinaty na poverkhnostyakh s osobennostyami [Isothermic coordinates on singular surfaces]. *Mat. sb.* [Sbornik: Mathematics], 2004, vol. 195, no. 1, pp. 69–88.

11. Montel P. *Normal'nye semeystva analiticheskikh funktsiy* [Normal Families of Analytic Functions]. Moscow; Leningrad, ONTI NKTP SSSR Publ., 1936. 239 p.

12. Yakubov E.Kh. O resheniyakh uravneniya Bel'trami s vyrozhdeniem [On solutions of Beltrami's equation with degeneration]. *Doklady akademii nauk SSSR* [Doklady Mathematics], 1978, vol. 243, no. 5, pp. 1148–1149.

13. Lavrentieff M. Sur une classe de representation continues. *Mat. sb.* [Sbornik: Mathematics], 1935, vol. 42, no. 4, pp. 407–424.

14. Lehto O., Virtanen K. *Quasiconformal Mappings in the Plane*. New York; Heidelberg; Berlin, Springer-Verlag, 1973. 258 p.

15. Martio O., Miklyukov V.M. On existence and uniqueness of degenerate Beltrami equations. *Complex Variables*, 2004, vol. 49, pp. 647–656.

16. Srebro U., Yakubov E. Branched folded maps and alternating Beltrami equations. *Journal d'analyse mathematique*, 1996, vol. 70, pp. 65–90.

17. Srebro U., Yakubov E. Uniformization of maps with folds. *Israel mathematical conference proceedings*, 1997, vol. 11, pp. 229–232.

18. Srebro U., Yakubov E. μ-Homeomorphisms. *Contemporary Mathematics AMS*, 1997, vol. 211, pp. 473–479.

ON THE THEORY OF ALTERNATING BELTRAMI EQUATION WITH MANY FOLDS

Kondrashov Alexander Nikolaevich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor, Department of Computer Science and Experimental Mathematics
Volgograd State University
ankondr@mail.ru
Prospect Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. Suppose that, in a simply-connected domain $D \subset \mathbb{C}$, we are given the differential equation

$$A(z)f_z(z) + B(z)f_{\overline{z}}(z) = 0, \quad (z = x_1 + ix_2 \in D), \qquad (*)$$

where $A(z)$, $B(z)$ ($|A(z)| \neq |B(z)|$ a.e. in D) are finite measurable complex-valued functions. For $A = \mu, B = -1$ the equation is given by the Beltrami equation (see [2, Chapter 2])

$$f_{\overline{z}}(z) = \mu(z) f_z(z).$$

It should be noted that (*) was first considered in [16].

We will call case of the Beltrami equation with $|\mu(z)| < 1$ a.e. in D by classical. The cases $|\mu(z)| < 1$ a.e. in D and $|\mu(z)| > 1$ a.e. in D differ in that, in the first case homeomorphisms do not change sense, and in the second they do. The difference is but formal here. Of interest is the situation when there simultaneously exist subdomains in D in which $|\mu(z)| < 1$ a.e. and subdomains D in which $|\mu(z)| > 1$ a.e. In this case the Beltrami equation is said to be alternating. The problem of the study of alternating Beltrami equations was posed by Volkovyskiĭ [3], and successful progress in this direction was made in [16; 17]. Its solutions are described by mappings with folds, cusps, etc.

Assign to (*) the classical Beltrami equation with complex dilation

$$\mu^*(z) = \begin{cases} -A(z)/B(z) & \text{for } |A(z)| \leq |B(z)|, \\ \\ -\overline{B(z)}/\overline{A(z)} & \text{for } |A(z)| > |B(z)|. \end{cases}$$

Below we call this equation associated with (*).

Let Γ is finite set of arcs $\{\gamma\}$ dividing D on a subregions $\{D_i\}$. Let's designate this partition of area D on a subregions $T(\Gamma)$. Let's assume that $T(\Gamma)$ supposes a black-white colouring, fix it. We put $E_\Gamma = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} [\gamma]$ where $[\gamma]$ is the arc carrier of γ.

Let $f(z)$ is solution (1) with singularity E_Γ in D. Call $f(z)$ which is a homeomorphism on everyone $D_i \in T(\Gamma)$ and each arc $\gamma \in \Gamma$, an (A, B)-multifold.

Let $f(z)$ is a continuous complex-valued function in D. Call by a conformal multifold the mapping $f(z)$ which is a conformal mapping of the first kind each white region D_i and conformal mapping of the second kind each black region D_i and which is a homeomorphism on each arc $\gamma \in \Gamma$.

The main result of the article is as follows.

Theorem. *Suppose that there exist an (A, B)-multifold $f(z)$ and a homeomorphic solution $f_0(z)$ with singularity E_Γ in D to the equation associated with (*). If for every D_i is holds $f_0^{-1} \in W^{1,2}_{\text{loc}}(f_0(D_i))$ and $f_i^{-1} \in W^{1,2}_{\text{loc}}(f(D_i))$, where f_i^{-1} is a branch multi-valued function f^{-1}, then the following hold:*

1) $f(f_0^{-1}(w))$ is a conformal mapping of the first kind each white region $f_0(D_i)$ and conformal mapping of the second kind each black region $f_0(D_i)$;

2) $\gamma \in \Gamma$ without endpoints is an analytic arcs.

In the article the uniqueness theorem for conformal multifolds also is received.

Key words: alternating Beltrami equation, multifolds, conformal multifolds, conformal mapping of the first kind, conformal mapping of the second kind, solution with singularity E.